بسم الله الرحمن الرحيم

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **آمار** گرایش **آمار ریاضی** است که در بهمن ۱۳۹۳ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر انوشیروان غفاری‌پور** و مشاورهٔ **دکتر حیدرعلی مردانی‌فرد** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار گرایش آمار ریاضی

برآوردگرهای بیزی استوار بهبودیافته‌ی واریانس خطا در مدل‌های خطی

استاد راهنما

دکتر انوشیروان غفاری‌پور

پژوهشگر

اصغر آقاجانی روند

بهمن ۱۳۹۳

برآوردگرهای بیزی استوار بهبودیافته‌ی واریانس خطا در مدل‌های خطی

به وسیلهٔ

اصغر آقاجانی روند

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

آمار

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر انوشیروان غفاری‌پور	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر حیدرعلی مردانی‌فرد	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه:	دکتر آرش اردلان	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه:	دکتر کاووس خورشیدیان	با مرتبهٔ علمی دانشیار	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر حمیدرضا رجبی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء

تقدیم به:

پدر و مادر،

خواهران و برادران عزیزم

قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

ازپدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم‌داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر انوشیروان غفاری‌پور که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با تقوا ، جناب آقای دکتر حیدرعلی مردانی‌فرد، که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از استاد فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر آرش اردلان ،مدیریت محترم کرسی گروه، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

هم‌چنین از تمامی هم‌ورودی‌های خودم(ورودی‌های ۹۱)، نهایت تشکر و سپاس را دارم و بر خودم وظیفه می‌دانم که از هم‌کلاسی عزیزم سرکار خانم زهرا خادم بشیری، به خاطر یاری و هم‌کاری بی‌نهایت ارزشمند ایشان تشکر و سپاس‌گزاری را داشته باشم.

اصغر آقاجانی روند

بهمن ۱۳۹۳

چکیده

در مدل رگرسیونی عمومی، برآوردگرهای عادی که برای پارامترها به‌دست می‌آیند دارای ویژگی‌های زیر هستند؛

- خیلی غیراستوار هستند و نسبت به داده‌های پرت حساس هستند.
- اگر توزیع خطاها دم‌سنگین باشند، این برآوردگرها صحیح و دقیق نیستند.
- برای ابعاد بالاتر(بالاتر از ۲)، ناپذیرفتنی هستند.

بنابراین، برای این‌که این معایب به حداقل برسند، از برآوردگرهای بیزی استفاده می‌شود. با استوارسازی این برآوردگرهای بیزی، می‌توان یک مدل کارا و مؤثر را به‌دست آورد.
در بسیاری از کاربردهای مدل رگرسیونی عمومی، عبارت‌های خطا نرمال فرض شده‌اند که دارای توزیع مستقل با میانگین صفر و واریانس عادی هستند.
در این رساله، مسئله‌ی برآوردکردن واریانس خطا در مدل خطی عمومی هنگامی‌که توزیع خطا دارای توزیع کروی متقارن، نه لزوماً گاوسین، هستند، بررسی می‌شود. به‌ویژه، مورد آمیخته‌ی مقیاسی گاوسین، که مورد مهم و منحصربه‌فرد توزیع تی-استودنت چندمتغیره است، در نظر گرفته می‌شود. تحت زیان اشتین، یک کلاس از برآوردگرهایی که بر اساس بهترین برآوردگر نااریب (و بهترین پایا) بهبود می‌یابد، ساخته می‌شود. این کلاس، ویژگی تنومندی دوتایی جالبی از وجود هم‌زمان بیز تعمیم‌یافته (برای پیشین تعمیم‌یافته‌ی مشابه) و مینیماکس‌بودن روی کلاس کاملی از توزیع‌های مقیاسی را دارد.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

برآوردگر ماکزیمم درستنمایی .... MLE

برآورد کمترین مربعات .... LSE

بهترین برآوردگر نااریب خطی .... $BLUE$

تابع چگالی احتمال .... pdf

ضریب تعیین .... R^2

مجموع توان دوّم باقی‌مانده‌ها .... RSS

میانگین مربعات خطا .... MSE

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱–۱ تابع زیان و تابع مخاطره

تعریف ۱–۱. تعریف برآوردگر [۱]: آماره‌ای که مقدار مشاهده شده‌ی آن در حد امکان منعکس کننده‌ی واقعی پارامتر نامعلوم جمعیت باشد. به چنین آماره‌ای در اصطلاح آماری برآوردگر و مقدار مشاهده شده‌ی آن را برآورد گویند.

شاید اساسی‌ترین انتظار از یک برآوردگر "خوب"، برآوردی است که به مقدار واقعی پارامتر نامعلوم θ نزدیک‌تر باشد. به بیان دیگر، یک برآوردگر "خوب" برآوردگری است که میزان خطا در آن، یعنی $\delta(X) - \theta$ ، با احتمال یک نزدیک به صفر است. ($\delta(X)$ برآورد مقدار θ به ازای مقادیر X است.)

اگر D نمایانگر کلاس تمام برآوردگرها باشد، آن‌گاه برای هر $\delta(X) \in D$ فرض می‌شود که $\delta(X) \in \Theta$ باشد، یعنی مقدار مشاهده شده‌ی $\delta(X)$ براساس یافته‌ی $X = x$ متعلق به Θ است. فرض خواهد شد که برای هر $\theta \in \Theta$ و هر برآورد ممکن $\delta(X)$ که متعلق به Θ است، مقدار عددی $L(\theta, \delta(X))$ –ای وجود دارد که میزان زیان آماردان را در برآورد پارامتر θ بر پایه‌ی $\delta(X)$ اندازه می‌گیرد.

در حقیقت، تابع زیان [۲] که آن را با L نشان می‌دهند، تابعی دومتغیره از $D \times \Theta$ به

[۱] Estimator

[۲] Loss Function

زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی غیرمنفی است، یعنی

$$L : \Theta \times D \longrightarrow R^+$$

بنابراین، تابع $L(\theta, \delta(X))$ خود یک متغیر تصادفی است.
در آمار توابع زیان متعددی، با توجه به نوع مسئله، به‌کار گرفته می‌شود که در بسیاری از مسائل برآوردیابی، به جای برآورد پارامتر θ علاقه‌مند به برآورد تابعی از پارامتر مجهول، یعنی $\gamma(\theta)$، هستیم. در این حالت توابع زیان به‌صورت زیر خواهند بود؛

- تابع زیان مربع خطا در برآورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta, \delta) = (\delta - \gamma(\theta))^۲$$

- تابع زیان وزنی مربع خطا در برآورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta, \delta) = w(\theta)(\delta - \gamma(\theta))^۲, \qquad w(\theta) > ۰$$

- تابع زیان قدرمطلق خطا در برآورد $\gamma(\theta)$،

$$L(\theta, \delta) = |\delta - \gamma(\theta)|$$

- تابع زیان خطی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود و کلی‌تر از تابع زیان قدرمطلق خطاست

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} k_۰(\gamma(\theta) - \delta) & \gamma(\theta) - \delta \geq ۰ \\ k_۱(\delta - \gamma(\theta)) & \gamma(\theta) - \delta < ۰ \end{cases}$$

در حالت خاص، با انتخاب $k_۰ = k_۱ = ۱$، تابع زیان قدرمطلق خطا را خواهیم داشت. - تابع زیان صفرویک، به‌صورت زیر تعریف می‌شود و بیشتر در آزمون فرض‌ها مورد استفاده است

$$L(\theta, \delta_i) = \begin{cases} ۰ & \gamma(\theta) \in \Theta_i \\ ۱ & \gamma(\theta) \in \Theta_j \end{cases} \qquad i \neq j$$

با توجه به اینکه تابع زیان یک متغیر تصادفی است، ایده‌آل این است که برای هر تابع زیان داده شده‌ی L ، علاقه‌مند به پیدا کردن برآوردگر $\delta(X)$ -ای بود که متوسط L را مینی‌مم کند.

تعریف ۱-۲. تابع مخاطره [۳]: متوسط مقدار L را تابع مخاطره برآوردگر δ در برآورد پارامتر $\gamma(\theta)$ گویند و آن به‌صورت،

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\gamma(\theta), \delta(X))]$$

تعریف می‌شود. در صورتی که تابع زیان، مربع خطا باشد، تابع مخاطره را میانگین مربع خطا(MSE) [۴] می‌نامیم.

تعریف ۱-۳. برآوردگر نااریب [۵]: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانواده توزیع‌های زیر باشد،

$$\mathcal{P} = \{p_\theta : \theta \in \Theta\}$$

آماره‌ی $\delta(X)$ برای $\gamma(\theta)$ نااریب گفته می‌شود، اگر برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\delta(X)] = \gamma(\theta)$$

توجه داشته باشید که اگر $\delta(X)$ یک برآوردگر نااریب برای $\gamma(\theta)$ باشد، آنگاه برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[(\delta(X) - \gamma(\theta))^۲] = V_\theta(\delta(X))$$

۱-۲ برآوردگرهای بیز و مینی‌ماکس

"بهترین" برآورد آن برآوردی است که به‌طور یکنواخت دارای کمترین مقدار مخاطره است. امّا متأسفانه موقعیتی که در آن "بهترین" برآوردگر وجود داشته باشد، پیش نمی‌آید. یعنی برای یک مقدار ثابت θ، برآوردی با کمترین مخاطره را می‌توان یافت، امّا این "بهترین" برآورد، برای مقادیر مختلف θ تغییر می‌کند(به مثال ۱ از فصل چهار کتاب پارسیان رجوع کنید).

[۳] Risk Function

[۴] Mean Square Error

[۵] Unbaised Estimator

بنابراین هیچ برآوردی را نمی‌توان به عنوان "بهترین" برآورد ارائه داد و به همین دلیل در آمار به یافتن برآوردگرهای بهینه اکتفا می‌شود، در نتیجه با اعمال یک قانون خاص، ابتدا برآوردها را مرتب کرده، سپس برآوردگر مطلوب انتخاب می‌شود. اصل مینی‌ماکس و اصل بیز، دو اصل معمول از این روش‌اند.

۱-۲-۱ اصول مینی‌ماکس و بیز

در برآورد پارامتر $\gamma(\theta)$ براساس برآوردگر $\delta(X)$، میزان دقّت، یا بهتر بگوییم عدم دقّت برآوردگر با تابع مخاطره، یعنی

$$R(\theta,\delta)=E_\theta[L(\theta,\delta(X))]$$

اندازه گرفته می‌شود. همان‌گونه که اشاره شد، در مسائل برآوردیابی علاقه‌مند به دست‌یابی به برآوردگری مانند δ هستیم که برای هر $\theta\in\Theta$، $R(\theta,\delta)$ را مینیمم کند. گفته شد که یک روش برای پیداکردن برآوردگرهای بهینه، برقراری یک نوع رابطه‌ی ترتیبی بین برآوردگرهاست. دو روش اساسی در برقراری رابطه‌ای ترتیبی بین برآوردگرها، اصل مینی‌ماکس و اصل بیز است. یک رابطه‌ی ترتیبی بین برآوردگرها می‌تواند براساس رخداد بدترین حالت ممکن برای آماردان درنظر گرفته شود. به‌عبارت دیگر، برآوردگر $\delta_۱$ به برآوردگر $\delta_۲$ ترجیح داده می‌شود اگر

$$\max_\theta R(\theta,\delta_۱)\leq \max_\theta R(\theta,\delta_۲)$$

بر پایه‌ی این موضوع، اصل مینی‌ماکس، برآوردگری از δ را بررسی می‌کند که مقدار $\max_\theta R(\theta,\delta)$ را مینی‌مم کند. چنین انتخابی از δ منجر به انتخاب برآوردگر مینی‌ماکس [۶] δ_m می‌شود، یعنی برای هر $\delta\in D$،

$$\max_\theta R(\theta,\delta_m)\leq \max_\theta R(\theta,\delta)$$

به‌عبارتی دیگر، براساس این اصل، بدترین حالات ممکن از برآوردگرها به ازای $\theta\in\Theta$ را درنظر گرفته و بین بدترین حالات ممکن، آن δ اختیار می‌شود که کمترین مقدار مخاطره را

[۶] مینی‌مم مجموعه‌ای از ماکزیمم‌ها

اختیار کند. واضح است که در این حالت لزومی ندارد برآوردگر مینی‌ماکس یکتا باشد. اصل بیز، برآوردگری از θ را بررسی می‌کند که برای یک تابع وزنی نظیر $G(\theta)$، مقدار

$$\int_{\Theta} R(\theta,\delta)\,\mathrm{d}G(\theta)$$

حداقل شود. یعنی براساس تابع وزنی G و تابع زیان L ، کلیّه مقادیر $\int_{\Theta} R(\theta,\delta)\,\mathrm{d}G(\theta)$ را برای هر $\delta \in D$، از کوچک به بزرگ مرتب و برآوردگر δ-ای را انتخاب می‌کند که مقدار این انتگرال از همه کمتر باشد که به انتخاب برآوردگر بیز $\delta_B(X)$ می‌انجامد، یعنی برای هر برآوردگر $\delta \in D$،

$$\int_{\Theta} R(\theta,\delta_B)\,\mathrm{d}G(\theta) \le \int_{\Theta} R(\theta,\delta)\,\mathrm{d}G(\theta)$$

۱-۲-۲ توزیع پیشین و توزیع پسین

با توجه به ماهیّت اصل بیز، در مسائل استنباط آماری به روش بیز بر اساس مشاهداتی که از خانواده‌ی توزیع‌ها اختیار می‌شود، پارامتر θ دارای مقدار نامعلوم است. به‌عبارت دیگر، در حقیقت، θ به‌عنوان یک مقدار تصادفی W درنظر گرفته می‌شود که مقادیر ممکن آن فضای پارامتر Θ است و دارای توزیع $G(\theta)$ یا تابع احتمال(یا تابع چگالی احتمال) $g(\theta)$ است و از آن با عنوان توزیع پیشین[۷] یا تابع احتمال پیشین (یا تابع چگالی احتمال پیشین) یاد می‌شود. با توجه به آنچه که گفته شد، در این حالت، تابع مخاطره‌ی بیزی در انتخاب δ به‌عنوان یک برآوردگر نسبت به توزیع پیشین G و تابع زیان L ، که آن با نماد $r(G,\delta)$ نمایش‌داده می‌شود، برابر است با؛

$$\begin{aligned} r(G,\delta) &= EE[W,\delta(X)] \\ &= E[R(W,\delta)] \\ &= \int_{\Theta} R(\theta,\delta)\,\mathrm{d}G(\theta) \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

و به دنبال برآوردگر δ_B هستیم که مقدار (۱-۱) را مینی‌مم کند. در این حالت، از برآوردگر $\delta_B(X)$ با عنوان برآوردگر بیز $\gamma(\theta)$ نسبت به توزیع پیشین G تحت زیان L یاد می‌شود.

[۷] Prior Distribution

بنابراین فرض می‌شود که مدل احتمالی آزمایش بستگی به پارامتر θ دارد که از خانواده‌ی توزیع‌های $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ با خانواده‌ی چگالی‌های $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ است، همچنین فرض می‌شود که θ خود مقدار مشاهده شده‌ی یک متغیر تصادفی، مثلاً W با توزیع معلوم $G(\theta)$ یا چگالی معلوم $g(\theta)$ است، که از آن با نام توزیع پیشین W یاد می‌کنیم. در این حالت، $f_\theta(.)$ را می‌توان به عنوان چگالی شرطی متغیر X به شرط $W = \theta$ تلقی کرده و چگالی توأم X و W را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$f_{X,W}(x,\theta) = f_{X|W=\theta}(x)g(\theta) \tag{۱-۲}$$

توزیع شرطی W به شرط $X = x$ قابل محاسبه است، که از آن با نام توزیع پسین[۸] W یاد می‌کنیم. توزیع پسین W دارای چگالی پسین است که به‌صورت زیر قابل محاسبه است،

$$g_{W|X=x}(\theta) = \frac{f_{X,W}(x.\theta)}{f_X(x)}$$

که در آن $f_X(.)$ تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) کناری[۹] X است، به‌طوری که

$$f_X(x) = \int_\Theta f_\theta(x)\,\mathrm{d}G(\theta) = \begin{cases} \sum_\theta f_{X,W}(x,\theta) & \text{گسسته باشد W} \\ \int_\Theta f_{X,\theta}(x,\theta)\,\mathrm{d}(\theta) & \text{پیوسته باشد W} \end{cases}$$

بنابراین چگالی پسین را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$g_{W|X=x}(\theta) = g(\theta|x) = \frac{f_\theta(x)g(\theta)}{\int_\Theta f_\theta(x)\,\mathrm{d}G(\theta)}$$

-توجه داشته باشید که $f_X(x) = \int_\Theta f_\theta(x)\,\mathrm{d}G(\theta)$ بستگی به θ ندارد. بنابراین در محاسبه‌ی چگالی پسین، کافی است $g(\theta|x)$ را متناسب با حاصل‌ضرب $f_\theta(x)g(\theta)$ در نظر گرفته و سپس آن را به‌صورت عادی و معمولی[۱۰] درآورد.

[۸] Posterior Distribution

[۹] Marginal

[۱۰] Normalized

مثال ۱-۴. فرض کنید $X \sim B(n,\theta)$، $\theta \in (0,1)$ و توزیع پیشین $Beta(\alpha,\beta)$ که در آن $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ معلوم‌اند. توزیع پسین را معلوم کنید.

حل:

$$f_\theta(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad x = 0, 1, ..., n$$
$$g(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \qquad 0 < \theta < 1$$
$$f_\theta(x) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}, \qquad g(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$
$$g(\theta|x) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} = \theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n+\beta-x-1}$$
$$\Rightarrow g(\theta|x) = \frac{1}{B(\alpha+x,n+\beta-x)}\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n+\beta-x-1}$$

و

$$\theta|x \sim Beta(\alpha+x, n+\beta-x)$$

□

مثال ۱-۵. فرض کنید θ نسبت تعداد لامپ‌های سالم به تمام لامپ‌هایی که یک کارخانه تولید می‌کند، باشد. آماردان کارخانه بر این باور است که θ دارای چگالی پیشین زیر است؛

θ	۰.۱	۰.۲
احتمال	۰.۶	۰.۴

هرگاه در یک نمونه‌ی تصادفی ۵تایی یک لامپ ناسالم مشاهده شود، چگالی پسین θ و برآوردی مناسب برای θ پیدا کنید.

حل:

در حقیقت یک نمونه‌ی تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_5)$ از $\boldsymbol{X} \sim B(1,\theta)$ وجود دارد که در آماره‌ی $S = \sum_{i=1}^{5} x_i$ خلاصه‌شده است. این آماره دارای توزیع دوجمله‌ای می‌باشد و یافته‌ی آن $s = 1$ است.

چگالی شرطی $g(\theta|S = 1)$ در حکم چگالی پسین می‌باشد. برای محاسبه‌ی این چگالی پسین گسسته، پیشامدهای زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 & \text{پیشامد این‌که} & \theta = 0/1 \\
A_2 & \text{پیشامد این‌که} & \theta = 0/2 \\
B & \text{پیشامد این‌که} & S = 1
\end{array}
$$

بنابراین باید $p(A_1|B)$ و $p(A_2|B)$ با یاری احتمال شرطی یا فرمول بیز پیدا شود. می‌دانیم که:

$$
p(A_1|B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A_1)p(A_1)}{p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2)}
$$

طبق چگالی پیشین θ:

$$
p(A_1) = p(\theta = 0/1) = 0/6
$$
$$
p(A_2) = p(\theta = 0/2) = 0/4
$$

چون S دارای توزیع دوجمله‌ای است، پس

$$
p(B|A_1) = p(S = 1|\theta = 0/1) = \binom{5}{1}(0/1)^1(0/9)^4 = 0/328
$$
$$
p(B|A_2) = p(S = 1|\theta = 0/2) = \binom{5}{1}(0/2)^1(0/8)^4 = 0/409
$$

در نتیجه

$$
p(A_1|B) = \frac{(0/328 \times 0/6)}{(0/328 \times 0/6) + (0/409 \times 0/4)} = 0/545
$$
$$
p(A_2|B) = 1 - 0/545 = 0/455
$$

میانگین توزیع پسین θ، برآوردی معقول برای θ می‌باشد. این برآورد با استفاده از چگالی پسین می‌شود:

$$
E(\theta|B) = (0/1 \times 0/545) + (0/2 \times 0/455) = 0/145
$$