بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکدهٔ علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض (جبر)

توسیعهای اُرحلقه‌های نوتری ژاکوبسن تعویض پذیر

رحمت درزی

استاد راهنما :
دکتر احمد موسوی

استاد مشاور :
دکتر دوستعلی مژده

آبان ۱۳۸۰

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعـضـای هیئـت داوران نـسخـهٔ نـهایی پایان نامه خـانم/ آقای رحمت درزی

تحت عنوان: **توسیعهای اُر حلقه‌های نوتری ژاکوبسن تعویض‌پذیر**

را از نظر فرم و محتوات بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر احمد موسوی	استادیار	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر دوست علی‌مژده	استادیار	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر محمد مهدوی‌هزاوه‌ای	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاّع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض ***است که در سال*** ۱۳۸۰ ***در دانشکدهٔ*** علوم پایه ***دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر*** [illegible] ***، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر*** [illegible] ***و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر*** ـــــــــ ***از آن دفاع شده است.»***

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب [illegible] دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: [illegible]

تاریخ و امضا: ۱۰/۱/۷

تقدیم به

روح پدر بزرگوارم و مادر دلسوز، فداکار و مهربانم که هر چه دارم از اوست.

تقدیر و تشکر :

شکر و سپاس خدای را که با الطاف بی‌حدش مرا یاری نمود تا این پایان نامه را به انجام رسانم.

از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر سیداحمد موسوی که با راهنماییهای خوب خود همواره مشوق من در انجام کار تحقیق بودند نهایت تشکر را دارم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر دوستعلی مژده بعنوان استاد مشاور و همچنین آقای دکتر علی ایرانمنش و آقای دکتر محمّد مهدوی‌هزاوه‌ای سپاسگزارم.

در پایان از برادر عزیزم آقای حسین درزی و همسرش نیره مدنی‌نژاد که از عوامل اصلی موفقیتم بوده‌اند تشکر می‌کنم.

چکیده:

مسئله‌ای از ژاکوبسن می‌گوید: اگر R یک حلقهٔ ژاکوبسن باشد،آیا $S = R[y;\tau,\delta]$،نیز چنین است؟ یعنی آیا هر ایده‌آل اول آن اشتراکی از ایده‌آلهای ابتدایی است؟ هدف اصلی پایان‌نامه عبارتست از اینکه نشان دهیم پاسخ سئوال فوق در مورد زیر صحیح می‌باشد: وقتی که R یک حلقهٔ نوتری تعویض‌پذیر و τ یک خودریختی R است.

در [8]، Irving و در [5]، Goodearl ،نتایج مبسوطی در خصوص ایده‌آلهای اول حلقهٔ $S = R[y;\tau,\delta]$،که در آن R یک حلقه جابجایی است،بدست آورده‌اند.در این پایان نامه با استفاده از مقالات فوق الذکر به مطالعهٔ اشتراک ایده‌آلهای اول می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم Q یک ایده‌آل اول حلقه R باشد که روی $P \cap R$ مینیمال است،جائیکه P ایده‌آل اولی از $S = R[y;\tau,\delta]$ می‌باشد و R حلقه کسرهای گلدی حلقهٔ خارج قسمتی R/Q است.در اینصورت P پوچساز راست یک $A - S$ دو مدول خارج قسمتی ناصفر M از $A \otimes S$ است و M بعنوان S/P- مدول راست بی‌تاب است.با استفاده از مطالب فوق به مطالعهٔ ایده‌آلهای ابتدایی و نیم‌ابتدایی S پرداخته و در نهایت به حکم اصلی می‌رسیم.

هدف اصلی عبارتست از مطالعه و بررسی مقالهٔ:

K.R.Goodearl. and E.S.Letzter, Skew Polynomial Extensions of Commutative Noetherian Jacobson Rings. Proc. of the Amer. Math. Soc.123,6 (1995), 1 - 8.

واژگان کلیدی:

حلقه کسرهای نیم‌ساده ـ حلقه‌های چند جمله‌ایهای اریب ـ حلقه‌های نوتری جابجایی ـ حلقه‌های ژاکوبسن.

عنوان	صفحه

فصل اول

حلقه کسرهای نیم ساده

حلقه کسرهای نیم ساده

(۱ـ۱) مقدمه

در این فصل بعضی از تعاریف و نتایج مقدماتی درباره حلقه کسرهای نیم ساده را یادآوری می‌کنیم.

(۱ـ۱ـ۱) تعریف : یک ایده‌آل نیم اول در حلقه R،عبارتست از ایده‌آلی در R که اشتراکی ازایده‌آلهای اول‌است. یک‌حلقه نیم اول،حلقه‌ای است که صفر در آن یک ایده‌آل نیم اول می‌باشد.

(۱ـ۱ـ۲) قضیه [Levitzki - Nagata]: ایده‌آل I از حلقه R نیم اول است اگر و تنها اگر برای هر $x \in R$ که $xRx \subseteq I$،آنگاه داشته باشیم $x \in I$.

اثبات : [7 , 2.7]

(۱ـ۱ـ۳) نتیجه : برای یک ایده‌آل I در حلقه R،شرایط زیر معادلند :

۱) I یک ایده‌آل نیم اول است.

۲) اگر J ایده‌آل از R باشد بطوریکه $J^2 \leq I$،آنگاه $J \leq I$.

۳) اگر J ایده‌آل راستی از R باشد بطوریکه $J^2 \leq I$،آنگاه $J \leq I$.

۴) اگر J ایده‌آل چپی از R باشد بطوریکه $J^2 \leq I$،آنگاه $J \leq I$.

اثبات :

(۳) ⇒ (۱) : برای هر $x \in J$ داریم $xRx \subseteq J^2 \subseteq I$ از اینرو بنابر قضیه (۱ ـ ۱ ـ ۲)،$x \in I$ لذا $J \leq I$.

(۲) ⇒ (۳) : از آنجاکه هر ایده‌آل،خود یک ایده‌آل راست می‌باشد،حکم برقرار است.

(۱) ⇒ (۲) : برای هر $x \in R$ که $xRx \subseteq I$ داریم : $(RxR)^2 = RxRxR \leq I$.از اینرو $RxR \leq I$. پس $x \in I$ و از قضیه (۱ ـ ۱ ـ ۲) نتیجه می‌شود I نیم اول است.

(۴) ⇔ (۱) : متشابهاً برقرار است.

(۱ـ۱ـ۴) تعریف : مدول A را نیم ساده گوئیم هرگاه جمع همه زیر مدولهای ساده‌اش باشد.

یا مدول A را نیم ساده گوئیم هرگاه هر زیر مدولش جمعوند مستقیم آن باشد.

(۱ـ۱ـ۵) تعریف : یک زیر مدول اساسی از مدول B عبارتست از زیر مدول A،که با هر زیر مدول ناصفر B اشتراکی ناصفر دارد.در این صورت می‌نویسیم $A \le_e B$ و B را توسیع اساسی A گوئیم.

(۱ـ۱ـ۶) گزاره : یک مدول C نیم ساده است اگر و تنها اگر هیچ زیر مدول اساسی سره نداشته باشد.

اثبات : فرض کنیم C نیم ساده است.اگر A زیر مدول سره‌ای از C باشد.آنگاه بنابر (۱ ـ ۱ ـ ۴). برای یک زیر مدول B از C داریم $C = A \oplus B$.از اینرو $A \cap B = 0$ پس $A \not\le_e B$.

برعکس : اگر C زیر مدول اساسی سره نداشته باشد،آنگاه هر زیر مدول از C یک جمعوند مستقیم آن است (7, 3.23).لذا بنابر (۱ ـ ۱ ـ ۴)، C نیم ساده است.

(۱ـ۱ـ۷) تعریف : مدول راست A روی حلقه R را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم :

$$Z(A) = \{ x \in A \mid xI = 0 \text{ ، برای بعضی } I \le_e R_R \}$$

$$= \{ x \in A \mid \operatorname{ann}(x) \le_e R_R \}$$

Z (A) یک زیر مدول از A است که زیر مدول منفرد از A نامیده می‌شود.اگر $Z(A) = A$. آنگاه A را یک مدول منفرد و اگر $Z(A) = 0$ ،آنگاه A را یک مدول نامنفرد گوئیم.

(۱ ـ ۱ ـ ۸) تعریف : یک مدول راست(چپ) A روی حلقه R انژکتیو است،هرگاه برای هر R ـ مدول راست(چپ) B و هر زیر مدول C از B ،هر همریختی $C \to A$ به همریختی $B \to A$ توسیع یابد.

بنابر [7 , Ex.3G] مدولها روی حلقه نیم ساده انژکتیو هستند.امّا Z بعنوان Z ـ مدول انژکتیو نیست،زیرا همریختی $f : 2Z \to Z$ با ضابطهٔ $f(2n) = n$ نمی‌تواند به یک همریختی $Z \to Z$ توسیع یابد.

(۱ ـ ۱ ـ ۹) تعریف : پوش انژکتیو برای مدول A عبارتست از مدول انژکتیوی که یک توسیع اساسی از A می‌باشد و با $E(A)$ نمایش داده می‌شود.برای نمونه Q پوش انژکتیو برای Z است.

(۱ ـ ۱ ـ ۱۰) تعریف : یک مدول یکنواخت عبارتست از یک مدول ناصفر A که اشتراک هر دو زیر مدول ناصفرش، ناصفر است.بعبارت دیگر اینکه هر زیر مدول A ،اساسی است.

(۱ ـ ۱ ـ ۱۱) تعریف : مدول A رتبه متناهی دارد هرگاه $E(A)$ یک جمع مستقیم متناهی از زیر مدولهای تحویل‌ناپذیر باشد.همچنین اگر A یک مدول از رتبه متناهی باشد آنگاه عدد صحیح نامنفی n وجود دارد بطوریکه $E(A)$ یک جمع مستقیم از n زیر مدول یکنواخت است.در این صورت n را رتبه A می‌گوئیم و می‌نویسیم $\mathrm{rank}(A) = n$.

(۱ ـ ۱ ـ ۱۲) گزاره : هر مدول نوتری A رتبه متناهی دارد.[7,4.14]

اثبات : اگر این چنین نباشد،آنگاه A شامل یک جمع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر است.به این ترتیب A شامل یک دنبالهٔ نامتناهی ... و A_2 و A_1 از زیر مدولهای ناصفر

مستقل است.در نتیجه داریم :

$$A_1 < A_1 \oplus A_2 < A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 < \dots$$

که یک زنجیر نامتناهی اکیداً صعودی از زیر مدولهای A است و این با فرض نوتری بودن A در تناقض است.

(۱ ـ ۱ ـ ۱۳) گزاره : فرض کنید A یک مدول با رتبه متناهی باشد.اگر $f: A \to A$ یک همریختی یک به یک باشد،آنگاه $f(A) \le_e A$.

اثبات : داریم :

$$A \cong f(A)$$

از طرفی A رتبه متناهی دارد لذا $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(f(A))$.بنابراین $f(A) \le_e A$ (7,4.17).

(۱ ـ ۱ ـ ۱۴) قضیه [Gabriel] : فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ نامنفرد راست باشد بطوریکه R_R رتبه متناهی دارد.در این صورت $E(R_R)$ یک حلقهٔ نیم‌ساده است.

اثبات : [7 , 4.28]

(۱ ـ ۲) مرتب بودن در حلقه‌های نیم‌ساده

(۱ ـ ۲ ـ ۱) تعریف : عنصر x در حلقه R را منظم گوئیم هرگاه $l.ann_R(x) = r.ann_R(x) = \circ$

(۱ ـ ۲ ـ ۲) لم : اگر $R \subseteq Q$ حلقه باشند و $x \in R$ در Q وارونپذیر باشد آنگاه x در R منظم است.

برهان : فرض کنیم $y \in R$ و $y \in l.ann(x)$. لذا $yx = \circ$. اما x در Q وارونپذیر است، پس داریم $yxx^{-1} = \circ$. پس $y = \circ$. بنابراین $l.ann_R(x) = \circ$. به همین ترتیب، $r.ann_R(x) = \circ$.

(۱ ـ ۲ ـ ۳) تعریف : فرض کنید I یک ایده‌آل در حلقه R باشد و $x \in R$. در این صورت گوئیم x به سنج I منظم است اگر هم مجموعه $x + I$ در حلقه R/I منظم باشد. مجموعه همهٔ چنین xها را با C(I) یا $C_R(I)$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه عناصر منظم R را با $C(\circ)$ یا $C_R(\circ)$ نمایش می‌دهیم.

(۱ ـ ۲ ـ ۴) تعریف : فرض کنید Q یک حلقه باشد. یک مرتب راست در Q، زیر حلقه $R \subseteq Q$ است بطوریکه :

a) هر عنصر منظم R در Q وارونپذیر باشد.

b) هر عضو Q به شکل ab^{-1} باشد که در آن $a , b \in R$ و b منظم باشد.

مرتب چپ بطور مشابه تعریف می‌شود و در حلقه‌های جابجائی، راست و چپ یکی است.

برای مثال حلقه $\{ (a , b) \in Z \times Z \mid a \equiv b \ (mod\ ۲) \}$ در $Q \times Q$ مرتب است.

(۱ ـ ۲ ـ ۵) لم : فرض کنید R در حلقه Q مرتب راست باشد

۱) برای $a , b \in R$ با b منظم، $c , d \in R$ وجود دارد با d منظم بطوریکه $ad = bc$.

۲) برای عناصر منظم دلخواه d_1 و... و $d_n \in R$، یک عنصر منظم در $d_1R \cap ... \cap d_nR$ وجوددارد.

۳) برای هر x_1 و ... و $x_n \in Q$، $b \in R$ و a_1 و ... و a_n با b منظم وجود دارد بطوریکه بازای هر $i = ۱$ و ۲ و ... و n، $x_i = a_i b^{-1}$.

برهان :

۱) از آنجاکه R در Q مرتب راست است،عنصر منظم b در Q وارونپذیر می‌باشد و همچنین $b^{-1}a = cd^{-1}$ برای بعضی $c, d \in R$ با d منظم.بنابراین $ad = bc$.

۲) با استقراء روی n ،کافی است حالت n = ۲ را در نظر بگیریم.از (۱) داریم که $dd_1 = d_2c$ برای بعضی $c,d \in R$ با d منظم.به این ترتیب، $d_1d \in d_1R \cap d_2R$.از آنجاکه d_1 و d منظم هستند d_1d نیز منظم است.

۳) برای $i = ۱$ و ۲ و ... n، $x_i = c_id_i^{-1}$ برای بعضی $c_i, d_i \in R$ با d_i منظم.از (۲) عنصر منظم b در $d_1R \cap ... \cap d_nR$ وجود دارد.برای هر $i = ۱$ و ۲ و ... و n داریم $b = d_ie_i$ که در آن $e_i \in R$.

و در نتیجه $x_i = c_ie_ib^{-1}$

(۱ ـ ۲ ـ ۶) تعریف : یک پوچساز راست(چپ) در حلقه R عبارتست از هر ایده‌آل راست(چپ) از R که مساوی پوچساز راست(چپ) یک زیر مجموعه از R است.نکته اینکه ایده‌آل I از حلقه R،یک پوچساز راست است اگر و تنها اگر $I = r.ann(l.ann(I))$.یعنی اگر برای $x \subseteq R$، $I = r.ann(x)$ آنگاه $x \subseteq l.ann(I)$.از اینرو $I = r.ann(X) \geq r.ann(l.ann(I)) \geq I$.

(۱ ـ ۲ ـ ۷) گزاره : اگر حلقه R در حلقه نیم ساده Q مرتب راست باشد،آنگاه R یک حلقه نیم اول، R_R دارای رتبه متناهی و R خاصیت ACC روی پوچسازهای راست دارد.