بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

گروه ریاضی

اشتقاق روی جبرهای باناخ

پایان‌نامه دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

توسط

کیانوش پلوان

استاد راهنما:

دکتر فریبا ارشاد

فروردین‌ماه ۸۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: اشتقاق روی جبرهای باناخ ناجابجایی

که توسط کیانوش پلوال دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی

مرکز مشهد تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۵/۱/۲۰ نمره: ۱۷/۵ هفده و نیم درجه ارزشیابی: بسیار خوب

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر فریبا ارشاد	استاد راهنما	استادیار	
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
دکتر میرتقی آقائی	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر علی جلیلیان عطار	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تغییرات لازم:

تقدیم به:

پدر و مادر دلسوز، همسر مهربان و کیانای عزیزم

سپاسگزاری

اکنون که با استعانت ایزد منان برگ دیگری از تاریخ تحصیلی‌ام ورق می‌خورد، بر خود لازم می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ استاد گرانمایه سرکار خانم دکتر ارشاد که در تمام مراحل نگارش و تکمیل این پایان‌نامه مرا راهنمایی نموده‌اند، قدردانی نمایم. و همچنین از سرکار خانم دکتر طالبی که در طی دوره کارشناسی ارشد بزرگوارانه لطفشان شامل حال این حقیر بوده است سپاسگزارم. خداوند را سپاس می‌گویم که موهبت شاگردی در محضر شریف این استاتید بزرگوار را بر من ارزانی فرمود.

و درود بی‌پایان الهی بر پدر و مادر عزیزم، آنان که به فرزندانشان آموختند بهترین راه تعالی، کسب علم و معرفت است.

فهرست

عنوان | صفحه

چکیده

نام خانوادگی دانشجو: پلوان نام: کیانوش

عنوان پایان نامه: اشتقاق روی جبرهای باناخ

استاد راهنما: دکتر فریبا ارشاد

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی محض گرایش : آنالیز

دانشگاه : پیام نور—واحد مشهد

تاریخ فارغ التحصیلی : تیرماه ۱۳۸۵ تعداد صفحه :۵۳

کلید واژه‌ها: جبرباناخ—اشتقاق— ایده آل

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و D اشتقاقی روی A باشد و همچنین فرض کنید

$$K = \{x \in radA : D^n x \in radA \forall n \in I\!N\}$$

در این صورت دو مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهیم ۱— ابتدا در فصل دوم که موضوع بحث ما جبرهای باناخ جابجایی است اثبات می‌کنیم که اگر $S(D) \cap R \subseteq K$ و یا $\bigcap_{n\geq 1} R^n = \{0\}$ و یا K بسته باشد یا اینکه اگر برای هر $n \geq 1$ و هر $\phi \in \Delta A$، $\varphi o D^n$ پیوسته باشد و یا برای بعضی مقادیر n، D^n پیوسته باشد در تمام حالات فوق رادیکال ژاکوبین شامل برد D می‌باشد اما در فصل سوم که موضوع بحث ما جبرهای ناجابجایی است ثابت می‌کنیم که اگر $S(D) \cap R \subseteq K$ یا $\bigcap_{n\geq 1} R^n = \{0\}$ و یا K بسته باشد همچنین اگر

نگاشت القایی $d_K : A/K \longrightarrow A/K$ مرکز ساده باشد و یا d_K به طور طیفی کراندار باشد و یا اینکه برای بعضی مقادیر n، D^n پیوسته باشد در این صورت D ایده‌آل‌های اولیه را با پایا نگه می‌دارد.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر جبر باناخ

۱ــ مقدمه‌ای بر جبر باناخ

در این فصل جبرهای باناخ[۱] و پاره‌ای قضایای وابسته به آن را که در فصلهای بعد به آن نیازمندیم را بیان می‌کنیم. همچنین تعریف‌ها و قضایای مربوط به اشتقاقهای[۲] روی جبرهای باناخ و مفهوم فضای ایده‌آل ماکسیمال[۳]، رادیکال (ژاکوبسن)، پوچ رادیکال[۴] و ایده‌آلهای اول[۵] و اولیه[۶] و قضایای وابسته به آنها را بیان می‌کنیم.

در تمام این فصل F نشان‌دهنده میدان اعداد حقیقی یا مختلط است.

۱ــ۱ جبر باناخ

تعریف ۱ــ۱.۱: فضای برداری A را روی میدان F یک جبر گوئیم اگر روی آن یک عمل ضرب تعریف شده باشد بطوریکه A با این ضرب یک حلقه باشد و داشته باشیم:

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b \quad (\alpha \in F, a.b \in A)$$

فرض کنیم A یک جبر روی میدان F و $\|.\|$ یک نرم روی A باشد. اگر به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ آنگاه A را یک جبر نرمدار[۷] می نامیم. نرمی را که در شرط فوق صدق کند یک نرم

[۱] Banach algebras
[۲] Derivation
[۳] maximal ideal space
[۴] nil radical
[۵] prime ideal
[۶] primitive ideal
[۷] normed algebra

جبری می‌نامیم. هر نرم روی فضای A، متری را بصورت زیر روی آن فضا تعریف می‌کند:

$$d(x,y)=\|x-y\| \quad x,y\in A$$

این متر را متر القاء شده توسط نرم می‌نامند.

یک جبر نرمدار A که نسبت به متر القاء شده توسط نرم آن کامل باشد را جبر باناخ می‌نامند. اگر جبر خاصیت جابجایی داشته باشد جبر باناخ جابجایی[۸] است.

اگر A دارای عضو یکه e باشد می‌توان فرض کرد که $\|e\| = ۱$، زیرا می‌توان روی A یک نرم قرار داد که اولاً دارای خاصیت فوق باشد و ثانیاً با نرم قبلی معادل باشد در این صورت A را جبر باناخ یکدار می‌نامند.

اگر A یک جبر باناخ یکدار با عضو یکه e باشد تابع ϕ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\phi : F &\longrightarrow A\\ \alpha &\longrightarrow \alpha e\end{aligned}$$

ϕ یک همریختی است پس F را می‌توان یک زیر فضای[۹] A در نظر گرفت.

مثال ۱—۲.۱: ساده‌ترین مثال از یک جبر باناخ فضای اعداد مختلط با نرم قدرمطلق است که با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۱—۳.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد و $A=C(X)$ مجموعه تمام توابع مختلط پیوسته روی X باشد اگر ضرب روی A را بصورت نقطه‌ای تعریف کنیم یعنی:

$$(h.g)(x)=h(x).g(x) \quad x\in X$$

آنگاه A با نرم سوپریمم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x\in X\}$ تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود زیرا به راحتی می‌توان نشان داد که $C(X)$ یک فضای باناخ است از طرفی

$$\|h.g\| \;=\; \sup\{|(h,g)(x)| : x\in X\} = \sup\{|h(x).g(x)|; x\in X\}$$

[۸] commutative banach algebra

[۹] sub space

$$\leq \ \sup\{|h(x)| : x \in X\}. \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|f\|.\|g\|$$

بررسی بقیه شرایط براحتی امکان‌پذیر است. پس $C(X)$ یک جبر باناخ جابجایی است و تابع ثابت ۱ عضو یکه $C(X)$ می‌باشد بنابراین $C(X)$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار است.

مثال ۱—۱.۴: فرض کنید X یک فضای باناخ و $A = B(X)$، مجموعه تمام عملگرهای[۱۰] کراندار روی X باشد. اگر ضرب روی A را ترکیب عملگرها و نرم را نرم عملگرها

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}$$

در نظر بگیریم آنگاه A یک جبر باناخ یکدار است زیرا به راحتی می‌توان نشان داد $B(X)$ یک فضای باناخ است و شرکت‌پذیری ضرب نسبت به ضرب اسکالر نیز بوضوح برقرار است. بعلاوه نرم عملگرها یک نرم جبری است زیرا:

$$\begin{aligned} \|ST\| &= \sup\{\|STx\| : \|x\| \leq ۱\} \\ &= \sup\{\|S(T(x))\| : \|x\| \leq ۱\} \\ &\leq \sup\{\|S\|\|Tx\| : \|x\| \leq\} \\ &= \|S\| \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\} \\ &= \|S\|\|T\| \end{aligned}$$

قضیه ۱—۱.۵: هر جبر باناخ غیر یکدار را می‌توان در یک جبر باناخ یکدار نشاند.

اثبات: فرض کنید A یک جبر باناخ بدون عضو یکه باشد قرار می‌دهیم $A_۱ = A \oplus I\!F$ اعمال جبری روی $A_۱$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر $a.b \in A$ و $\alpha, \beta \in I\!F$

[۱۰] operator

الف: $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$

ب: $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$

ج: $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$

نرم $\|.\|_1$ را روی A_1 بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|(a, \alpha)\|_1 = \|a\| + |\alpha|$$

می‌توان نشان داد که A_1 با اعمال فوق یک جبر باناخ با عضو یکه $(0, 1)$ است. حال تابع ϕ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow A_1 \\ a &\longrightarrow (a, 0) \end{aligned}$$

داریم: $\|\phi(a)\|_1 = \|(a, 0)\|_1 = \|a\|$ پس ϕ طولپاست.

همچنین بوضوح ϕ یک به یک است داریم

$$\phi(ab) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \phi(a)\phi(b)$$

و

$$\phi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \phi(a) + \phi(b)$$

پس ϕ یک همریختی طولپا[11] از A به A_1 است بنابراین با یک زیرفضای بسته A_1 یکریخت است.

تعریف ۱–۱.۶: عضو a از جبر A را پوچتوان[12] گویند اگر به ازای یک $k \in \mathbb{N}$، $a^k = 0$. عضو a را خودتوان[13] گویند اگر $a = a^2$.

همانطور که در تعریف جبر بیان شد، اگر A یک جبر باشد آنگاه با عمل ضرب جبر یک حلقه است.

---

[11] Isometric
[12] nilpotent
[13] idempotent

تعریف ۱—۱.۷: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. منظور از ایده‌آل (چپ، راست و دوطرفه) A یک زیرفضای برداری A است بطوریکه نسبت به حلقه یک ایده‌آل (چپ، راست و دوطرفه) باشد.

تعریف ایده‌آل سره، ماکسیمال و مینیمال نیز مشابه تعریف در نظریه حلقه است.

تعریف ۱—۱.۸: ایده‌آل سره I از جبر A را اول گویند هر گاه به ازای هر دو ایده‌آل دلخواه I_1 و I_2 از A، اگر $I_1 I_2 \subseteq I$ آنگاه $I_2 \subseteq I$ یا $I_1 \subseteq I$.

ایده‌آل چپ I از A را مدولی[14] گویند اگر عضو $e \in A$ موجود باشد به قسمیکه $A(1-e) = \{a - ae : a \in A\} \subseteq I$. بعبارت دیگر e یک عضو یکه راست A به پیمانه I است. بطور مشابه I یک ایده‌آل راست مدولی است اگر یک عضو یکه چپ به پیمانه I موجود باشد. توجه کنید که اگر e یک یکه راست (چپ) A به پیمانه یک ایده‌آل چپ (راست) I باشد آنگاه $e+m (m \in I)$ و $e^k (k \in \mathbb{N})$ نیز چنین است.

تعریف ۱—۱.۹: اگر ایده‌آل دو طرفه I مدولی راست و چپ باشد آنگاه I را مدولی می‌نامند.

توجه کنید که اگر ایده‌آل دو طرفه I مدولی باشد آنگاه عضو $a \subseteq A$ موجود است. که هم یکه چپ و هم یکه راست به پیمانه I است زیرا:

فرض کنید e_1 یک راست و e_2 یکه چپ به پیمانه I باشند آنگاه $e_1 - e_2 e_1 \in I$ و $e_2 - e_2 e_1 \in I$. پس $e_2 - e_1 \in I$. بنابراین یکی از e_1 و e_2 هم یکه چپ و هم یکه راست به پیمانه I می‌باشد.

اگر A یکدار باشد بوضوح هر ایده‌آل آن مدولی است.

تعریف ۱—۱.۱۰: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد.

الف: هر ایده‌آل چپ مدولی سره A داخل یک ایده‌آل چپ ماکسیمال قرار می‌گیرد.

ب: هر ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال، یک ایده‌آل چپ ماکسیمال است.

---
[14] modular

ج: اگر A یکدار باشد هر ایده‌آل چپ سره، داخل یک ایده‌آل چپ ماکسیمال قرار می‌گیرد.

ر.ک [۲] قضیه (۲.۹)

قضیه ۱—۱۱.۱: هر ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال یک جبر باناخ، بسته است.

اثبات: فرض کنید J یک ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال A و e یک عضو یکه راست مدولی برای J باشد. فرض کنید $x \in J$ و $\|e-x\| < ۱$. همچنین فرض کنید $u = \sum_{n=۱}^{\infty}(e-x)^n$ در اینصورت $u - u(e-x) = e - x$ بنابراین $e = x + ux + u - ue \in J$ در نتیجه $J = A$ و این تناقض است. بنابراین $J \cap \{x \in A : \|e-x\| < ۱\} = \phi$. بنابراین $\bar{J}$ یک ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال بسته سره A می‌باشد و بنابر ماکسیمال بودن J، $J = \bar{J}$ پس حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۱—۱۲.۱: فرض کنید E یک مجموعه ناتهی و X یک فضای خطی نرمدار باشد نگاشت f از E بتوی X کراندار نامیده می‌شود اگر $\{\|f(s)\| : s \in E\}$ یک مجموعه کراندار از اعداد حقیقی باشد.

قضیه ۱—۱۳.۱: عمل ضرب روی جبر باناخ A یک نگاشت پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $x \longrightarrow \{x_n\}$ و $y \longrightarrow \{y_n\}$ برای اثبات حکم کافی است، نشان دهیم که $xy \longrightarrow \{x_n y_n\}$ داریم:

$$\begin{aligned}\|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y\| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|y_n - y\|\|x\|\end{aligned}$$

پس حکم برقرار است. □

۱—۲ طیف، شعاع طیفی و جابجاگر

تعریف ۱—۱.۲: فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد. به ازای هر عضو $a \in A$ وارون (چپ، راست و دوطرفه) را همان وارون (چپ، راست و دوطرفه) نسبت به حلقه A در نظر می‌گیریم.

عضوی که وارون چپ و راست داشته باشد را عضو وارونپذیر[۱۵] (یکال) می‌نامند. بنابر قضایای نظریه حلقه وارون هر عضو وارونپذیر منحصر بفرد است وارون a را با a^{-1} نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $G(A)$ مجموعه تمام اعضای وارونپذیر A باشد. براحتی می‌توان نشان داد که $G(A)$ با عمل ضرب یک گروه است. این گروه را گروه عناصر وارونپذیر A می‌نامند.

تعریف ۱—۲.۲: اگر a و b دو عضو جبر باناخ A باشد جابجاگر[۱۶] a و b را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a,b] = ab - ba$$

بوضوح A جابجایی است اگر و تنها اگر جابجاگر هر دو عضو آن صفر باشد.

تعریف ۱—۳.۲: نگاشت F روی حلقه R را جابجاگر گویند هر گاه به ازای هر $x \in R$

$$[F(x), x] = 0$$

نگاشت F روی حلقه R را مرکز ساز[۱۷] گویند هر گاه به ازای هر $x \in R$،

$$[F(x), x] \in Z(R)$$

تعریف ۱—۴.۲: زیرمجموعه E از جبر A را در نظر بگیرید جابجاگر E عبارتست از مجموعه

$$\{a \in A | ax = xa \quad \forall x \in E\}$$

جابجاگر E را با $C(E)$ نمایش می‌دهیم و $C(C(E))$ را دومین جابجاگر E می‌نامند.

[۱۵] invertable
[۱۶] commutator
[۱۷] centralizer

قضیه ۱—۵.۲: فرض کنید E یک زیرمجموعه جبر A باشد احکام زیر برقرارند:

الف: $C(E)$ یک زیر جبر A است.

ب: اگر A یکدار باشد $C(E)$ حاوی عضو یکه است.

ج: اگر A نرمدار باشد آنگاه $C(E)$ بسته باشد.

د: E یک زیرمجموعه جابجایی A است اگر و تنها اگر $E \subseteq C(E)$.

هـ: اگر $E \subseteq F$ آنگاه $C(F) \subseteq C(E)$.

و: اگر E یک زیرمجموعه جابجایی A باشد آنگاه $C(C(E))$ یک زیرجبر جابجایی A است و $E \subseteq C(C(E)) \subseteq C(E)$.

ز: مرکز A یک زیرجبر جابجایی A است.

ر.ک [۲] قضایای (۲.۱۵) و (۳.۱۵).

نتیجه ۱—۶.۲: فرض کنید E زیرمجموعه جبر باناخ A باشد $C(E)$ زیرجبر بسته A است. اگر E یک زیرمجموعه جابجایی A باشد آنگاه $C(E) \cap C(C(E))$ یک زیرجبر جابجایی و بسته A حاوی E می‌باشد.

تعریف ۱—۷.۲: فرض کنید A یک جبر مختلط یکدار باشد به ازای هر $a \in A$، طیف[۱۸] a بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \text{ وارونپذیر نیست}\}$$

در صورتیکه ابهامی بوجود نیاید طیف a را با $\sigma(a)$ نمایش می‌دهیم.

در صورتیکه A یکدار نباشد طیف اعضای آن را طیف متناظر آن در یکدار شده A در نظر می‌گیریم.

---
[۱۸] spectrum

تعریف ۱—۸.۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد شعاع طیفی[۱۹] $a \in A$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

اگر $r(a) = ۰$ آنگاه a را شبه پوچتوان[۲۰] می‌نامیم.

مجموعه تمام اعضای شبه پوچتوان A را با $Q(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱—۹.۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$ آنگاه:

الف) $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است.

ب) $r(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{۱}{n}}$.

اثبات: ر.ک. [۱].

قضیه ۱—۱۰.۲: فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$ به قسمیکه $\|a\| < ۱$ آنگاه $۱ - a$ وارونپذیر است و (با فرض $a^\circ = ۱$) داریم:

$$(۱ - a)^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} a^n$$

اثبات: فرض کنید $\|a\| = r < ۱$ و $S_n = \sum_{k=۰}^{n} a^k$ بوضوح برای هر $m, n \in I\!N$، $n < m$ داریم:

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=n+۱}^{m} a^k\| \leq \sum_{k=n+۱}^{m} \|a^k\| = \sum_{k=n+۱}^{m} r^k = \frac{r^{n+۱}}{۱ - r}$$

چون $r < ۱$ پس وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند $\frac{r^{n+۱}}{۱-r}$ به سمت صفر میل می‌کند بنابراین $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است پس همگراست فرض کنید $S = \sum_{k=۰}^{\infty} a^k$ داریم: $aS_n = S_{n+۱} - ۱$.

با میل دادن n به سمت بینهایت نتیجه می‌شود:

$$as = s - ۱ \Longrightarrow (۱ - a)s = ۱$$

---

[۱۹] spectral radius
[۲۰] Quasi nilpotent

بطریق مشابه $s(\text{۱} - a) = \text{۱}$ پس $\text{۱} - a$ وارونپذیر است و

$$(\text{۱} - a)^{-\text{۱}} = s = \sum_{k=\circ}^{\infty} a^k$$

□

لم ۱—۱۱.۲: فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a, b \in A$، $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\lambda \neq \circ$، $\lambda\text{۱} - ab$ وارونپذیر است اگر و تنها اگر $\lambda\text{۱} - ba$ وارونپذیر باشد.

اثبات: فرض کنید u وارون $\lambda\text{۱} - ab$ باشد داریم $u(\lambda\text{۱} - ab) = (\lambda\text{۱} - ab)u = \text{۱}$ بنابراین

$$\lambda u - (ab)u = \text{۱} \longrightarrow (ab)u = \lambda u - \text{۱}$$

حال

$$\begin{aligned}(\lambda\text{۱} - ba)(bua + \text{۱}) &= \lambda bua + \lambda\text{۱} - b(ab)ua - ba \\ &= \lambda bua + \lambda\text{۱} - b(\lambda u - \text{۱})a - ba = \lambda\text{۱}\end{aligned}$$

بطریق مشابه

$$(bua + \text{۱})(\lambda\text{۱} - ba) = \lambda\text{۱}$$

بنابراین $\lambda\text{۱} - ba$ در A وارونپذیر است. □

نتیجه ۱—۱۲.۲: به ازای هر $a.b \in A$،

$$\sigma(ab) \cup \{\circ\} = \sigma(ba) \cup \{\circ\}$$

قضیه ۱—۱۳.۲: (نگاشت طیفی[۲۱]) فرض کنید A یک جبر باناخ و $a \in A$، اگر p یک چندجمله‌ای غیر ثابت با ضرایب مختلط باشد آنگاه $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

[۲۱] Spectral mapping