logo.pdf

توسط

منصوره مسلمی

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ
کارشناسی ارشد ریاضی محض

زیر نظر

دکتر داریوش بهمردی

زمستان ۱۳۸۹

دانشکدهٔ علوم پایه

دانشگاه الزهراء (س)

تهران

تقدیم به او که خورشید واپسینش تنها امید ماست.

و تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بوده و وجودشان برایم همه مهر، توانشان رفت تا به توانی برسم. موهایشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی زندگی من است. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت.

سرو وجودشان همواره استوار باد.

تقدیر و تشکر

بی تردید سهم این حقیر در نگارش این پایان نامه جز شاگردی چیزی نبود و اگر شاهد به ثمر رسیدن آن به این شکل هستیم جز از راهنمایی های جناب آقای دکتر داریوش بهمردی میسر نبود. مشاوره ی بی دریغ سرکار خانم دکتر مریم ربیعی نیز پیمودن گام های پیشرفت برای پایان بردن این پژوهش را تسریع بخشید. از داوران فرزانه جناب آقای دکتر کوروش نوروزی و دکتر فرید بهروزی که با انتقادات سازنده ی خود، نقاط ضعف این پژوهش را گوشزد نمودند نیز سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه فضاهای باناخ را فضای باناخ حقیقی در نظر می گیریم، مگر این که به صراحت خلاف آن ذکر شده باشد. همچنین نرم های جدیدی که روی فضا معرفی می کنیم با نرم متعارف روی آن فضا معادلند.
سپس به تعریف فضاهای مدور و ارتباط بین این فضاها می پردازیم و نشان می دهیم فضاهای باناخ زیادی وجود دارند که با نرم استاندارد خود مدور نیستند، با این حال می توان نرم جدیدی را روی آن در نظر گرفت که با این نرم فضا مدور باشد.
در فصل بعد نقاط مدور را معرفی می کنیم و نشان می دهیم هرگاه هر نقطه از کره واحد فضای باناخ X یك نقطه مدور باشد، آن گاه فضای X مدور است و به کمك قضایا و تعاریف این دو فصل نشان می دهیم که فضای باناخ تقریباً مدور یکنواخت موضعی وجود دارد که به طور ضعیف مدور یکنواخت موضعی نیست.
اصلی ترین منبع، که این پایان نامه به کمک آن تدوین شده است مرجع [۶] می باشد.

واژه‌های کلیدی: *نقطه نمایان شده، وجه نمایان شده، نقطه مدور، فضای مدور، فضای مدور یکنواخت موضعی و فضای خیلی مدور.*

فهرست مطالب

مقدمه

فضاهای مدور در سال ۱۹۳۶ توسط کلارکسون [۱] به عنوان کار اصلی وی جهت اخذ دانشنامه ی دکترا معرفی گردید. او نشان داد که به ازای هر $p > 1$ ، فضاهای L_p مدور یکنواخت هستند و بیان کرد که هر فضای باناخ جدایی پذیر یک نرم مدور می پذیرد.
سپس در سال ۱۹۳۹، پتیس [۲] نشان داد که هر فضای مدور یکنواخت، انعکاسی می باشد.
در سال ۱۹۴۰ بوس [۳] پیرو کار کلارکسون، روش ساده تری برای اثبات مدور یکنواخت بودن فضاهای L_p ارائه کرد.
در سال ۱۹۴۰، مالون دی [۴] با نگرشی متفاوت به این فضاها، دسته ای از فضاها که مدور یکنواخت نیستند را مشخص کرد. وی همچنین مدور یکنواخت حول یک نقطه را تعریف کرد و نشان داد که اگر مجموعه B حول نقطه b_0 مدور یکنواخت باشد آ ن گاه، B با یک فضای مدور یکنواخت یکریخت است. همچنین فضایی را معرفی کرد که با هیچ فضای مدور یکنواختی یکریخت نباشد.
مالون دی در سال ۱۹۴۳ مدور یکنواخت موضعی اطراف یک نقطه را تعریف کرد. بنابر این تعریف فضای X اطراف نقطه b_0 مدور یکنواخت موضعی است، هرگاه کره ای حول b_0 وجود داشته باشد که در شرط مدور یکنواخت صدق کند.
وی به عنوان کاربردی از مطالب اخیر، قضیه ارگودیک [۵] منسوب به بیرخوف [۶] را

[۱] J. A. Clarkson
[۲] B. j. Pettis
[۳] R. K. Bose
[۴] M. M. Day
[۵] Ergodic
[۶] J. D. Birkhoff

برای دسته ای از فضاهایی که مدور یکنواخت نیستند ثابت کرد. او سپس شرط لازم و کافی برای مدور یکنواخت بودن رده ای از فضاها را بیان کرد و نشان داد که اگر فضای X جدایی پذیر باشد آن گاه X^* یک نرم مدور می پذیرد.
در سال ۱۹۵۵، لواگلیا [۷] به بررسی مدور یکنواخت موضعی و نرمهای قویاً مشتق پذیر روی آن فضاها پرداخت.
در سال ۲۰۰۰، ریف [۸] دو شرط معادل برای مدور یکنواخت بودن فضا را مشخص کرد.
ملاحظه کردید، فضاهای مدور یکنواخت از سال ۱۹۳۶ وارد ریاضیات گردید و چندی نپایید که وسعت گرفت و نظر برخی ریاضیدانان را به خود جلب کرد.
همچنین طولی نکشید که این فضاها وارد نظریه تقریب شدند و در سالهای اخیر مورد بررسی قرار گرفته اند.

[۷] A. R. Lovaglia
[۸] J. Reif

فصل ۱

پیش نیاز

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم مقدماتی از آنالیز تابعی و حقیقی را مرور می کنیم که خواننده احتمالاً پیش از این با آن ها آشنا بوده است و ما در طول این پایان نامه به آن ها استناد می کنیم. با فرض آشنا بودن خواننده با این مطالب، اکثر لم ها و قضایا را بدون اثبات می آوریم. اما در مقابل هر یک از قضایا، مراجعی که آن قضایا از آن ها اخذ شده است، با ذکر دقیق شماره قضیه آمده است تا خواننده بتواند برای مطالعه دقیق تر به این مراجع رجوع کند.
در گزاره (۱.۱) با توجه به مرجع [۸] نامساوی هایی را روی فضای l_p ثابت می کنیم و به کمک آن ها در فصل بعد نشان می دهیم که فضای l_p مدور یکنواخت است.
تعاریف و قضایای این فصل اغلب ازمرجع [۱۰] انتخاب شده است.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از فضاهایl_p

تعریف ۱.۱. *برای* $1 \leq p \leq \infty$*، فضای همه دنباله های* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *در* $\mathbb{C}$ *که* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ *را فضای* l_p *می نامیم.*
نرم روی این فضا به صورت $\|x\|_p = (\sum|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$*، تعریف می شود.*

تعریف ۲.۱. *فضای* l_∞*، فضای تمام دنباله های کراندار با مقدار اسکالر است.*

نرم روی این فضا به صورت $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$ خواهد بود.

تعریف ۳.۱. فضای $c_\circ$ زیر فضایی از l_∞ است که $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i) = \circ$.

تعریف ۴.۱. فضای c زیر فضایی از l_∞ است که $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i)$ موجود و مقدار آن متناهی باشد.

تعریف ۵.۱. فضای باناخ H را فضای هیلبرت گوییم اگر ضرب داخلی $(.,.)$ روی H باشد که به ازای هر $x \in H$، داشته باشیم: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.
نرم $\|.\|$ یک فضای هیلبرت در تساوی متوازی الاضلاع صدق می کند. یعنی به ازای هر $x, y \in H$،

$$\|x+y\|^{۲} + \|x-y\|^{۲} = ۲\|x\|^{۲} + ۲\|y\|^{۲}.$$

تعریف ۶.۱. نامساوی مینکوفسکی [۱] :
اگر $A = \{A_i : i = ۱,۲,۳,\cdots\}$ و $B = \{B_i : i = ۱,۲,۳,\cdots\}$ هر دو مجموعه هایی متناهی یا نامتناهی از اعداد نامنفی باشند و $\circ < s \leq ۱$، آن گاه

$$(\sum_{i=۱}^{\infty} A_i^s)^{۱/s} + (\sum_{i=۱}^{\infty} B_i^s)^{۱/s} \leq (\sum_{i=۱}^{\infty} (A_i + B_i)^s)^{۱/s},$$

برای $s \geq ۱$، نامساوی در حالت معکوس برقرار است.

گزاره ۱.۱. فرض کنیم p و q دو عدد حقیقی مثبت باشند که $p+q = pq$، در این صورت به ازای هر $x, y \in l_p$ که $p \geq ۲$، نامساوی های زیر را داریم:

$$۲(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq ۲^{p-۱}(\|x\|^p + \|y\|^p). \qquad (۱.۱)$$

$$۲(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-۱} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q. \qquad (۲.۱)$$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq ۲(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-۱}. \qquad (۳.۱)$$

برای $۱ < p \leq ۲$، نامساوی ها در حالت معکوس برقرارند. [۸]

[۱] Minkowskis Inequality

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که رابطه (۳.۱) از (۲.۱) بدست می آید.
فرض کنیم $x+y=m$ و $x-y=n$. لذا $x=\frac{m+n}{۲}$ و $y=\frac{m-n}{۲}$، با جایگذاری در رابطه (۲.۱) داریم:

$$۲(\|\frac{m+n}{۲}\|^p+\|\frac{m-n}{۲}\|^p)^{q-۱}\leq\|m\|^q+\|n\|^q.$$

لذا

$$\|m+n\|^p+\|m-n\|^p\leq ۲(\|m\|^q+\|n\|^q)^{\frac{p}{q}}.$$

از این که $p/q=p-۱$ حکم اثبات می شود.
حال فرض کنیم $۱<p\leq ۲$. برای اثبات رابطه (۲.۱) ابتدا به ازای هر دو عدد مختلط x و y به کمک اثبات بازگشتی نشان می دهیم که

$$|x+y|^q+|x-y|^q\leq ۲(|x|^p+|y|^p)^{q-۱}. \qquad (۴.۱)$$

بدون این که از کلیت مسأله کاسته شود فرض کنیم $|y|\geq|x|$، حال طرفین رابطه (۴.۱) را بر $|x|^q$ تقسیم می کنیم. چون $p=\frac{q}{q-۱}$ داریم:

$$|۱+\frac{y}{x}|^q+|۱-\frac{y}{x}|^q\leq ۲(\frac{|x|^p+|y|^p}{|x|^p})^{q-۱}.$$

قرار می دهیم $c=\frac{y}{x}$، در نتیجه $|c|\leq ۱$ و داریم:

$$|۱+c|^q+|۱-c|^q\leq ۲(۱+|c|^p)^{q-۱}. \qquad (۵.۱)$$

اگر $c=۰$ و $c=\pm۱$ رابطه (۴.۱) به وضوح برقرار است.اکنون کافی است با توجه به رابطه (۵.۱) تنها به ازای $۰<c<۱$ حکم اثبات شود. فرض کنیم $۰<c<۱$ و قرار دهیم $c=\frac{۱-z}{۱+z}$، که $۰<z<۱$ با جایگذاری در رابطه (۵.۱) داریم:

$$(۱+z^q)^{p-۱}\leq\frac{۱}{۲}[(۱+z)^p+(۱-z)^p].$$

بنابراین $S=\frac{۱}{۲}[(۱+z)^p+(۱-z)^p]-(۱+z^q)^{p-۱}\geq ۰$.

به کمک بسط تیلور داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[(1+z)^p+(1-z)^p] = 1 &+ \frac{p(p-1)}{2!}z^2+\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)}{4!}z^4+\cdots\\ &+ \frac{p(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}z^{2k}+\cdots,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(1+z^q)^{p-1} = 1 &+ (p-1)z^q-\frac{(p-1)(2-p)}{2!}z^{2q}+\cdots\\ &+ \frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}z^{(2k-1)q}\\ &- \frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}z^{2kq}+\cdots.\end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned}S = \Sigma_{k=1}^{\infty}[&\frac{p(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}z^{2k}\\ &-\frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}z^{(2k-1)q}\\ &+\frac{(p-1)(2-p)(2k-p)}{(2k)!}z^{2kq}].\end{aligned}$$

در نتیجه

$$S=\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}z^{2k}[\frac{1-z^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)}-\frac{1-z^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)}].$$

حال چون $f(t)=\frac{1-z^t}{t}$، به ازای هر $t>o$ و $0<z<1$ یک تابع نزولی از متغیر t است، بنابراین $f(t)\geq f(t+\frac{p}{p-1})$. لذا سری S عبارت نامنفی ندارد. در نتیجه رابطه (۴.۱) برقرار است.

به برهان رابطه (۲.۱) برمی گردیم.

ابتدا فرض کنیم $x=(x_1,x_2,\cdots)$ و $y=(y_1,y_2,\cdots)$ دو عضو فضای l_p باشند.

برای اثبات رابطه (۲.۱) باید نشان دهیم:

$$[\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p]^{q/p}+[\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p]^{q/p}\leq 2[\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i|^p+|y_i|^p]^{q-1}.$$

قرار می دهیم: $p/q=s$ ، $|x_i+y_i|^q=A_i$ و $|x_i-y_i|^q=B_i$ حال به کمک نامساوی مینکوفسکی و رابطه (۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned}[\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p]^{q/p}+[\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p]^{q/p} &\leq [\Sigma_{i=1}^{\infty}(|x_i+y_i|^q+|x_i-y_i|^q)^{p/q}]^{q/p}\\ &\leq [\Sigma_{i=1}^{\infty}(2\{|x_i|^p+|y_i|^p\}^{q/p})^{p/q}]^{q/p}\\ &= [\Sigma_{i=1}^{\infty}2^{p/q}|x_i|^p+|y_i|^p]^{q/p}.\end{aligned}$$

و چون $q/p=q-1$ حکم اثبات می شود.
برای $p\geq 2$ رابطه (۴.۱) در حالت عکس برقرار است. لذا به ازای $1<p<\infty$ رابطه (۲.۱) اثبات می شود.
برای اثبات رابطه (۱.۱) کافی است نشان دهیم به ازای هر $a,b\geq 0$ داریم:

$$2(a^q+b^q)^{p-1}\leq 2^{p-1}(a^p+b^p), \tag{۶.۱}$$

سپس به کمک رابطه (۳.۱) حکم اثبات می شود. فرض کنیم $a\leq b>0$، حال طرفین رابطه (۶.۱) را بر $b^{q(p-1)}=b^p$ تقسیم می کنیم. قرار می دهیم $a/b=c$. لذا

$$2(c^q+1)^{p-1}\leq 2^{p-1}(c^p+1),\qquad 0\leq c\leq 1$$

یا

$$2^{(p-2)}\frac{c^p+1}{(c^q+1)^{p-1}}\geq 1.$$

تعریف می کنیم $H(c)=2^{(p-2)}\frac{c^p+1}{(c^q+1)^{p-1}}$. در نتیجه $H(c)\geq 1$. چون $H(1)=1$ و $dH/dc<0$، حکم اثبات می شود. □

قضیه ۱.۱. *فرض کنیم (f_n) دنباله ای از توابع باشد که بر E تعریف شده اند و*

به ازای هر $x \in E$،

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots ,$$

در این صورت اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} M_n(x)$ همگرا باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگرا است.

قضیه ۲.۱. *هرگاه (f_n) دنباله ای از توابع پیوسته بر E باشد و دنباله f_n، به طور یکنواخت به f همگرا باشد آن گاه، f بر E پیوسته خواهد بود.*

تعریف ۷.۱. *محمل تابع مختلط f روی فضای برداری توپولوژیک X را بستار مجموعه زیر تعریف می کنیم:*

$$\{x : f(x) \neq ۰\}.$$

گردایه همه توابع پیوسته که محمل آن ها فشرده است با $C_c(X)$ نشان می دهیم.

نماد گذاری: فرض کنیم K فشرده و V باز باشد، و $f \in C_c(X)$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$ ، $۰ \leq f(x) \leq ۱$ و به ازای هر $x \in K$، $f(x) = ۱$ و $Suppf \subseteq V$، در این صورت می نویسیم $K \prec f \prec V$.

لم ۱.۱. *لم اوریزون [۲]: فضای هاسدورف و موضعاً فشرده X را در نظر می گیریم. فرض کنیم $V \subseteq X$ باز و $K \subseteq X$ فشرده باشد که $K \subseteq V \subseteq X$. در این صورت $f \in C_c(X)$ وجود دارد که $K \prec f \prec V$.*

اثبات. گزاره (۱۲.۲) از مرجع [۱۸]. □

۳.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۸.۱. *هر فضای نرم دار کامل را یک فضای باناخ گوییم.*

[۲] Urysohns Lemma

فرض کنیم X فضای باناخ، X^* دوگان فضای X و X^{**} دوگان فضای X^* باشد. تعریف می کنیم:

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \qquad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

$$S_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}, \qquad S_{X^{**}} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| = 1\}.$$

تعریف ۹.۱. *تابع حقیقی مقدار p روی فضای برداری X را یک نیم نرم گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α ، داشته باشیم:*

۱. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

۲. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

تعریف ۱۰.۱. *اگر دو عدد حقیقی مثبت α و β وجود داشته باشد که*

$$\alpha\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \beta\|.\|_1,$$

آن گاه گوییم دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ با هم معادلند.

مثال ۱.۱. *فرض کنیم $x \in \mathbb{C}^n$ ، در این صورت نرم های ذیل معادلند.*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, , |x_n|\}.$$

گزاره ۲.۱. *در هر فضای باناخ با بعد متناهی نرم ها با هم معادلند.*

اثبات. چون هر فضای با بعد متناهی روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ با $\mathbb{R}^n$ یکریخت است، کافی است نشان دهیم روی $\mathbb{R}^n$ نرم ها با هم معادلند.
می دانیم به ازای هر $x \in X$ ، اسکالر $\gamma > 0$ و $x_0 \in S_X$ وجود دارد به طوری که $x = \gamma x_0$. ابتدا نشان می دهیم که اگر $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ روی کره واحد با هم معادل باشند، می توان نتیجه گرفت که این دو نرم روی کل فضا با هم معادلند.
اگر $\alpha\|x_0\|_1 \leq \|x_0\|_2 \leq \beta\|x_0\|_1$، لذا

$$\gamma\alpha\|x_0\|_1 \leq \gamma\|x_0\|_2 \leq \gamma\beta\|x_0\|_1,$$

و

$$\alpha\|\gamma x_0\|_1 \leq \|\gamma x_0\|_2 \leq \beta\|\gamma x_0\|_1,$$

در نتیجه $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.
اکنون تابع f را به صورت $f(x) = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$ روی کره واحد تعریف می کنیم. چون نرم یک تابع پیوسته و S_X فشرده است، لذا $f(x)$ یک تابع پیوسته روی کره واحد است که max و min خود را اختیار می کند. فرض کنیم $a \leq f(x) \leq b$، لذا $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$. □

چند نرم معادل روی l_2

فرض کنیم $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_2$ و $x' = (0, x_2, \cdots)$، همچنین (α_n) یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشد که دنباله (α_n)، همگرا به ۰ باشد. قرار می دهیم:

$$\|.\|_S = max\{|x_1|, \|x'\|_2\}, \qquad \|.\|_F = |x_1| + \|x'\|_2.$$

۱. نگاشت خطی، پیوسته و یک به یک $T : l_2 \longrightarrow l_2$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم.

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \cdots).$$

$\|.\|_w$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|x\|_w = (\|x\|_S^2 + \|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

۲. نگاشت خطی و پیوسته $T : l_2 \longrightarrow l_2$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم.

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \cdots).$$

$\|.\|_A$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|x\|_A = (\|x\|_F^2 + \|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

۳. فرض کنیم $U \in C_\circ$، آن گاه $support(U)$ را دنباله $U(n_k)$ نام گذاری می کنیم که $|U(n_k)| \geq |U(n_{k+1})|$. حال $DU(n)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$DU(n) = \begin{cases} \frac{U(n_k)}{2^k} & n = n_k \\ 0 & n \neq n_k \end{cases}$$

همچنین

$$|||U||| = \|DU\|_2.$$

و

$$U = (\frac{1}{2}\|x\|_2, x_1, x_2, x_2, \cdots, \underbrace{x_j, x_j, \cdots, x_j}_{j}, \cdots) \in l_2$$

قرار می دهیم:

$$\|x\|_L = |||U|||.$$

تعریف ۱۱.۱. *فضای نرم دار X را جداپذیر گوییم، هرگاه دارای دنباله چگال شمارش پذیر باشد.*

مثال ۲.۱. ۱. *برای $1 \leq p < \infty$، فضاهای l_p و L_p جدایی پذیرند.*

۲. *فضای l_∞ و L_∞ جدایی پذیر نیستند.*

۳. *فضاهای $c, c_\circ$ و $C[0, 1]$ جدایی پذیرند.*

اثبات. گزاره (۲۶.۱) و (۲۷.۱) از مرجع [۱۰]. □

تعریف ۱۲.۱. مجموعه $C \subseteq X$ *را یک مجموعه محدب گوییم هرگاه به ازای هر* $x, y \in C$ *و هر* $\lambda \in (0, 1)$ *داشته باشیم* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.
برای مثال می توان دایره و مثلث در صفحه را نام برد.

تعریف ۱۳.۱. *فضای نرم دار X را در نظر بگیریم، در این صورت* $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ *را که به ازای هر* $x \in X$ ، $\pi(x)f = f(x)$ *نشاندنی کانونی گوییم.*
π *یک ایزومتری خطی است و همچنین به ازای هر* $x \in X$ ،

$$\|\pi(x)\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

اثبات قضایا و گزاره ها و لم زیر به ترتیب در گزاره (۱.۲)، گزاره (۵.۲)، گزاره (۱۳.۲)، قضیه (۲۱.۲)، گزاره (۷.۳)، لم (۹.۳)، قضیه (۲۷.۳) و قضیه (۱۵.۹) از مرجع [۱۰] آمده است.

قضیه ۳.۱. *(هان-باناخ) فرض کنیم M یک زیر فضا از فضای برداری X ، p یک نیم نرم روی X و f یک تابعک خطی روی M باشد، به طوری که به ازای هر $x \in M$ ، $|f(x)| \leq p(x)$. در این صورت f را می توان به یک تابعک خطی مانند Λ روی X توسیع داد که به ازای هر $x \in X$ ، $|\Lambda x| \leq p(x)$.*

نتیجه ۱.۱. *(قضیه هان-باناخ) اگر X یک فضای نرم دار و $x_\circ \in X$ باشد آن گاه $f \in S_{X^*}$ وجود دارد که $f(x_\circ) = \|x_\circ\|$.*

قضیه ۴.۱. *قضیه جداسازی :فرض کنیم A و B دو مجموعه محدب و مجزا در X باشند. اگر A باز باشد، $f \in X^*$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم $f(a) < \lambda \leq f(b)$.*

قضیه ۵.۱. *قضیه نمایش ریس [۳] :فرض کنیم L یک تابعک خطی پیوسته بر فضای هیلبرت H باشد در اینصورت y منحصربفرد عضو H وجود دارد که به ازای هر $x \in H$، $L(x) =< x, y >$ و $\|L\| = \|y\|$.*

گزاره ۳.۱. *فرض کنیم $(X, \|.\|)$ فضای باناخ و (x_n) یک دنباله در X باشد. در آن صورت دنباله (x_n) به طور ضعیف به x همگراست، $(w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x)$ فقط و فقط وقتی که به ازای هر $x^* \in X^*$ دنباله، $x^*(x_n)$ به $x^*(x)$ میل کند.*

.

لم ۲.۱. *فرض کنیم $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n$ و Λ تابعک های خطی بر فضای برداری X باشند. همچنین $N = \{x : \quad \Lambda_1 x = \cdots = \Lambda_n x = \circ\}$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

۱. *اسکالر هایی چون $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ وجود دارند که*

$$\Lambda = \alpha_1\Lambda_1 + \alpha_2\Lambda_2 + \cdots + \alpha_n\Lambda_n.$$

---

[۳] Riesz

۲. $\gamma < \infty$ وجود دارد به طوری که $|\Lambda x| \leq \gamma max_{1\leq i\leq n}|\Lambda_i x|$.

۳. به ازای هر $x \in N$ $\qquad \Lambda x = 0$.

قضیه ۶.۱. *قضیه گلدشتاین [۴] :فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، در این صورت $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

قضیه ۷.۱. *(اصل انعکاس موضعی) فرض کنیم X یک فضای باناخ و $\varepsilon > 0$ باشد. به ازای هر زیر فضای با بعد متناهی مانند E از X^{**} و هر زیر فضای با بعد متناهی مانند F از X^*، ایزومورفیسم خطی مانند $T : E \longrightarrow X$ وجود دارد، به طوری که*

۱. $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.

۲. به ازای هر $x^{**} \in E$ و هر $x^* \in F$ ، $x^*(T(x^{**})) = x^{**}(x^*)$.

۳. T روی $E \cap X$ همانی است.

تعریف ۱۴.۱. *فضای باناخ X دارای خاصیت کدک -کلی [۵] است، اگر روی کره واحد همگرایی ضعیف و همگرایی نرمی بر هم منطبق باشند.*

تعریف ۱۵.۱. *فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک، H یک زیر مجموعه محدب، بسته و کراندار از X و $f \in X^*$ باشد. به ازای هر عدد حقیقی مثبت δ تعریف می کنیم:*

$$slc(H, f, \delta) = \{h \in H : f(h) \geq sup(f(H)) - \delta\}.$$

نکته ۱.۱. *فرض کنیم $B_n = B(x_n, r_n)$. در این صورت به ازای هر $x^* \in S_{X^*}$ داریم:*

$$\inf x^*(B_n) = x^*(x_n) - r_n.$$

اثبات. می دانیم $x^*(B_X) = \{x^*(x) : \|x\| \leq 1\}$. از طرفی $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\|$، در نتیجه

$$-\|x^*\| \leq x^*(x) \leq \|x^*\|,$$

[۴] Goldstine

[۵] Kadec-Klee

از نامساوی فوق داریم:

$$x^*(B_X) = [-\|x^*\|, \|x^*\|] = [-1, 1].$$

حال نشان می دهیم که $B_n = B(x_n, r_n) = r_nB_X + x_n$.
فرض کنیم $y \in r_nB_X + x_n$، لذا $x \in B_X$ وجود دارد به طوری که $y = r_nx + x_n$.
از این رو

$$|y - x_n| = |r_nx + x_n - x_n| = |r_nx| = r_n|x| \leq r_n.$$

بنابراین $y \in B(x_n, r_n)$، در نتیجه $r_nB_X + x_n \subseteq B(x_n, r_n)$
اکنون فرض کنیم $y \in B(x_n, r_n)$، در نتیجه $|y - x_n| \leq r_n$. و $\frac{y-x_n}{r_n} \in B_X$.
لذا $y \in r_nB_X + x_n$. در نتیجه

$$\begin{aligned} x^*(B_n) &= x^*(r_nB_X + x_n) = r_nx^*(B_X) + x^*(x_n) \\ &= r_n[-1, 1] + x^*(x_n) = [x^*(x_n) - r_n, x^*(x_n) + r_n]. \end{aligned}$$

□

حال به اثبات حقیقت (۳.۶.۲) از مرجع [۹] می پردازیم.

لم ۳.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و دنباله های $(x_n), (y_n) \subseteq S_X$ باشند. دنباله $z_n \in [x_n, y_n]$ را طوری در نظر می گیریم که $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 1$ و $\inf_n\{min(\|x_n - z_n\|, \|y_n - z_n\|)\} > 0$. در این صورت*

$$\lim_{n\to\infty}(min_{0\leq t\leq 1}\|tx_n + (1-t)y_n\|) = 1.$$

اثبات. فرض می کنیم $0 \leq t_n \leq 1$ و $z_n = t_nx_n + (1-t_n)y_n$. چون S_X محدب است، $z_n \in S_X$. حال به ازای هر n ، δ را طوری در نظر می گیریم که $\delta < t_n < 1 - \delta$. بنا به قضیه هان-باناخ دنباله $(f_n) \subseteq S_{X^*}$ وجود دارد به طوری که $f_n(z_n) = \|z_n\|$. بنابراین

$$\|z_n\| = f_n(z_n) = t_nf_n(x_n) + (1-t_n)f_n(y_n).$$