



Isfahan University of Technology, Isfahan
Department of Civil Engineering

Semi-Analytical solution for static and forced vibration problems of laminated
beams through smooth fundamental functions method

دانشجو

Behrooz Shamsaei

استاد راهنما

Mojtaba. Azhari

A. R. Kabiri-Samani

چکیده

در این پایان نامه روش جدیدی مبتنی بر روش حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر اساس روش توابع پایه برای حل مسائل ارتعاش اجباری و استاتیک تیرها و صفحات لایه ای ارائه شده است که می توان تفاوت این روش با روش های متداول توابع پایه را در استفاده از توابع هموار در ارضاء معادلات حاکم و شرایط مرزی دانست. در روش ارائه شده در این پایان نامه از معادله تعادل به عنوان معادله حاکم بر رفتار سیستم استفاده شده است که موجب از بین رفتن خطاهای معمول در روش های مرسوم برای آنالیز رفتار تیر یا ورق می شود. برای دستیابی به دقت کافی در تعیین تنش و جابجایی موضعی در بین لایه ها، روابط همسازی به صورت دقیق ارضاء می شود که یکی از مزایای مهم روش پیشنهاد شده نسبت به روش های دیگر محسوب می گردد. همچنین در روش حاضر از تبدیل ویژه ای برای ارضاء شرایط مرزی استفاده شده است که ارضاء شرایط مرزی مختلف را برای مدل سازی مسائل متفاوت ممکن می سازد. فرضیات و روند حلی که در ادامه خواهد آمد ، روش ارائه شده را به یکی از دقیق ترین و کارآمدترین روش های حل در حیطه مسائل کامپوزیت ها و مسائل تیرها و صفحات لایه ای تبدیل کرده است.

برای بررسی دقت و کارآمدی روش پیشنهاد شده، سعی بر آن بوده است که در طی این پایان نامه نتایج به دست آمده با نتایج دیگر محققین در این زمینه مقایسه گردد، همچنین در صورت نیاز از حل های کلاسیک موجود در مقایسه نتایج استفاده شده است.

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه

کاربرد فراوان مواد کامپوزیتی در علوم هوا فضا و صنایع دریایی موجب توجه روزافزونی به این گونه مواد گردیده است. در نیمه دوم قرن گذشته نمونه‌های مختلفی از کامپوزیت‌ها ساخته و مورد استفاده قرار گرفته است که می‌توان به ساخته شدن نسل جدید ربات‌ها، هلیکوپترها و هواپیماهای نظامی و غیر نظامی از مواد کامپوزیتی اشاره نمود. استفاده فراگیر از مواد کامپوزیتی، علم کامپوزیت را از جمله علوم پایه در صنایع هوافضا قرار داده است. بنابر تعریف کامپوزیت‌ها، این مواد از لایه‌های مجزا به هم چسبیده تشکیل شده‌اند که این لایه‌ها می‌توانند هم جهت با یکدیگر یا در جهات مختلف نسبت به یکدیگر قرار گرفته باشند.

آنالیز تنش و جابجایی در کامپوزیت‌ها از جمله آنالیزهای پیچیده به حساب می‌آید که به خاطر رفتار منحصر به فرد مواد لایه‌ای، ساده‌سازی رفتار آن‌ها موجب به وجود آمدن خطا در آنالیز رفتار این مواد می‌شود. مثلاً "صرف نظر از تغییر شکل‌های برشی عرضی که در تئوری‌های کلاسیک لایه‌ای^۱ ارائه شده است، موجب به دست آمدن تغییر شکل‌های کم و فرکانس طبیعی زیاد در این گونه مواد می‌شود. به همین علت تئوری‌های تغییر شکل‌های برشی درجه اول^۲ [۱] یا درجات بالاتر^۳ [۲] برای تحلیل این مواد ارائه شده است که رفتار دقیق‌تری از مواد کامپوزیتی ارائه می‌دهند.

یکی از خصوصیات مهمی که باید در کامپوزیت‌ها در نظر گرفته شود، چسبندگی بین لایه‌ها می‌باشد. در همین خصوص دو مدل معروف برای تحلیل این گونه مواد ارائه شده است که به نام‌های تئوری تک لایه‌ای معادل^۴ و

^۱ Classical Laminated Theory (CLT)

^۲ First order Shear Deformation Theory (FSDT)

^۳ Higher order Shear Deformation Theory (HSDT)

^۴ Equivalent Single-Layer Theory (ESLT)

تئوری چند لایه‌ای^۱ معروف شده اند [۳]. در تئوری تک لایه‌ای معادل می توان تغییر شکل، فرکانس طبیعی و بار بحرانی تیر را با دقت کافی به دست آورد ولی این تئوری فاقد دقت لازم برای به دست آوردن تنش در بین لایه‌ها می باشد، به همین علت تئوری چند لایه‌ای گسترش پیدا نمود که لایه‌های تیر یا صفحه را به صورت لایه‌های مجزا در نظر می گیرد.

در این پایان‌نامه فرمول بندی روش حل، برای مسائل دو بعدی الاستیسیته ارائه گردیده است که به سادگی این روابط قابل گسترش برای مسائل سه بعدی نیز می‌باشند. در روش ارائه شده در این پایان‌نامه، لایه‌ها به صورت مجزا در نظر گرفته می شود و معادله تعادل که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت می باشد، به عنوان معادله حاکم بر رفتار جسم ارضاء می شود. هم چنین در روند حل، روابط هم‌سازی بین لایه‌ها به گونه‌ای ارائه شده است که پیوستگی کلیه تنش‌ها و جابجایی‌ها بین لایه‌ها به صورت دقیق ارضاء شود. در این روش، خطاهای ذکر شده در روش‌های قبلی از بین رفته و حل نیمه تحلیلی مناسبی برای حل مسائل دو بعدی الاستیسیته با شرایط مرزی مختلف ارائه می شود.

از جمله تکنیک‌های ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت، تکنیک استفاده از روش توابع پایه^۲ می‌باشد. این روش که در حقیقت یک روش بدون شبکه^۳ می باشد، بسیاری از مشکلات موجود روش‌هایی چون روش المان‌های محدود مانند تولید شبکه مناسب را برطرف می سازد. از این رو در این پایان‌نامه، جواب همگن معادله تعادل به صورت یک سری متشکل از ترکیبی از توابع نمایی بیان می گردد. آن چه روش مورد استفاده در پایان‌نامه حاضر را از روش‌های متداول توابع پایه متمایز می سازد، استفاده از توابع هموار در بیان جواب‌ها و هم چنین نحوه برآورد ضرایب ثابت در سری جواب می‌باشد که در آن از تبدیلی ویژه برای محاسبه این ضرایب استفاده می گردد. این تبدیل برای اولین بار در مرجع [۴] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت به روش المان‌های محدود معرفی گردید. با استفاده از این تبدیل، محاسبه ضرایب در سری جواب تنها بر اساس ارضاء شرایط مرزی در گروهی از نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز ناحیه انجام می گیرد. هم چنین لازم به ذکر است که در این روش از توابع نمایی به عنوان توابع هموار پایه استفاده گردیده است که متفاوت با توابع منفرد مورد استفاده در حل مسائل المانهای مرزی در دیگر روش‌های توابع پایه می‌باشد.

^۱ Layer-Wise Theory (LWT)

^۲ Method of fundamental solutions

^۳ Meshless methods

۲-۱ پیشینه علمی مسأله

کارهای انجام شده در زمینه حل تیرها و صفحات لایه‌ای بر مبنای تئوری‌های موجود در این زمینه می‌باشد. لذا در ادامه به بحث و بررسی مختصری پیرامون مهم‌ترین تئوری‌های موجود در زمینه تیرها و صفحات می‌پردازیم. در قسمت اول مقدمه‌ای بر تئوری‌های موجود بیان می‌شود. در قسمت دوم و سوم تحقیقات انجام شده توسط محققان به ترتیب در زمینه حل مسائل استاتیکی و دینامیکی تیرها، و در قسمت چهارم مقدمه‌ای بر تاریخچه روش توابع پایه ارائه می‌گردد.

۱-۲-۱ مقدمه‌ای بر تئوری‌های موجود

روش‌های حل کارآمد در زمینه تیرها و صفحات لایه‌ای، روش‌هایی هستند که دو مسئله مهم را در تیرها و صفحات لایه‌ای پوشش دهند. این دو مسئله عبارتند از:

الف) ناهمسانی صفحه‌ای^۱

ب) ناهمسانی عرضی^۲

که بنابر تعاریف موجود در مرجع [۳] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

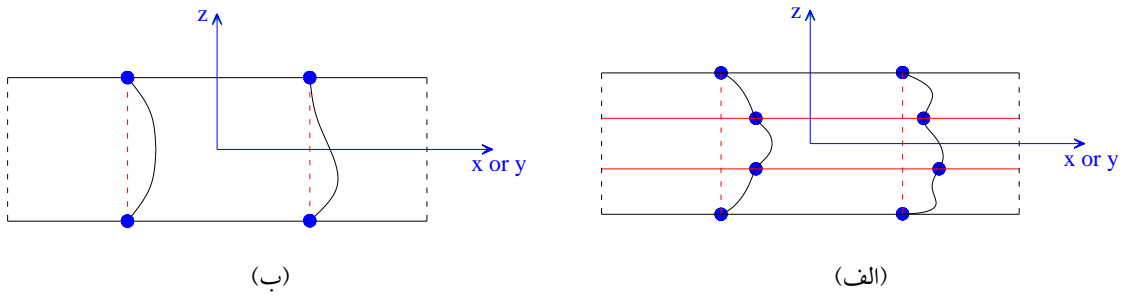
الف) ناهمسانی صفحه‌ای:

در حالتی که تیرها و صفحات لایه‌ای از لایه‌های ارتوتروپیک تشکیل شده باشند در آنالیز رفتار این مواد، ناهمسانی صفحه‌ای پدید می‌آید. علت این پدیده، وجود خصوصیات فیزیکی - مکانیکی متفاوت در بین لایه‌ها می‌باشد که موجب می‌شود ماده نسبت به مواد ایزوتروپیک تغییر شکل برشی از درجه بالاتر از خود نشان دهد. به همین دلیل معمولاً به سازه‌های ساخته شده از مواد لایه‌ای، سازه‌های با تغییر شکل عرضی زیاد^۳ اطلاق می‌شود. به عنوان مثال مواد کامپوزیتی پیشرفته‌ای که هم اکنون در صنایع هوافضا کاربرد دارند و دارای مدول یانگ متفاوت در جهات مختلف و مدول برشی کم می‌باشند، رفتار برشی پیچیده‌تری را نسبت به مواد ایزوتروپیک از خود نشان می‌دهند. علت عمده این پدیده، اثرگذاری همزمان کرنش‌های عمودی و برشی در میدان جابجایی می‌باشد که موجب به وجود آمدن مشکلات فراوانی در حل مواد لایه‌ای ارتوتروپیک می‌شود.

^۱ In-plane Anisotropy (IA)

^۲ Transverse Anisotropy (TA)

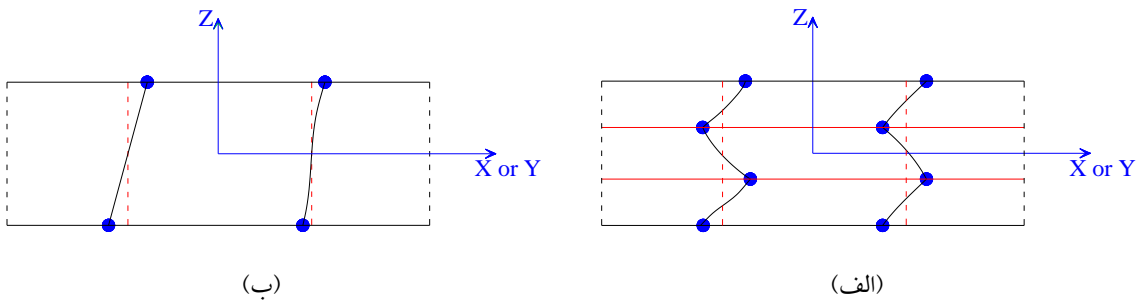
^۳ High Transversely Deformable (HTD)



شکل ۱-۱ بررسی ناهمسانی صفحه ای و تغییرات برش در ضخامت تیر (الف): تیر چند لایه ارتوتروپیک: برش رفتار پیچیده ای دارد (ب): تیر تک لایه ای: برش رفتار ساده تری نسبت به مواد ارتوتروپیک دارد

(ب) ناهمسانی عرضی:

ناهمسانی عرضی یا اثرات زیگزاگ^۱ در هنگامی که جنس لایه ها متفاوت باشد اتفاق می افتد که در این حالت خصوصیات متفاوت موجود در لایه ها باعث به وجود آمدن تغییرات شدید در جهت شیب جابجایی در راستای ضخامت ماده می گردد. به همین دلیل به این گونه مواد، مواد ناهمسان عرضی^۲ اطلاق می شود.



شکل ۱-۲ بررسی ناهمسانی عرضی و اثرات زیگزاگ در مقایسه تغییرات جابجایی در ضخامت تیر (الف): تیر چند لایه ارتوتروپیک (ب): تیر تک لایه ای

تنش های داخل صفحه ای $\sigma_p = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ در مواد لایه ای می تواند غیر پیوسته باشد ولی این در صورتی است که بنابر روابط پیوستگی تنش های برشی بین صفحه های $\sigma_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ باید پیوسته باشد که به این پدیده، پیوستگی بین لایه ای^۳ می گویند. برای درک بهتر میدان تنش و روابط پیوستگی بین آن ها، شکل ۱-۳ ارائه شده است. این روابط پیوستگی جابجایی و تنش در بین لایه ها، به نام پیوستگی C^0 در راستای Z معروف شده

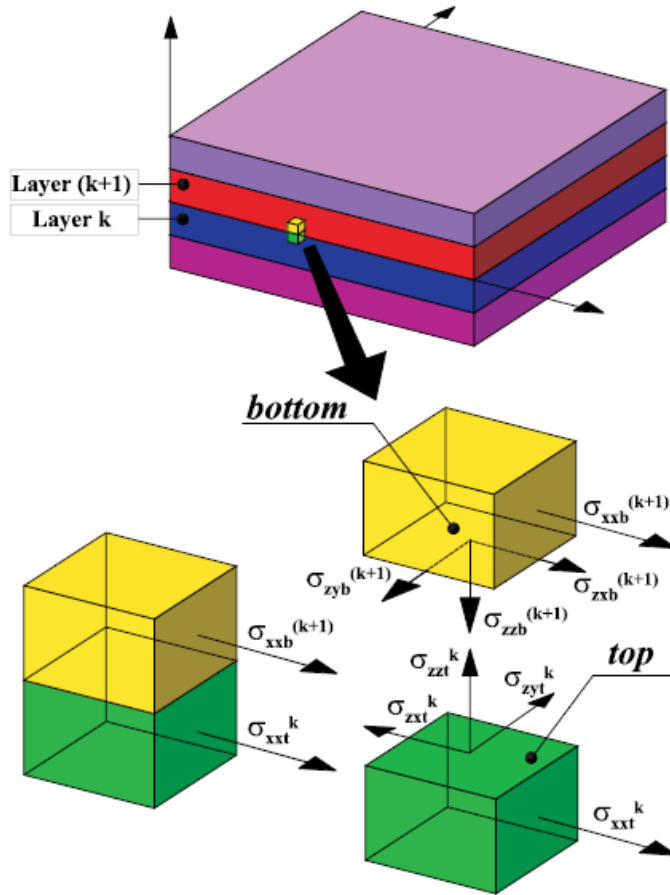
^۱ Zig-Zag effects

^۲ Transversely Anisotropic Materials (TAM)

^۳ Interlaminar Continuity (IC)

^۴ -requirements C_z^0

است که بنابر مطالب ارائه شده در مرجع [۵] دستیابی به یک تئوری مناسب برای حل مسائل تیرها و صفحات لایه‌ای بدون ارضاء رابطه C_z^0 امکان‌پذیر نمی‌باشد.



شکل ۳-۱ نمایش مؤلفه های تنش داخل صفحه و بین صفحه ای [۳]

این دو پدیده خاص در مواد لایه‌ای نقش عمده‌ای را در به وجود آمدن تئوری‌های مربوط به صفحات و پوسته‌ها و روابط اجزاء محدود وابسته به این تئوری‌ها بازی می‌کنند. می‌توان تفاوت عمده این تئوری‌ها را در مدل‌سازی پیوستگی تنش و جابجایی در بین لایه‌ها و همچنین در مدل‌سازی میدان جابجایی در هر لایه دانست. قبل از پرداختن به تاریخچه کارهای انجام شده توسط محققین به عنوان مقدمه در قسمت (الف) به بررسی مختصر روش‌های مدل‌سازی پیوستگی بین لایه‌ها و در قسمت (ب) به بررسی میدان‌های مختلف جابجایی ارائه شده می‌پردازیم.

الف) برای حل مسئله مدل‌سازی پیوستگی بین لایه‌ها، دو مدل معروف به نام‌های تئوری تک لایه‌ای معادل و تئوری چند لایه‌ای معرفی شده است.

در تئوری چند لایه‌ای رابطه جابجایی هر لایه به صورت زیر است که در آن k معرف هر لایه می‌باشد.

$$f^k(x, y, z) = f_1^k(x, y) F_1^k(z) + \dots + f_n^k(x, y) F_n^k(z) \quad (1-1)$$

در این حالت معادلات حاکم در هر لایه جداگانه ارضاء می شود و تغییر مکان و تنش برشی یکسان به عنوان یک قید در سطح تماس لایه ها ارضاء می شود [۶].

در تئوری تک لایه ای، معادله زیر برای کل لایه ها ارضاء می شود.

$$f(x, y, z) = f_1(x, y) F_1(z) + \dots + f_n(x, y) F_n(z) \quad (2-1)$$

که بنا بر تعریف موجود در مرجع [۶] این تئوری با عنوان تئوری تک لایه ای معادل معرفی شده است.

(ب) از جمله تلاش های اولیه صورت گرفته در زمینه حل تیرها و ورق ها، حل صفحات نازک بر اساس تئوری کرشهف^۱ می باشد که به تئوری کلاسیک ورق^۲ نیز شهرت دارد. این تئوری بر اساس فرضیات زیر بنا شده است:

(۱) بردارهای مستقیم عمود بر صفحه x و y در صفحه میانی بعد از تغییر شکل نیز مستقیم و عمود بر صفحه باقی بمانند.

(۲) صفحات جانبی قابلیت تغییر طول ندارند ($\epsilon_{zz}=0$).

(۳) کرنش های برشی ϵ_{xz} و ϵ_{yz} قابل اغماض هستند و خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل ورق، همچنان مستقیم باقی می ماند.

بنابر این تئوری می توان میدان جابجایی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0 \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \\ w(x, y, z) &= -w_0(x, y) + w_0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

که در این رابطه u و v و w به عنوان مؤلفه های جابجایی شناخته می شوند و w_0 جابجایی نقطه ای در وسط صفحه را نشان می دهد.

همان گونه که در فرضیات کرشهف بیان شد، تئوری کلاسیک ورق قادر به بیان کردن میزان کرنش برشی عرضی یا تنش برشی عرضی نمی باشد که این خود موجب به وجود آمدن نتایج نادرست در تحلیل صفحات ضخیم می شد و استفاده از این تئوری را در حد تحلیل صفحات نازک محدود نمود.

پس از این مرحله محققان سعی بر حل صفحات ضخیم را آغاز نموده اند که بنای آن بر اساس فرضیه ریسنر-میندلین^۳ می باشد. این فرضیه موجب به وجود آمدن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شد. در این فرضیه محدودیت

¹ Kirchoff's hypothesis

² Classical Plate Theory (CPT)

³ Reissner-Mindlin's hypothesis

موجود در تئوری کلاسیک ورق اصلاح شده است و فرض بر این است که صفحات عمود بر صفحه میانی، چرخش‌های مستقل ϕ_x و ϕ_y را در راستای محورهای x و y تجربه می‌کنند.

می‌توان میدان جابجایی را در این تئوری به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\phi_x(x, y) + u_0 \\ v(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) + v_0 \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

که در آن ϕ_x و ϕ_y به ترتیب چرخش بردار نرمال حول محورهای y و x می‌باشند.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول موجب حصول تنش برشی ثابت در ضخامت صفحه می‌شود که با جواب معادله تعادل که این تنش‌ها را به صورت توابع درجه دو معرفی می‌کند در تضاد می‌باشد. این نقص در این تئوری با فرض نمودن ضرایب اصلاحی برای تنش از بین رفته است.

پس از این تئوری، تئوری‌های مرتبه بالاتر صفحه توسعه پیدا کرد که می‌توان به تئوری‌های مرتبه دو و سه اشاره نمود. در این تئوری‌ها برای بیان دقیق‌تر تغییر مکان، از چند جمله‌ای‌هایی با درجات بالاتر استفاده شده است.

میدان جابجایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم که توسط ردی پیشنهاد شده است به صورت زیر می‌باشد [۶].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\phi_x(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + u_0 \\ v(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + v_0 \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_0 \end{aligned} \quad (5-1)$$

پس از گسترش روابط مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مراتب بالاتر، محققین زیادی روابط اجزاء محدود را بر اساس این تئوری‌ها گسترش دادند که ثمره آن به وجود آمدن المان‌هایی بود که روابط مربوط به این تئوری‌ها را ارضاء می‌نمودند. هر چند این المان‌ها بسیار کارآمد بودند ولی هنوز مشکلاتی در آن‌ها وجود داشت. از جمله مشکلاتی که این دسته از المان‌ها با آن مواجه بودند می‌توان به قفل برشی^۱، به وجود آمدن مدهای ناصحیح^۲ در حل المان‌ها و مشکلاتی در به دست آوردن تنش در آن‌ها اشاره نمود که همین موضوع محققان را بر آن داشت که از فرمولاسیون جدیدتری استفاده نمایند که در آن‌ها مشکلات نامبرده شده نیز حل شده باشند.

¹ Shear Locking

² Spurious modes

۲-۲-۱ تاریخچه حل مسائل استاتیک تیرها و صفحات لایه‌ای

تکنیک‌های مختلفی برای حل تیرها و صفحات لایه‌ای بر پایه تئوری تک لایه‌ای معادل ارائه شده است که می‌توان آن‌ها را به روش‌های بر پایه تئوری کلاسیک ورق [۷-۹]، تئوری تغییر شکل برشی درجه اول [۱۰-۱۲] و تئوری تغییر شکل برشی درجات بالاتر تفکیک نمود.

همان‌گونه که در قسمت قبل توضیح داده شد، در میان این نظریه‌ها، روش‌های بر پایه تغییر شکل برشی درجات بالاتر مورد توجه بیشتری قرار دارند که تعداد زیادی از این روش‌ها توسط لو و همکاران [۱۳]، ردی [۱۴] و کانت و پاندا [۱۵] برای آنالیز صفحات کامپوزیتی ارائه شده است ولی این نظریه‌ها فاقد جواب‌های منطقی برای به دست آوردن تنش در بین لایه‌ها بودند. این مسئله موجب شد که با تلاش‌های رولفز و همکاران [۱۶]، نور و همکاران [۱۷]، ردی [۶] و لو و همکاران [۱۸] با استفاده از تئوری جدید تک لایه‌ای معادل درجه بالاتر و با ارضاء معادلات تعادل، جواب‌های دقیق‌تری به دست آید. با وجود این که روش‌های یاد شده موجب به دست آمدن حل‌های دقیق‌تری می‌گردند، استفاده از این روش‌ها در حل مسائلی که دارای هندسه و بارگذاری پیچیده هستند، نیازمند صرف زمان و هزینه فراوانی است.

از معادلات الاستیسیته می‌توان چنین نتیجه گرفت که ارضاء پیوستگی تنش‌های عمودی و برشی و همچنین یکسان بودن تغییر مکان در بین لایه‌ها، از ملزومات دست‌یابی به حل مناسب می‌باشد [۱۹-۲۱]. به همین دلیل روش‌های مختلفی بر پایه تئوری چند لایه‌ای از طرف ردی [۲۲]، سلداتو [۲۳]، وو و کو [۲۴]، کاررا و دماسی [۲۷-۲۵] و دیگران ارائه گردیده است که جواب‌های قابل قبولی را برای تغییر مکان و تنش‌های ناشی از خمش ارائه می‌دهند ولی مشکل اصلی این روش‌ها نیز در ارضاء نشدن پیوستگی تنش‌های برشی در بین لایه‌ها می‌باشد.

برای رفع این مشکل، کلاس جدیدی از تئوری زیگزاگ^۱ در زمینه تیرها و صفحات لایه‌ای ارائه شد. با توجه به مطالب ارائه شده در مرجع [۲۸]، تئوری زیگزاگ ابتدا در سال ۱۹۳۵ توسط لخنیتسکی بر اساس روابط الاستیسیته ارائه شد [۲۹] و آمبارتسومیان [۳۰] تئوری زیگزاگ را بر اساس تئوری ریسنر-میندلین برای صفحات ارتوتروپیک توسعه داد. دی سیووا نیز روش خود را بر اساس تئوری زیگزاگ و تئوری تغییر شکل برشی درجه اول بیان نمود. این روش که تعداد درجات آزادی در آن مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد روشی کارآمد محسوب می‌شود [۳۱ و ۳۲]. وی همچنین تئوری خود را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجات بالاتر نیز گسترش داد. از جمله محققین دیگر در این زمینه می‌توان به آوریل اشاره نمود که فرم گسترده تئوری زیگزاگ را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجه

¹ Zig-Zag theories (ZZTs)

بالتر ارائه نمود [۳۳]. پس از آن مدل سه بعدی روش زیگزاگ توسط پانتانو و آوریل ارائه شد [۳۴] و سپس مدل لایه‌ای تئوری زیگزاگ با پیوستگی تنش برشی عرضی برای اولین بار توسط آمبراتسومیان ارائه گردید [۳۵].

از جمله روش‌های قابل ذکر دیگر روش اجزاء محدود تنش هیبرید^۱ می‌باشد که برای اولین بار توسط ماو و همکاران ارائه شد. در این نظریه میدان تنش مستقل از میدان جابجایی در نظر گرفته می‌شود. این موضوع خود موجب ارضاء نشدن روابط اساسی الاستیسیته می‌گردد [۳۶]. محققان دیگری نیز در این زمینه به فعالیت پرداخته‌اند که می‌توان نظریه ارائه شده توسط دزایی و رامتکار که بر پایه ارضاء روابط الاستیسیته بنا شده است را روش کارآمدی در این زمینه قلمداد نمود [۳۷].

در قسمت قبل خلاصه‌ای از مهم‌ترین فعالیت‌های صورت گرفته در زمینه حل تیرها و صفحات لایه‌ای ارائه گردید و همان‌طور که بیان شد، روش‌های متفاوتی برای حل مسائل تیرها و صفحات لایه‌ای وجود دارد که خود نشانگر اهمیت و کاربرد فراوان این مواد می‌باشد.

۱-۲-۳ تاریخچه حل مسائل ارتعاش اجباری تیرها و صفحات لایه‌ای

در مقایسه با کارهای انجام شده برای حل مسأله استاتیک تیرها و صفحات لایه‌ای، فعالیت‌های صورت گرفته برای حل مسأله ارتعاش این مواد ناچیز می‌باشد. از طرف دیگر، در صورتی که به بررسی تاریخچه حل مسأله ارتعاش این مواد بپردازیم، در می‌یابیم که مسأله ارتعاش آزاد^۲ صفحات لایه‌ای در توجه بیشتری در مقایسه با مسأله ارتعاش اجباری^۳ این گونه مواد قرار دارد. همان‌طور که قبلاً بیان شد، مواد کامپوزیتی کاربرد زیادی در صنعت هوافضا دارند و وجود بارهای دینامیکی فراوان در این صنعت، اهمیت بررسی مسأله ارتعاش اجباری این مواد را دوچندان می‌کند.

ساده‌ترین روش بررسی معادلات حرکت تیرها و صفحات، روش آنالیز مودال^۴ می‌باشد که بیشتر محققین نیز روش‌های خود را بر پایه این نظریه بنا نهاده‌اند [۳۸ و ۳۹]. میلر و آدامز در سال ۱۹۷۵، بر اساس این روش و تئوری تغییر شکل برشی درجه اول، روشی برای یافتن فرکانس‌های طبیعی تیر طره ارائه نمود [۴۰]. بانرجی در سال ۲۰۰۱، در روشی مشابه و با در نظر گرفتن اثرات پیچش، روشی برای حل تیرهای طره ارائه نمود [۳۸ و ۳۹]. دانگ و همکاران، این روش را برای حل تیرهای طره پله‌ای گسترش داد [۴۱] و آبرامویچ با استفاده از این روش، مسأله ارتعاش تیرهای طره لایه‌ای را تحت بارهای گرانشی مورد بررسی قرار داد [۴۲].

¹ Hybrid-stress FE method

² Free vibration analysis

³ Forced vibration analysis

⁴ Modal analysis

روش آنالیز مودال در حالتی که تیرها یا صفحات دارای لایه‌های مختلف با سختی‌های متفاوت باشند و یا شرایط مرزی از حالت ساده به پیچیده تبدیل گردد، فاقد جواب‌های رضایتبخش می‌باشد. سابرامانیان و گرگ در سال ۱۹۹۷ با استفاده از روش ماتریس انتقال^۱ توانستند بر این مشکل فائق آیند و مسأله تیر با شرایط مرزی مختلف را حل نمایند [۴۳]. پس از آن‌ها بیلدیریم و کیرال نیز با استفاده از این روش، مسأله ارتعاش آزاد خارج از صفحه تیرهای لایه‌ای متقارن را حل نمودند [۴۴].

از جمله روش‌های دیگر محاسبه جابجایی و دوران تیرهای در معرض بارهای دینامیکی، روش توابع تأثیر خمش^۲ می‌باشد. بر خلاف روش آنالیز مودال، در این روش نیازی به محاسبه فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاش نمی‌باشد. روش توابع تأثیر خمش مستقل از شرایط مرزی بوده و استفاده از این روش برای آنالیز مواد نامتقارن بیشتر از روش آنالیز مودال می‌باشد. محققان زیادی با استفاده از این روش مسأله ارتعاش آزاد تیر اولر-برنولی^۳ را حل نموده‌اند که می‌توان به پنی [۴۵] و فرناندز و ناوارو در سال ۲۰۰۲ اشاره نمود [۴۶]. اصول این روش بر پایه فرضیه کرشهف و هم‌چنین بر پایه تئوری تغییر شکل برشی درجه اول یا درجات بالاتر بنا شده است که خود نشانگر ضعف این روش در حل تیرهای ضخیم می‌باشد.

همان‌گونه که توضیح داده شد، کلیه روش‌های موجود برای آنالیز ارتعاش اجباری تیرها و صفحات لایه‌ای دارای مشکلات زیادی در آنالیز تیرها و صفحات ضخیم با شرایط مرزی مختلف بوده که خود نشانگر لزوم انجام تحقیقات بیشتر در این زمینه می‌باشد.

۴-۲-۱ تاریخچه روش توابع پایه

بر اساس مطالب ارائه شده در مرجع [۴۷]، روش توابع پایه که نوعی روش مرزی غیرمستقیم^۴ محسوب می‌گردد، اولین بار در اواسط دهه ۶۰ میلادی توسط دو محقق روس، الکسیدزه و کوپرادزه معرفی گردید. این در حالی است که فرمول‌بندی کامل این روش برای اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط میتون و جانسون ارائه شد. ایده اصلی در این روش تقریب جواب معادله دیفرانسیل با ترکیب خطی توابع صدق‌کننده در آن به صورت یک سری می‌باشد. به این ترتیب، با صدق کردن کلیه جملات سری جواب در معادله دیفرانسیل حاکم، حل مسأله اولیه به صورت برآورد ضرایب ثابت در سری جواب به گونه‌ای که شرایط مرزی ارضاء گردند کاهش می‌یابد. از جمله مهم‌ترین

^۱ Transfer matrix method

^۲ Flexibility influence function method

^۳ Euler-Bernoulli beam

^۴ Indirect boundary method

نقاط قوت در این روش، دستیابی به دقت مناسب با استفاده از تعداد نسبتاً کمی نقطه برای مدل‌سازی مسأله می‌باشد. از سوی دیگر، از آنجا که در این روش نیازی به شبکه‌بندی ناحیه حل و یا انتگرال‌گیری نمی‌باشد، کاربرد آن در مقایسه با روش‌هایی چون روش المان‌های محدود و روش المان‌های مرزی آسان‌تر است.

بر اساس مقالات موجود، بیشترین مسائل مورد توجه با استفاده از روش توابع پایه مسائل مقادیر مرزی بیضوی^۱ بوده است. از جمله تحقیقات صورت گرفته در سال‌های اخیر بر پایه این روش می‌توان به مقاله فیرودر و کاراجورجیس در سال ۱۹۹۸ اشاره نمود [۴۷]. در این مقاله استفاده از روش توابع پایه برای حل گروهی از مسائل مقادیر مرزی بیضوی مورد بررسی قرار گرفته است. ضمن آنکه در این مقاله بررسی گسترده‌ای بر روی روش توابع پایه و روش‌های مشابه در طول سه دهه گذشته صورت گرفته است. در مرجع [۴۸] نیز روشی همسان برای حل مسائلی با اپراتورهای مختلف از جمله معادله اصلاح شده هلمهولتز و اپراتور بای‌هارمونیک^۲ توسط بگومونلی ارائه شده است.

حل مسائل الاستیسیته با استفاده از روش توابع پایه از دیگر مسائلی است که به طور ویژه مورد توجه قرار گرفته است. از جمله تحقیقات ارائه شده در این زمینه می‌توان به مقاله پولیکاس و همکاران در سال ۲۰۰۲ اشاره نمود [۴۹]. در این مقاله از توابع پایه چند جمله‌ای برای حل مسائل سه‌بعدی الاستیسیته بر روی محیط‌های ایزوتروپیک استفاده شده است. از جمله مزایای این روش انعطاف‌پذیری آن در حل مسائل بر روی ناحیه‌هایی با اشکال مختلف در دستگاه مختصات کارتزین می‌باشد.

برگر و کاراجورجیس در سال ۲۰۰۱ روش توابع پایه را برای حل مسائل دو بعدی الاستیسیته در حالت ایزوتروپیک و غیرایزوتروپیک تک‌جنسی و دو جنسی به کار گرفتند [۵۰]. در این مقاله تجزیه ناحیه حل برای مواد دو جنسی به گونه‌ای است که در آن سطح مشترک میان دو ناحیه مانند روش مورد استفاده برای شرایط مرزی تقریب زده می‌شود. در این روش، هر ناحیه به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته و سپس با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی و نیروهای سطحی در مرز مشترک میان دو ناحیه ارتباط میان دو قسمت برقرار می‌گردد.

۱-۳ روش حل و محتوای فصول آینده

در تحقیق حاضر حل معادلات دیفرانسیل ارتعاش اجباری و الاستیسیته تیرهای لایه‌ای با روشی مشابه با روش توابع پایه مورد بررسی قرار گرفته است. در کلیه مسائل مورد بررسی از توابع پایه نمایی^۳ به عنوان حل پایه معادلات

^۱ Elliptic boundary value problems

^۲ Biharmonic operators

^۳ Exponential functions

استفاده شده است. هر چند در برخی مسائل، به منظور کامل شدن مجموعه جواب‌های پایه معادله لازم است از ترم‌های چند جمله‌ای نیز در ترکیب با توابع پایه نمایی استفاده شود. لازم به ذکر است که در این مبحث، منظور از توابع پایه، توابع پایه نمایی بوده و متفاوت با توابع منفرد مورد استفاده در حل مسائل المان‌های مرزی می‌باشد و با عنوان توابع گرین هموار نیز شناخته می‌شوند که از این پس تنها با نام توابع پایه نمایی به آنها اشاره خواهد شد.

در روش ارائه شده در این تحقیق، محاسبه جواب همگن معادلات مورد بررسی، به صورت یک سری متشکل از ترکیب خطی توابع پایه نمایی (و یا ترکیبی از توابع پایه نمایی و توابع چندجمله‌ای) بیان می‌گردد. آنچه روش حاضر را از روش‌های متداول توابع پایه متمایز می‌سازد، نوع توابع پایه بوده که در این روش از توابع پایه نمایی استفاده شده، هم‌چنین در روش حاضر نحوه برآورد ضرایب ثابت در سری جواب با روش‌های دیگر توابع پایه متفاوت می‌باشد. در روش‌های متداول توابع پایه، با استفاده از یک سری نقاط مرجع^۱ در خارج از ناحیه حل، از روش‌هایی چون روش نقطه‌ای^۲ و یا روش حداقل مربعات^۳ برای محاسبه ضرایب ثابت استفاده شده است. در روش حاضر از تبدیلی ویژه برای محاسبه این ضرایب استفاده می‌گردد. این تبدیل برای اولین بار در مرجع [۴] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت به روش المان‌های محدود معرفی گردید. با استفاده از این تبدیل، محاسبه ضرایب در سری جواب تنها بر اساس ارضاء شرایط مرزی در گروهی از نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز ناحیه انجام می‌گیرد. با این وجود، استفاده از تبدیل اشاره شده در مقایسه با روش‌های متداولی چون روش نقطه‌ای و یا روش حداقل مربعات دارای مزایای ویژه‌ای است که در فصل دوم به طور کامل به آن پرداخته خواهد شد.

در مرجع [۵۱] از تبدیل اشاره شده جهت ارائه مدلی برای حل مسائل پی بر روی محیط‌های نیمه بی‌نهایت به روش اجزاء محدود و با استفاده از توابع گرین استفاده شده است. در این مقاله از تکنیکی جدید برای حل مسائل با شرایط مرزی مختلط استفاده شده است که بر مبنای یکی از روش‌های ارائه شده در تحقیق حاضر می‌باشد.

بر این اساس، در فصول دوم و سوم به ترتیب حل مسائل الاستیسیته تیرهای لایه ای ایزوتروپیک و حل مسائل ارتعاش اجباری این مواد با استفاده از روش توابع پایه مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل چهارم فرم گسترده روابط فصول دوم و سوم برای مواد ارتوتروپیک ارائه می‌گردد و در فصل پنجم کلیه روابط با ارائه مثال‌های متعدد مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

¹ Source points

² Collocation method

³ Least-square method

فصل دوم

حل تیرهای لایه‌ای تحت بارهای استاتیکی

۱-۲ مقدمه

در این فصل حل تیرهای لایه‌ای تحت بارهای استاتیکی مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا، حل معادله دیفرانسیل تعادل برای تیر یک لایه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور پاسخ این معادله همگن به صورت یک سری متشکل از توابع نمایی (توابع گرین) بیان می‌گردد و راه‌های مختلف به دست آوردن ضرایب این سری و ارضاء شرایط مرزی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، منابع خطای موجود در این حل و تمهیدات لازم برای به حداقل رساندن خطا به طور کامل مورد بررسی قرار خواهد گرفت و در انتهای فصل، روش حل تیرهای لایه‌ای با روشی مشابه روش ذکر شده برای تیرهای یک لایه بیان می‌گردد.

۲-۲ حل معادله تعادل تیر یک لایه

محاسبه مقادیر تنش و توزیع کرنش در محیط‌های پیوسته از جمله الزامات بسیاری از علوم مهندسی می‌باشد. حالت‌های خاص چنین مسائلی را می‌توان شامل مسائل دوبعدی تنش یا کرنش مستوی، مسائل خمش در ورق‌ها و پوسته‌ها و نیز مسائل الاستیسیته متقارن محوری دانست. در این میان، حل معادله حاکم بر مسائل الاستیسیته مستوی که از پرکاربردترین معادلات همزمان در علوم مهندسی محسوب می‌گردد از جمله مهمترین اهداف محققین بوده است. این معادله به صورت زیر بیان می‌گردد

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}) \mathbf{U} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1-2)$$

به طوری که در معادله فوق \mathbf{U} برابر با بردار جابجایی

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

و \mathbf{b} بردار نیروهای بدنه می‌باشد.

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (۳-۲)$$

و در این حالت اپراتور \mathbf{S} به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (۴-۲)$$

و ماتریس \mathbf{D} نیز ماتریس سختی در رابطه تنش-کرنش هوک می‌باشد که برای یک محیط همگن و ایزوتروپیک برابر است با

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \quad (۵-۲)$$

به این ترتیب، با توجه به روابط (۱-۲) تا (۵-۲) می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر مسائل الاستیسیته مستوی را به صورت زیر بسط داد

$$\begin{pmatrix} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & (D_2 + D_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ (D_2 + D_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & D_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (۶-۲)$$

بنابراین، حل معادله (۶-۲) کلید اساسی در آنالیز تنش و بررسی توزیع کرنش در محیط‌های پیوسته می‌باشد. در

ادامه، حل این معادله در حالت همگن مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳-۲ حل بخش همگن جواب در معادله الاستیسیته

همان‌گونه که بیان شد، در روش حاضر برای حل معادلات از روش توابع پایه استفاده می‌شود، به این منظور

جواب تقریبی معادله همگن به صورت سری زیر فرض می‌گردد

$$\hat{\mathbf{U}}_H = \sum \begin{Bmatrix} c_i \\ d_i \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (۷-۲)$$

در این حالت، برای محاسبه رابطه میان ضرایب α_i و β_i و نیز رابطه میان ضرایب ثابت (c_i و d_i) در سری فوق، با

قرار دادن $\hat{\mathbf{U}}_H$ در معادله (۶-۲) و با فرض $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} D_1 \alpha_i^2 + D_3 \beta_i^2 & (D_2 + D_3) \alpha_i \beta_i \\ (D_2 + D_3) \alpha_i \beta_i & D_3 \alpha_i^2 + D_1 \beta_i^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c_i \\ d_i \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} = \mathbf{0} \quad (۸-۲)$$

برای آنکه معادله فوق دارای جواب‌های غیر صفر برای ضرایب c_i و d_i باشد لازم است

$$\begin{vmatrix} D_1 \alpha_i^2 + D_3 \beta_i^2 & (D_2 + D_3) \alpha_i \beta_i \\ (D_2 + D_3) \alpha_i \beta_i & D_3 \alpha_i^2 + D_1 \beta_i^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۹-۲)$$

بنابراین با محاسبه دترمینان فوق، معادله مشخصه حاصل به صورت زیر به دست می‌آید

$$(D_1 \alpha_i^2 + D_3 \beta_i^2)(D_3 \alpha_i^2 + D_1 \beta_i^2) - (D_2 + D_3)^2 \alpha_i^2 \beta_i^2 = 0 \quad (۱۰-۲)$$

به این ترتیب، با حل معادله فوق رابطه میان ضرایب α_i و β_i به دست خواهد آمد. ضرایب c_i و d_i نیز باید به گونه‌ای انتخاب شوند که بردارهای ویژه معادله (۸-۲) باشند. در این صورت می‌توان سری $\hat{\mathbf{U}}_H$ را به شکل زیر بازنویسی نمود

$$\hat{\mathbf{U}}_H^* = \sum C_i^* \begin{Bmatrix} \lambda \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (۱۱-۲)$$

در رابطه فوق بردار $\{\lambda, 1\}^T$ ، بردار ویژه معادله (۸-۲) می‌باشد. حل معادله (۱۰-۲) و محاسبه بردارهای ویژه رابطه (۸-۲) مقادیر زیر را برای α_i ، β_i و λ به دست می‌دهد

$$\begin{cases} \alpha_i = \pm i \beta_i \rightarrow \lambda = \pm i \\ \beta_i = \pm i \alpha_i \rightarrow \lambda = \mp i \end{cases} \quad (۱۲-۲)$$

در رابطه بالا $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. در معادله (۱۰-۲) جواب‌ها به صورت تکراری ظاهر می‌شوند پس به همین علت رابطه (۷-۲) دارای دو جواب دیگر به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{\mathbf{U}}_H^{**} = \sum C_i^{**} \begin{Bmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (۱۳-۲)$$

مجدداً می‌توان با قرار دادن $\hat{\mathbf{U}}_H^{**}$ در معادله (۶-۲) و با فرض $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، رابطه میان ضرایب چند جمله‌ای در رابطه فوق را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{cases} \beta_i = -i \alpha_i \rightarrow \hat{\mathbf{U}}_H^{**} = \sum C_i^{**} \left(a \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} x + b \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} y + c \begin{Bmatrix} f(a,b,c) \\ 1 \end{Bmatrix} \right) e^{\alpha_i x - i \alpha_i y} \\ \beta_i = +i \alpha_i \rightarrow \hat{\mathbf{U}}_H^{**} = \sum C_i^{**} \left(a \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} x + b \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} y + c \begin{Bmatrix} g(a,b,c) \\ 1 \end{Bmatrix} \right) e^{\alpha_i x + i \alpha_i y} \end{cases} \quad (۱۴-۲)$$

با توجه به آنکه در رابطه فوق a ، b و c ضرایبی دلخواه می‌باشند، به ازای مقادیر مختلف این ضرایب بی‌نهایت دسته جواب برای رابطه (۲-۱۴) به دست می‌آید. با این وجود، به دلیل آنکه معادله مشخصه (۲-۱۰) معادله‌ای از درجه چهار می‌باشد، در نظر گرفتن تنها چهار دسته جواب مستقل از یکدیگر برای ساخت سری \hat{U}_H کفایت می‌کند. [۵۲] بنابراین، از آنجا که به ازای هر انتخاب برای ضرایب a ، b و c دو دسته جواب بر طبق معادله (۲-۱۴) وجود خواهد داشت، لازم است یک ترکیب مستقل خطی از ضرایب مذکور معرفی گردد. بررسی‌های صورت گرفته نشان می‌دهد انتخاب هر ترکیب مستقل خطی از ضرایب a ، b و c به گونه‌ای که مقادیر a و b در هر دو ترکیب به طور همزمان صفر نباشند، نتایج مطلوبی در محاسبه جواب همگن به همراه خواهد داشت. در حل حاضر از ترکیب زیر استفاده شده است

$$\{a = 0, b = 1, c = 1\} \quad (۲-۱۵)$$

ترکیب دوم را نیز می‌توان به عنوان بخش گمشده جواب‌ها در معادله (۳-۱۵) محسوب نمود.

مقادیر $f(a, b, c)$ و $g(a, b, c)$ در رابطه (۲-۱۴) و در حالتی که $b=c=1, a=0$ باشد برابرند با

$$\begin{cases} f(0,1,1) = \frac{i(-3 + \alpha_i + v + \alpha_i v)}{\alpha_i(1+v)} \\ g(0,1,1) = -\frac{i(-3 + \alpha_i + v + \alpha_i v)}{\alpha_i(1+v)} \end{cases} \quad (۲-۱۶) \text{ مسأله کرنش مستوی}$$

$$\begin{cases} f(0,1,1) = \frac{i(-3 + \alpha_i + 4v)}{\alpha_i} \\ g(0,1,1) = -\frac{i(-3 + \alpha_i + 4v)}{\alpha_i} \end{cases} \quad (۲-۱۷) \text{ مسأله تنش مستوی}$$

با توجه به چهار دسته جواب به دست آمده، می‌توان جواب معادله همگن را به صورت سری زیر فرض نمود

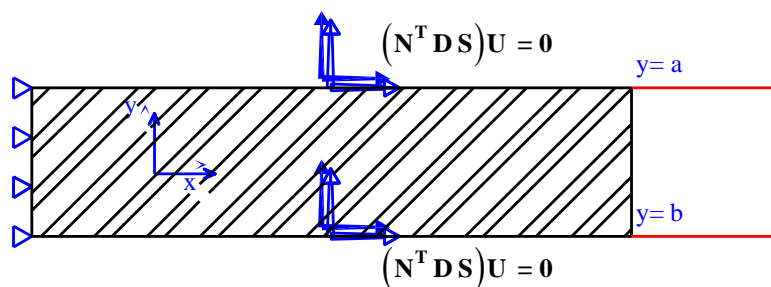
(۲-۱۸-الف) مسأله کرنش مستوی

$$\hat{U}_H = \sum_{i=1}^n C_i (\lambda_{i1} \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x - i \alpha_i y} + \lambda_{i2} \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + i \alpha_i y} + \lambda_{i3} \begin{Bmatrix} i x + \frac{i(-3 + \alpha_i + \nu + \alpha_i \nu)}{\alpha_i(1 + \nu)} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x - i \alpha_i y} + \lambda_{i4} \begin{Bmatrix} -i x + \frac{i(-3 + \alpha_i + \nu + \alpha_i \nu)}{\alpha_i(1 + \nu)} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + i \alpha_i y})$$

(۲-۱۸-ب) مسأله تنش مستوی

$$\hat{U}_H = \sum_{i=1}^n C_i (\lambda_{i1} \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x - i \alpha_i y} + \lambda_{i2} \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + i \alpha_i y} + \lambda_{i3} \begin{Bmatrix} i x + \frac{i(-3 + \alpha_i + 4\nu)}{\alpha_i} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x - i \alpha_i y} + \lambda_{i4} \begin{Bmatrix} -i x + \frac{i(-3 + \alpha_i + 4\nu)}{\alpha_i} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + i \alpha_i y})$$

برای تعیین متغیرهای α_i و ضرایب λ_{i1} تا λ_{i4} فرض می‌کنیم که تنش در بالا و پایین تیر برابر صفر باشد



شکل ۱-۲ تنش در بالا و پایین تیر

همان‌طور که در شکل ۱-۲ مشخص می‌باشد محل دستگاه مختصات تأثیری در حل مسأله نخواهد داشت. رابطه

نشان داده شده در شکل بالا رابطه تنش در راستای x و y بوده و منظور از $\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix}$ ، ماتریس

کسینوس‌های نرمال سطح تیر با محورهای مختصات می‌باشد. حل روابط نشان داده شده در شکل منجر به تشکیل

یک دستگاه معادلات 4×4 شده که می‌توان آنرا به صورت زیر نشان داد

$$e^{\alpha_i x} \begin{pmatrix} f_{11}(\alpha_i) & f_{12}(\alpha_i) & f_{13}(\alpha_i) & f_{14}(\alpha_i) \\ f_{21}(\alpha_i) & f_{22}(\alpha_i) & f_{23}(\alpha_i) & f_{24}(\alpha_i) \\ f_{31}(\alpha_i) & f_{32}(\alpha_i) & f_{33}(\alpha_i) & f_{34}(\alpha_i) \\ f_{41}(\alpha_i) & f_{42}(\alpha_i) & f_{43}(\alpha_i) & f_{44}(\alpha_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \lambda_{i3} \\ \lambda_{i4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (19-2)$$

همان گونه که رابطه (۱۹-۲) مشخص است، ماتریس اصلی فقط تابع α_i می باشد و ترم $e^{\alpha_i x}$ تأثیری در رابطه

(۱۹-۲) ندارد، پس می توان رابطه (۱۹-۲) را به فرم ساده شده زیر نیز نشان داد

$$(\mathbf{A}_i) \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \lambda_{i3} \\ \lambda_{i4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (20-2)$$

بنابراین می توان با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس \mathbf{A}_i ، α_i ها را که به صورت اعداد موهومی می باشند را به دست آورد و هم چنین ضرایب λ_{i1} تا λ_{i4} متناظر هر α_i ، برابر فضای پوچ^۱ ماتریس \mathbf{A}_i می باشند. با قرار دادن این ضرایب در روابط (۲-۱۸-الف و ب) موده های مورد نظر به دست می آیند. نکته مهم در این قسمت این است که ریشه های α_i با استفاده از روش های عددی معمول در حل معادلات به دست می آیند، از این رو در روش ارائه شده در این پایان نامه دقت محاسبات به گونه ای تعیین شده است که جواب های به دست آمده منطقی و رضایتبخش باشد.

نکته مهم در روند توضیح داده شده این است که دترمینان ماتریس \mathbf{A}_i دارای چهار ریشه صفر تکراری $\alpha = 0$ بوده که این نشانگر وجود ریشه هایی به صورت چند جمله ای حد اکثر تا درجه سه می باشد. برای مثال اگر فرض کنیم که این چند جمله ای به فرم زیر باشد

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3 \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 y^3 \end{cases} \quad (21-2)$$

و معادله تعادل و روابط تنش را در بالا و پایین تیر در مورد آن ارضاء کنیم، این چند جمله ای ها اگر دستگاه مختصات در مرکز تیر باشد، برای مسأله کرنش مستوی به صورت زیر می باشند

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x - b_1 y - \frac{1}{2} b_8 h^2 y + a_4 xy + \frac{1}{3} b_8 y^3 - \frac{1}{2v} b_8 h^2 y - \frac{1}{v} b_8 x^2 y + \frac{2}{3v} b_8 y^3 \\ b_0 + b_1 x - \frac{1}{2} a_4 x^2 + b_8 xy^2 + \frac{1}{3v} b_8 x^3 - a_1 v y - \frac{1}{2} a_4 v y^2 \end{cases} \quad (22-2)$$

در رابطه بالا h ضخامت تیر می باشد. بنابر رابطه (۲۲-۲)، سری جواب همگن دارای شش جمله به صورت زیر می باشد.

¹ Null space