دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض(گرایش جبر)

عنوان:

گروه‌های متناهی با درجه‌ی جابجایی نسبی سه

استادان راهنما:

دکتر سید احمد فقیهی

دکتر سید علی موسوی

نگارنده:

محمد مهدی داوودی

مهرماه ۱۳۹۳


بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان: گروه‌های متناهی با سه درجه ی جابجایی نسبی

نگارنده: محمد مهدی داوودی

اعضای هیأت داوران:

دکتر سید احمد فقیهی امضاء: . . . .

دکتر سید علی موسوی امضاء: . . . .

تقدیم به

آستان مقدس حضرت فاطمه زهرا (س) و همسر عزیز و فداکارم

که در تمام لحظات زندگی گرمای امید بخش وجودش پشتیبان من است

سپاس خدایی را که اول است بی آنکه پیش از او اولی باشد و آخر است بی آنکه پس از آخری باشد، خدایی که دیده های بینندگان از دیدنش فرومانده و اندیشه های توصیف کنندگان از وصفش عاجز شده اند.

بر خود لازم می دانم که از تمامی اساتید بزرگوار و پرتوانم در دوره ی کارشناسی و کارشناسی ارشد که در تحصیل علم راهنمایم بوده اند تقدیر و تشکر نمایم. به ویژه از اساتید گرامی و بزرگوار جناب آقایان دکتر فقیهی و دکتر موسوی که با صبر و بردباری راهنمایی اینجانب را در مراحل انجام این پایان نامه تقبل نموده اند، نهایت تشکر را دارم. همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر نادری به عنوان استاد داور که این پایان نامه را مورد مطالعه قرار داده و در جلسه دفاعیه شرکت نموده اند کمال تشکر را دارم. از استاد ارجمند جناب آقای دکتر طیبی که به عنوان نماینده محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه قبول زحمت نموده اند نیز قدردانی می نمایم.

در پایان از خانواده عزیز و فداکارم که همچون شمع سوختند و راه زندگی و علم را به روی من گشودند صمیمانه سپاس گذاری می نمایم.

چکیده :

در این پایان‌نامه ابتدا مفهوم درجه‌ی جابجایی یک گروه متناهی G را بیان می کنیم و آن را با نماد $d(G)$ نشان می‌دهیم. در واقع $d(G)$ عبارت است از احتمال جابجایی دو عضو دلخواه یک گروه، به عبارت دیگر داریم، $d(G)=\dfrac{|\{(x,y)\in G\times G \mid xy=yx\}|}{|G|^۲}$. سپس تعمیمی از مفهوم درجه‌ی جابجایی یک گروه متناهی G را بدست می‌آوریم و آن را با مفهوم درجه‌ی جابجایی نسبی یک زیرگروه H از گروه G نام گذاری می‌کنیم. این مفهوم را با نماد $d(H,G)$ نشان می‌دهیم.

در واقع $d(H,G)$ عبارت است از احتمال جابجایی یک عضو دلخواه H با یک عضو دلخواه G و داریم، $d(H,G)=\dfrac{|\{(x,y)\in H\times G \mid xy=yx\}|}{|H||G|}$. براحتی دیده می شود که $d(G,G)=d(G)$ و $d(H,G)=۱$ اگر و تنها اگر مشمول در $Z(G)$ باشد. بعلاوه n-امین درجه‌ی پوچ توان نسبی زیرگروه H از گروه G را تعریف خواهیم کرد.

در این پایان‌نامه مفهوم $\mathcal{D}(G)$ را مطرح می‌کنیم که عبارت است از مجموعه همه‌ی درجه‌های جابجایی نسبی زیرگروه‌های گروه G و $\mathcal{D}(G)$ به صورت $\{d(H,G) : H\leq G\}$ می باشد. سپس چند قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم و در نهایت $\mathcal{D}(G)$ را برای برخی گروه‌های شناخته شده از جمله گروه‌های دووجهی، دووجهی-گاوسی و چهارگانی تعمیم یافته بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی :

درجه‌ی جابجایی از یک گروه متناهی، درجه‌ی جابجایی نسبی، کلاس مزدوجی، کلاس پوچ توانی، ایزوکلینیسم

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. درجه‌ی جابجایی گروه G را که با نماد $d(G)$ نشان داده می‌شود به صورت احتمال جابجایی دو عضو دلخواه از G تعریف می‌شود. این مفهوم اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط $Gustafson$ مطرح شد و پژوهش‌های زیادی در مورد آن انجام گرفت. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به توسیع‌های مرکزی و درجه‌ی جابجایی اثر $Lescot$ اشاره کرد. از دیگر کارهای انجام شده در این زمینه، درجه‌ی جابجایی نسبی یک زیرگروه می باشد. درجه‌ی جابجایی نسبی یک زیرگروه که با نماد $d(G, H)$ نشان داده می‌شود، تعمیم درجه‌ی جابجایی یک گروه می‌باشد که توسط آقای عرفانیان در سال ۲۰۰۷ تعریف شده است و به صورت احتمال جابجایی یک عضو دلخواه H با یک عضو دلخواه G تعریف می‌شود. در این پایان‌نامه که از چهار فصل تشکیل شده است به بررسی مفاهیم فوق و برخی مفاهیم وابسته به آن خواهیم پرداخت. در فصل اول مقدمات و پیش نیازهایی مطرح می شود که در فصول بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم مفاهیم درجه‌ی جابجایی و ایزوکلینیسم (که اولین بار در سال ۱۹۴۰ توسط $Hall$ مطرح شده است) و ارتباط بین آن‌ها بیان می‌شود. در این فصل از یافته‌های $Lescot$ که در سال ۱۹۹۴ بیان شده است بهره گرفته‌ایم. در فصل سوم تعمیمی از مفهوم درجه‌ی جابجایی با عنوان درجه‌ی جابجایی نسبی که تعریف آن در بالا ذکر شد مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل چهارم به مفهوم دیگری به نام $\mathcal{D}(G)$ اختصاص داده شده است که به صورت مجموعه‌ی همه‌ی درجه‌های جابجایی نسبی زیرگروه‌های G تعریف می شود و در سال ۲۰۱۳ توسط آقایان برزگر، عرفانیان و فرخی معرفی شده است. در ادامه این فصل قضایای مهمی را بیان می‌کنیم و $\mathcal{D}(G)$ را برای برخی گروه‌های مهم شناخته شده مانند گروه‌های دووجهی، دووجهی-گاوسی و چهارگانی تعمیم یافته مشخص می‌کنیم.

فهرست نمادها

شاخص زیرگروه H در گروه G .... $|G:H|$

i–امین مرکز گروه G .... $Z_i(G)$

گروه دووجهی از مرتبه $2n$ .... D_{2n}

رده هم ارزی $[a]$ تحت رابطه مزدوجی روی گروه G .... a^G

مرکز ساز a در گروه G .... $C_G(a)$

دوری به طول r .... $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$

گروه متقارن از درجه n .... S_n

گروه متناوب از درجه n .... A_n

جابجاگر عناصر a_2, a_1 از یک گروه .... $[a_1, a_2]$

جابجاگر زیرگروه‌های A و B از یک گروه .... $[H_1, H_2]$

زیرگروه مشتق گروه G .... G'

زیر گروه تولید شده توسط زیرمجموعه S .... $< S >$

گروه خطی از درجه n روی میدان F .... $GL(n, F)$

بعد فضای برداری V .... $dim(V)$

رادیکال V .... $V^{\perp}$

درجه جابجایی گروه G .... $d(G)$

عدد رده‌ای گروه G .... $k(G)$

رده هم ارزی (a_1, a_2) تحت رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ .... $\frac{[< a_1, a_2 >]}{\sim}$

مزدوج a به وسیله g .... a^g

$n-$امین درجه جابجایی	$d_n(G)$
درجه جابجایی نسبی زیرگروه H در G	$d(H,G)$
$n-$امین درجه پوچ توانی	$d^n(G)$
$n-$ امین درجه پوچ توانی نسبی زیرگروه H در G	$d^n(H,G)$
مجموعه همه درجه‌های جابجایی نسبی زیرگروه‌های G	$\mathcal{D}(G)$
گروه دوری تولید شده توسط a	$< a >$
تعداد مقسوم علیه‌های عدد صحیح m	$\tau(m)$
گروه چهارگانی تعمیم یافته از مرتبه $4n$	Q_{4n}
گروه دو وجهی-گاوسی از مرتبه 2^n	QD_{2^n}

[۱۰] [۲] [۱] [۲۰] [۸] [۱۳] [۱۴] [۶] [۷] [۱۲] [۳] [۵] [۴] [۹] [۱۷] [۱۵] [۱۶] [۱۱]
[۱۹] [۱۸]

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

۱-۱ مقدمه

در این فصل به یادآوری مفاهیم مقدماتی و بیان قضیه‌هایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد به کار می‌آیند. در این پایان‌نامه G را گروه متناهی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و $a \in G$. مرکزساز a در G که با $C_G(a)$ نشان می‌دهیم عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی اعضای G که با a تعویض می‌شوند، یعنی

$$C_G(a) = \{g \in G; ag = ga\},$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $C_G(a)$ زیرگروه G است و $C_G(a) = G$ اگر و تنها اگر $a \in \mathrm{Z}(G)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و X زیر مجموعه‌ای دلخواه از G باشد. مرکزساز X در G که با $C_G(X)$ نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$C_G(X) = \{g \in G; xg = gx, \forall x \in X\},$$

چون اشتراک هر دسته از زیرگروه‌های G زیرگروه است، $C_G(X) = \bigcap_{x\in X} C_G(x)$ نیز زیرگروه G است.

تعریف ۳.۱. عنصر $b \in G$ را مزدوج a در G نامیم اگر $c \in G$ موجود باشد به طوری که $b = c^{-1}ac$. به علاوه رابطه‌ی ρ روی G که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho = \{(a, b) \in G \times G;\ \text{مزدوج } a \text{ است } b\}$$

رابطه‌ای هم‌ارزی است که به عنوان رابطه‌ی مزدوجی روی G شناخته می‌شود. رده‌ی هم‌ارزی $[a]$ از رابطه‌ی ρ را با نماد a^G یا $O(a)$ نشان می‌دهیم و آن را رده‌ی مزدوجی a می‌نامیم. همچنین تعداد تمام رده‌های مزدوجی G را با $K(G)$ نشان داده و آن را عدد رده‌ای G می‌نامیم.

قضیه ۴.۱. اندازه‌ی رده‌ی مزدوجی a^G برابر است با شاخص $C_G(a)$ در G، یعنی

$$|a^G| = |G : C_G(a)|$$

و برای گروه متناهی G داریم:

$$|G| = |\mathrm{Z}(G)| + \sum_{a \notin \mathrm{Z}(G)} |G : C_G(a)|.$$

در این معادله که معادله‌ی رده‌ای نامیده می‌شود، $\mathrm{Z}(G)$ مرکز G است و مجموع روی مجموعه‌ی کامل نماینده‌های رده‌های مزدوجی متمایز که به $\mathrm{Z}(G)$ تعلق ندارند تغییر می‌کند.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. گوییم G روی X عمل می‌کند هرگاه تابع $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$ و برای هر $a, b \in G$ داشته باشیم:

۱) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$؛

۲) $1 \cdot x = x$؛

به عنوان مثال گروه دلخواه G روی خودش به صورت مزدوجی عمل می‌کند:

$$\forall x \in G, \forall g \in G, \quad g \cdot x = gxg^{-1}.$$

حال به یافتن رده‌های مزدوجی چند گروه می‌پردازیم که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم.

مثال ۶.۱. در این مثال رده‌های مزدوجی گروه D_{2n} را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم G گروه D_{2n}، یعنی گروه دووجهی از مرتبه‌ی $2n$ $(n \geqslant 3)$ باشد. در این صورت:

$$G = \langle a, b \; ; \; a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

برهان. برای یافتن رده‌های مزدوجی گروه G، حالت های n فرد و n زوج را جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱) n فرد

ابتدا a^i $(1 \leq i \leq (n-1)/2)$ را در نظر می‌گیریم. چون $\langle a \rangle \subseteq C_G(a^i)$ پس

$$|G : C_G(a^i)| \leq |G : \langle a \rangle| = 2.$$

از طرفی $b^{-1}a^ib = a^{-i}$ و لذا $\{a^i, a^{-i}\} \subseteq (a^i)^G$. چون n فرد است $a^i \neq a^{-i}$ و در نتیجه $|(a^i)^G| \geq 2$ یعنی داریم:

$$2 \geq |G : C_G(a_i)| = |(a^i)^G| \geq 2$$

بنابراین تساوی برقرار است و $(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$.

حال b را در نظر می‌گیریم. $\langle b\rangle \subseteq C_G(b)$ و چون $b^{-1}a^ib = a^{-i}$ پس ضرب عناصر a^i و a^ib ($1 \leq i \leq n-1$) در b تعویض پذیر نیست. لذا

$$C_G(b) = \{1, b\}.$$

بنابراین $|b^G| = n$. چون تمام عناصر a^i در نظر گرفته شده‌اند پس b^G باید متشکل از n عنصر دیگر باشد، یعنی $b^G = \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}$. به این ترتیب گروه دووجهی D_{2n} (n فرد) دارای $(n+3)/2$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{(n-1)/2}, a^{-(n-1)/2}\}, \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}.$$

۲) n زوج

فرض می‌کنیم $n = 2m$. چون $b^{-1}a^mb = a^{-m} = a^m$ پس مرکزساز a^m در G هر دو عنصر a و b را در بر دارد و لذا $C_G(a^m) = G$. بنابراین رده‌ی مزدوجی a^m در G همان $\{a^m\}$ است. مانند حالت (۱)، به ازای $1 \leq i \leq m-1$، $(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$.

چون $b^{-1}ab = a^{-1}$، به ازای هر عدد صحیح j داریم:

$$a^jba^{-j} = a^{2j}b, a^j(ab)a^{-j} = a^{2j+1}b.$$

بنابراین

$$b^G = \{a^{2j}b \;:\; 0 \leq j \leq m-1\},\ (ab)^G = \{a^{2j+1}b \;:\; 0 \leq j \leq m-1\}.$$

از این‌رو گروه دووجهی D_{2n} (n زوج و $n = 2m$) دارای $m+3$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{m-1}, a^{-m+1}\}$$

$$\{a^{2j}b \ : \ 0 \leq j \leq m-1\}, \{a^{2j+1}b \ : \ 0 \leq j \leq m-1\}.$$

در نتیجه برهان کامل می‌شود. □

گزاره ۷.۱. فرض کنیم x جایگشت دوری $(i_1\ i_2 \cdots\ i_k)$ به طول k در S_n است و $g \in S_n$. در این صورت $g^{-1}xg$ جایگشت دوری $\big(g(i_1)\ g(i_2) \cdots\ g(i_k)\big)$ به طول k است.

برهان. به قضیه ۱۲.۱۳ از مرجع [۸] رجوع کنید. □

تعریف: گوییم که یک جایگشت $T \in S_n$ دارای تجزیه دوری از نوع $\{n_1, ..., n_r\}$ است اگر بتوان آن را به صورت حاصلضرب دورهای مجزا با طول‌های $n_r, ..., n_1$ نوشت که در آن $n_1 \leqslant n_2 \leqslant ... \leqslant n_r$.

قضیه ۸.۱. فرض می‌کنیم $x \in S_n$، در این صورت رده‌ی مزدوجی x در S_n متشکل از همه‌ی جایگشت‌هایی از S_n است که تجزیه‌ی دوری آن‌ها با نوع تجزیه دوری x یکی است.

برهان. جایگشت دلخواه $x \in S_n$ را در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم،

$$x = (a_1\ \cdots\ a_{k_1})(b_1\ \cdots\ b_{k_2}) \cdots (c_1\ \cdots\ c_{k_s})$$

که حاصلضرب دورهای مجزا است و $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$. بنا به گزاره‌ی قبل به ازای $g \in S_n$ داریم:

$$\begin{aligned} gxg^{-1} &= g(a_1\ \cdots\ a_{k_1})g^{-1}g(b_1\ \cdots\ b_{k_2})g^{-1} \cdots g(c_1\ \cdots\ c_{k_s})g^{-1} \\ &= \big(g(a_1)\ \cdots\ g(a_{k_1})\big)\big(g(b_1)\ \cdots\ g(b_{k_2})\big) \cdots \big(g(c_1)\ \cdots\ g(c_{k_s})\big) \qquad (*) \end{aligned}$$

$(k_1\ \cdots\ k_s)$ را تجزیه‌ی دوری x می‌نامیم و توجه داریم که x و gxg^{-1} دارای تجزیه‌ی دوری یکسانی هستند. از طرف دیگر اگر x و y دو جایگشت دلخواه با تجزیه‌ی دوری یکسان باشند، یعنی

$$x = (a_1\ \cdots\ a_{k_1}) \cdots (c_1\ \cdots\ c_{k_s})$$

$$y = (a'_1\ \cdots\ a'_{k_1}) \cdots (c'_1\ \cdots\ c'_{k_s})$$

(که حاصل ضرب‌های فوق حاصل ضرب دورهای مجزا هستند) آن‌گاه جایگشتی چون $g \in S_n$ وجود دارد به طوری که تحت آن $a_1 \longrightarrow a'_1 ... c_{k_s} \longrightarrow c'_{k_s}$ و لذا بنا به $(*)$، $gxg^{-1} = y$ و حکم ثابت می‌شود. □

مثال ۹.۱. رده‌های مزدوجی گروه متقارن S_3 عبارتند از: (1) با تجزیه‌ی دوری $\{1\}$، $\{(12), (13), (23)\}$ با تجزیه‌ی دوری (2) و $\{(123), (132)\}$ با تجزیه‌ی دوری (3).

مثال ۱۰.۱. در این مثال به بررسی رده‌های مزدوجی گروه $G = S_4$ می‌پردازیم.

برهان. در S_4 پنج رده‌ی مزدوجی وجود دارد که نماینده‌های آن‌ها عبارتند از:

$$1, (12), (123), (12)(34), (1234).$$

برای یافتن اندازه‌ی رده‌های مزدوجی کافی است تعداد دورهای به طول ۲ و ۳ و غیره را بیابیم. تعداد دورهای به طول ۲ برابر است با $6 = \binom{4}{2}$. تعداد دورهای به طول ۳ برابر است با 2×4، زیرا تعداد نقطه‌های ثابت جایگشت‌های دوری به طول ۳ برابر ۴ است و ۲ جایگشت دوری به طول ۳ وجود دارد که نقطه‌ی مفروضی را ثابت نگه می‌دارند. به همین نحو نتیجه می‌گیریم که ۳ عنصر با تجزیه‌ی دوری $(2, 2)$ و شش دور به طول ۴ وجود دارد. بنابراین برای گروه S_4، نماینده‌ی رده‌های مزدوجی، اندازه‌ی رده‌های مزدوجی و مرتبه‌ی مرکزسازها عبارتند از:

نماینده‌ی رده (g)	۱	(۱۲)	(۱۲۳)	(۳۴)(۱۲)	(۱۲۳۴)
$\lvert g^G \rvert$	۱	۶	۸	۳	۶
$\lvert C_G(g) \rvert$	۲۴	۴	۳	۸	۴

□

گزاره ۱۱.۱. فرض کنیم $x \in A_n$ و $x \neq 1$.

۱) اگر ضرب x در جایگشتی فرد از S_n تعویض پذیر باشد آن‌گاه $x^{S_n} = x^{A_n}$.

۲) اگر هیچ جایگشت فردی در S_n وجود نداشته باشد که ضرب آن در x تعویض پذیر باشد آن‌گاه x^{S_n} به دو رده‌ی مزدوجی A_n با اندازه‌های مساوی و نماینده‌های x و $(۱۲)^{-۱}x(۱۲)$ تجزیه می‌شود.

برهان.به قضیه ۱۲.۱۷ از مرجع [۸] رجوع کنید. □

مثال ۱۲.۱. در این مثال به بررسی رده‌های مزدوجی گروه $G = A_۴$ می‌پردازیم.

برهان.عناصر $A_۴$ عبارتند از عضو همانی و همه‌ی جایگشت‌هایی که تجزیه‌ی دوریشان $(۲, ۲)$ یا (۳) است. چون ضرب $(۱۲)(۳۴)$ در جایگشت فرد (۱۲) تعویض پذیر است، از گزاره‌ی قبل نتیجه می‌شود:

$$(۱۲)(۳۴)^{A_۴} = (۱۲)(۳۴)^{S_۴} = \{(۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)\}.$$

اما هیچ جایگشت فردی وجود ندارد که ضربش در جایگشت (۱۲۳) تعویض پذیر باشد لذا بنا به گزاره‌ی قبل $(۱۲۳)^{S_۴}$ به دو رده‌ی مزدوجی $A_۴$ تجزیه می شود که اندازه‌ی هر کدام از آن‌ها ۴ است و نماینده‌های آن ها عبارتند از (۱۲۳) و (۱۳۲).

بنابراین رده‌های مزدوجی $A_۴$ عبارتند از:

نماینده‌ی رده (g)	۱	$(۱۲)(۳۴)$	(۱۲۳)	(۱۳۲)
$\|g^G\|$	۱	۳	۴	۴
$\|C_G(g)\|$	۱۲	۴	۳	۳

□

مثال ۱۳.۱. در این مثال رده‌های مزدوجی گروه $Q_{۲^n}$ را پیدا می‌کنیم.

برهان.فرض کنیم G گروه $Q_{۲^n}$، یعنی کواترنیون تعمیم یافته مرتبه‌ی ۲^n $(n \geq ۳)$ باشد. در این صورت:

$$G = \langle a, b\ ;\ a^{۲^{n-۱}} = ۱, a^{۲^{n-۲}} = b^۲\ ,\ b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle.$$

فرض می‌کنیم $۲m = ۲^{n-۱}$. چون $b^{-۱}a^m b = a^{-m} = a^m$، $C_G(a^m) = Q_{۲^n}$. بنابراین رده‌ی مزدوجی a^m در $Q_{۲^n}$ همان $\{a^m\}$ است. حال a^i $(۱ \leq i \leq m-۱)$، را در نظر می‌گیریم. چون $\langle a\rangle \subseteq C_G(a^i)$ پس $|G : C_G(a^i)| \leq |G : \langle a\rangle| = ۲$.

از طرفی $b^{-۱}a^ib=a^{-i}$ و لذا $\{a^i,a^{-i}\}\subseteq (a^i)^G$ و چون $a^i\neq a^{-i}$، $|(a^i)^G|\geq ۲$ و بنابراین $(a^i)^G=\{a^i,a^{-i}\}$. چون $b^{-۱}ab=a^{-۱}$، به ازای هر عدد صحیح j داریم:

$$a^jba^{-j}=a^{۲j}b,\ a^j(ab)a^{-j}=a^{۲j-۱}b.$$

بنابراین

$$b^G=\{a^{۲j}b;\ ۰\leq j\leq m-۱\},$$

$$(ab)^G=\{a^{۲j+۱}b;\ ۰\leq j\leq m-۱\}.$$

از این رو گروه $Q_{۲^n}$ دارای $m+۳$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{۱\},\{a^m\},\{a,a^{-۱}\},\cdots,\{a^{m-۱},a^{-m+۱}\}$$

$$.\{a^{۲j}b;\ ۰\leq j\leq m-۱\},\ \{a^{۲j+۱}b;\ ۰\leq j\leq m-۱\}$$

و بنابراین برهان کامل می‌شود. □

تعریف ۱.۱۴. فرض کنیم G یک گروه و $x,y\in G$، در این صورت عنصر $[x,y]=x^{-۱}y^{-۱}xy$ را جابجاگر y,x از وزن ۲ می‌نامیم. داریم:

$$[x,y]=x^{-۱}y^{-۱}xy=x^{-۱}x^y$$

و اگر $x_۱,\cdots,x_n\in G$ آن‌گاه

$$[x_۱,\cdots,x_n]=[[x_۱,\cdots,x_n],x_n]$$

جابجاگر از وزن n می‌باشد. همچنین برای زیرمجموعه‌های ناتهی H_i از G، زیرگروه‌های جابجاگر به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\big[H_۱,H_۲\big]=\big\langle[h_۱,h_۲];\ h_۱\in H_۱\ ,\ h_۲\in H_۲\big\rangle$$

$$\big[H_۱,H_۲,...,H_n\big]=\big[\ [H_۱,...,H_{n-۱}],H_n\ \big].$$

اگر A و B زیرگروه‌هایی از G باشند، زیرگروه $[A,B,B\cdots,B]$ را با $[A,_n B]$ نشان می‌دهیم.