بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

بررسی برخی روش‌های کلاسیک و تکاملی برای حل مسئله کمترین مربعات غیرخطی و کاربرد آن در حل مسائل کنترل بهینه

توسط:

صفیه قاسمی صاحبی

استاد راهنما:

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

استاد مشاور:

دکتر امید سلیمانی فرد

شهریور ۱۳۸۹

به نام خدا

بررسی برخی روش‌های کلاسیک و تکاملی برای حل مسئله کمترین مربعات غیرخطی و کاربرد آن در حل مسائل کنترل بهینه

توسط:

صفیه قاسمی صاحبی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر امید سلیمانی فرد استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر مرتضی گرشاسبی استادیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر علی عباسی ملایی استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سید ناصر هاشمی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدرم

که وجودش برایم همه مهر است. او که پاکی و صداقتش الگوی همیشگی زیستنم است. در برابر وجودش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت بر دستانش بوسه می زنم.

مادرم

او که توانش رفت تا به توانایی رسم و مویش سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند. صدای روح بخشش دلگرمی من و دعای خالصانه اش گره گشای کار من است.

سپاسگزاری

سپاس بی‌کران بر ایزد یکتا، آن یگانه مطلق هستی که رحمت واسعه‌اش فرصتی مغتنم داد تا به اقتضای توان خود، از محضر اساتیدی گرانقدر بهره جویم و ره توشه‌ای از بار علمی آن‌ها برگیرم. اکنون به رسم ادب، با تواضع تام و از صمیم قلب

سپاسگزاری می‌کنم از

جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی، استاد راهنمای خوبم که به دانش و پویایی، مهربانانه، راهم را آسان پیمودن نمود.

جناب آقای دکتر امید سلیمانی فرد، استاد مشاور محترم که صمیمانه مرا به علم خویش همراهی کرد.

جناب آقای دکتر گرشاسبی و *جناب آقای دکتر عباسی ملایی*، که برای گذراندن آخرین مرحله دانشجویی، بزرگوارانه یاریم کردند.

چکیده

بررسی برخی روش‌های کلاسیک و تکاملی برای حل مسئله کمترین مربعات غیرخطی و کاربرد آن در حل مسائل کنترل بهینه

به وسیله‌ی:

صفیه قاسمی صاحبی

هدف از این پایان‌نامه بررسی برخی روش‌های کلاسیک برای حل مسئله کمترین مربعات غیرخطی، مقایسه با برخی روش‌های تکاملی و بیان کاربردهایی از این روش‌ها در مسائلی با داده‌های بزرگ و مسائل کنترل بهینه می‌باشد. ابتدا برخی روش‌های موجود برای حل مسئله کمترین مربعات را بیان نموده، نتایج حاصله از این روش‌ها را با روش‌های تکاملی مقایسه کرده و کارایی آن‌ها را با هم مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. در ادامه با توجه به این نکته که در کاربردهایی مانند سیستم‌های هواشناسی به دلیل وجود داده‌های بسیار زیاد، نمی‌توان با روش‌های کلاسیک بیان شده این‌گونه مسائل را حل کرد، ضمن معرفی برخی روش‌های تقریبی بر پایه روش گوس-نیوتن، همگرایی این روش‌ها را با توجه به بعضی شرایط و قضایا روی مسئله بررسی می‌کنیم. هم‌چنین یک کاربرد از مسئله کمترین مربعات غیرخطی در مسائل کنترل بهینه را تحت یک طرح تلفیقی از یک روش کارای کمترین مربعات غیرخطی و روش تابع جریمه ارائه می‌نماییم. در پایان با ارائه چند مثال، کارایی این روش را برای مسائل کنترل بهینه نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی. مسئله کمترین مربعات غیرخطی، کنترل بهینه، تابع جریمه، روش‌های تکاملی، روش‌های تقریبی گوس-نیوتن.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز و جبرخطی

در این بخش برخی مفاهیم اولیه که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمندیم، بیان می‌شود. تمام مضامین ارائه شده در این بخش از مراجع [۱]، [۲]، [۳] و [۱۰] نقل شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

یک بردار n بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد. آن‌گاه یک **نرم برداری** که توسط نماد $\|\mathrm{x}\|$ نمایش داده می‌شود، یک تابع پیوسته از مؤلفه‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ از x، یک مقدار حقیقی تعریف شده بر روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که دارای خواص زیر است:

۱. برای هر $\mathrm{x} \neq 0$، $\|\mathrm{x}\| > 0$ و اگر x یک بردار صفر باشد، $\|\mathrm{x}\| = 0$،

۲. به ازای هر بردار $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ و به ازای همه اسکالرهای α، $\|\alpha\mathrm{x}\| = |\alpha|\|\mathrm{x}\|$،

۳. به ازای هر بردار $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$، $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$.

تعریف ۲.۱.۱. **نرم اقلیدسی** یا طول بردار x به‌صورت $\|\mathrm{x}\|_{۲} = (\sum\limits_{i=۱}^{n} {x_i}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود که در آن x_iها مؤلفه‌های بردار x هستند.

تعریف ۳.۱.۱. **نرم بی‌نهایت یا نرم بیشینه** به‌صورت $\|\mathrm{x}\|_{\infty} = \max\limits_{i} |x_i|$ تعریف می‌شود که در آن x_iها مؤلفه‌های بردار x هستند.

ملاحظه ۴.۱.۱. در سرتاسر رساله منظور از $\|.\|$، همان نرم اقلیدسی است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آن‌گاه **نرم ماتریسی** $\|A\|$ با خواص زیر تعریف می‌شود:

۱. $\|A\| \geq ۰$، $\|A\| = ۰$ اگر و فقط اگر A یک ماتریس صفر باشد،

۲. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ به ازای هر اسکالر α،

۳. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

قضیه ۶.۱.۱. *دنباله* $\mathrm{x}^{(۱)}, \mathrm{x}^{(۲)}, \ldots$ *به* α **همگرا** *است اگر و فقط اگر*

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathrm{x}^{(k)} - \alpha\| = ۰.$$

تعریف ۷.۱.۱. گوییم دنباله $\{\mathrm{x}_k |\, k \geq ۰\}$ همگرا به α با مرتبه همگرایی $p > ۰$ است اگر

$$\|\mathrm{x}_{k+۱} - \alpha\| \leq c \|\mathrm{x}_k - \alpha\|^p \quad k \geq ۰,$$

که در آن c کمیتی ثابت است و $c \geq ۰$. بعضی از انواع همگرایی‌ها را به‌صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

۱. اگر $p = ۱$ و $۰ < c < ۱$، همگرایی به‌دست آمده **همگرایی خطی** نامیده می‌شود،

۲. اگر $p = ۲$ باشد، **همگرایی درجه دوم** داریم،

۳. اگر $\frac{\|\mathrm{x}_{k+۱} - \alpha\|}{\|\mathrm{x}_k - \alpha\|} \to ۰$، زمانی‌که $k \to \infty$، آن‌گاه **همگرایی فوق خطی** [۱] به‌دست می‌آید.

[۱] Superlinear convergence

تعریف ۸.۱.۱. تابع $\mathtt{f}$ بر مجموعه X از $\mathbb{R}^n$، **پیوسته لیپ شیتس (انقباضی)** است اگر $\gamma > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $\mathtt{x}, \mathtt{y} \in X$،

$$\|\mathtt{f}(\mathtt{x}) - \mathtt{f}(\mathtt{y})\| \leq \gamma \|\mathtt{x} - \mathtt{y}\|.$$

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ **محدب** گفته می‌شود، اگر برای هر دو نقطه $\mathtt{x}_۱, \mathtt{x}_۲ \in X$ و برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم، $\lambda \mathtt{x}_۱ + (۱ - \lambda)\mathtt{x}_۲ \in X$.

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس مربعی حقیقی $A = (a_{ij})$، از مرتبه n را **معین مثبت** گوییم هرگاه:

۱. ماتریس A متقارن باشد،

۲. برای هر بردار ناصفر $\mathtt{x}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\mathtt{x}^T A \mathtt{x} > ۰$.

تعریف ۱۱.۱.۱. ماتریس مربعی حقیقی $A = (a_{ij})$ از مرتبه n را **نیمه معین مثبت** می‌نامیم هرگاه، ماتریس A متقارن باشد و برای هر بردار $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم، $\mathtt{x}^T A \mathtt{x} \geq ۰$.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **نامنفرد** نامیده می‌شود اگر $\operatorname{rank}(A) = n$ باشد، در غیر این‌صورت ماتریس A **منفرد** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. **شعاع طیفی** ماتریس مربعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|,$$

که در آن $\lambda_i,\ i = ۱, \ldots, n$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$، b یک بردار در $\mathbb{R}^m$ و $\mathtt{x}$ یک بردار حقیقی در $\mathbb{R}^n$ باشد به‌قسمی که تابع $\|\mathtt{r}(\mathtt{x})\| = \|A\mathtt{x} - b\|$ کمینه شود. آن‌گاه دستگاه معادلات $A^T A \mathtt{x} = A^T b$، **دستگاه معادلات نرمال** نامیده می‌شود. در اینجا $\mathtt{r}(\mathtt{x})$ باقیمانده دستگاه به ازای بردار $\mathtt{x}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. ماتریس $A^+ = (A^T A)^{-۱} A^T$، هنگامی‌که A یک ماتریس $(m \times n)$ و $(m \geq n)$ بوده و دارای رتبه n باشد، یا ماتریس $A^+ = A^T (A A^T)^{-۱}$، زمانی‌که A یک ماتریس $(m \times n)$ و $(m < n)$ بوده و دارای رتبه m باشد، **شبه معکوس** A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض می‌کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. آن‌گاه ماتریس $B = A^TA$ مربعی مرتبه n و نیمه معین مثبت است، زیرا B متقارن است و برای هر $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$،

$$\mathrm{x}^T B\mathrm{x} = \mathrm{x}^T A^T A\mathrm{x} = (A\mathrm{x})^T(A\mathrm{x}) = \|A\mathrm{x}\|^۲ \geq ۰.$$

پس مقادیر ویژه B نامنفی‌اند و فرض می‌کنیم این مقادیر ویژه به‌صورت $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_n \geq ۰$ باشند. حال تعریف می‌کنیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

σ_iها را **مقادیر تکین** A می‌نامند. واضح است که

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_n \geq ۰.$$

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. آن‌گاه ماتریس‌های متعامد $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ و یک ماتریس $\Sigma_{m\times n}$ وجود دارند به‌طوری‌که*

$$A = U\Sigma V^T. \tag{۱.۱}$$

*ماتریس $\Sigma_{m\times n}$ **شبه قطری** و به شکل زیر است*

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{bmatrix} D & \vdots & O_۱ \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ O_۲ & \vdots & O_۳ \end{bmatrix},$$

که در آن $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ ماتریس‌های صفر می‌باشند و D یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر تکین غیرصفر A هستند، یعنی

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_۱ & & & O \\ & \sigma_۲ & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sigma_r \end{bmatrix},$$

و

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_r > ۰ = \sigma_{r+۱} = \sigma_{r+۲} = \cdots = \sigma_n.$$

*نمایش A به‌صورت (۱.۱) **تجزیه مقدار تکین** A یا SVD نامیده می‌شود.*

تعریف ۱.۱.۱۸. با توجه به قضیه ۱.۱.۱۷، ستون‌های ماتریس‌های متعامد $V_{n\times n}$ و $U_{m\times m}$ را به ترتیب **بردارهای منفرد راست** و **بردارهای منفرد چپ** ماتریس A می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۹. نقطه $\mathtt{x}$ یک **نقطه درونی** X است هرگاه یک همسایگی از $\mathtt{x}$ مانند N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N \subset X$.

تعریف ۱.۱.۲۰. X یک **مجموعه باز** است هرگاه، هر نقطه X یک نقطه درونی‌اش باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض V و W فضاهای نرم‌دار باشند و U یک زیرمجموعه باز از V باشد. تابع $\mathtt{f} : U \to W$، **تابع مشتق‌پذیر فِرچت** [۲] در $\mathtt{x} \in U$ نامیده می‌شود اگر یک عملگر خطی پیوسته

$$A_{\mathtt{x}} : V \to W$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{\mathtt{h}\to \circ} \frac{||\mathtt{f}(\mathtt{x}+\mathtt{h}) - \mathtt{f}(\mathtt{x}) - A_{\mathtt{x}}(\mathtt{h})||}{||\mathtt{h}||} = \circ.$$

مشتق فِرچت در فضاهای متناهی بعد، همان مشتق معمولی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض $\mathtt{f}$ یک نگاشت $\mathtt{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ باشد که در آن U یک مجموعه باز است. اگر $\mathtt{f}$ مشتق‌پذیر فِرچت در نقطه $a \in U$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع عبارت است از

$$D\mathtt{f}(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

که در آن $D\mathtt{f}(a)(\nu) = \mathtt{J}_{\mathtt{f}}(a)\nu$، که $\mathtt{J}_{\mathtt{f}}(a)$ ماتریس ژاکوبین $\mathtt{f}$ در a تعریف می‌شود.

۱-۲ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی کلاسیک

در این بخش برخی مفاهیم اولیه بهینه‌سازی بیان می‌شود. تمام مضامین ارائه شده در این بخش از مرجع [۳۶] نقل شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. تابع $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مفروض است. گوییم تابع $F(\mathtt{x})$ یک **کمینه کننده سراسری** در $\mathtt{x} = \mathtt{x}^*$ دارد، اگر به ازای هر $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $F(\mathtt{x}^*) \leq F(\mathtt{x})$، یا به طور معادل

$$\mathtt{x}^* = \arg\min_{\mathtt{x}} F(\mathtt{x}).$$

---

[۲] Frechet Differentiable Function

تعریف ۱.۲.۲. تابع $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض است. گوییم تابع $F(\mathtt{x})$ یک **کمینه کننده موضعی** دارد اگر یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\mathtt{x} \in \mathbb{R}^n$ که در نامساوی $\|\mathtt{x} - \mathtt{x}^*\| < \delta$ صدق کند داشته باشیم $F(\mathtt{x}^*) \leq F(\mathtt{x})$.

تعریف ۱.۲.۳. فرض می‌کنیم تابع هدف F، مشتق پذیر باشد. **بسط تیلور** را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F(\mathtt{x}+\mathtt{h}) = F(\mathtt{x}) + \mathtt{h}^T\mathtt{g} + \frac{1}{2}\mathtt{h}^T\mathtt{H}\mathtt{h} + O(\|\mathtt{h}\|^3), \tag{۱.۲}$$

که در آن بردار

$$\mathtt{g} \equiv \mathtt{F}'(\mathtt{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathtt{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathtt{x}) \end{bmatrix}, \tag{۱.۳}$$

بردار گرادیان، و ماتریس

$$\mathtt{H} \equiv \mathtt{F}''(\mathtt{x}) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathtt{x})\right], \tag{۱.۴}$$

ماتریس هسیان [۳] تابع هدف هستند.

قضیه ۱.۲.۴. ***شرط لازم برای یک کمینه کننده موضعی .*** *اگر $\mathtt{x}^*$ یک کمینه کننده موضعی باشد، آن‌گاه $\mathtt{g}^* \equiv \mathtt{F}'(\mathtt{x}^*) = 0$.*

در اینجا از عنوان خاصی به نام نقطه تعادل [۴]، برای آرگومان‌هایی که در شرط لازم صدق کنند استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. اگر $\mathtt{g}_s = \mathtt{F}'(\mathtt{x}_s) = 0$ باشد، آن‌گاه $\mathtt{x}_s$ یک **نقطه تعادل** برای F نامیده می‌شود.

از طرفی دیگر برای اینکه مشخص شود نقطه تعادل یک کمینه کننده موضعی است یا نه، باید عبارت مرتبه دوم در بسط تیلور (۱.۲) را در نظر بگیریم. با جایگذاری $\mathtt{x}_s$ در (۱.۲) خواهیم داشت

$$F(\mathtt{x}_s+\mathtt{h}) = F(\mathtt{x}_s) + \frac{1}{2}\mathtt{h}^T\mathtt{H}_s\mathtt{h} + O(\|\mathtt{h}\|^3), \tag{۱.۵}$$

[۳] Hessian

[۴] Stationary point

که در آن $H_s = F''(x_s)$. اگر H_s معین مثبت باشد آن گاه مقادیر ویژه آن از یک عدد $\delta > 0$، بزرگتر هستند و $h^T H_s h > \delta ||h||^2$. این رابطه نشان می‌دهد که برای h به اندازه کافی کوچک، عبارت دوم در سمت راست معادله (۵.۱) بر عبارت سوم آن چیره می‌شود. در نتیجه، مجموع این دو عبارت همواره مثبت است. این مطلب به بیان قضیه زیر منتهی می‌شود.

قضیه ۶.۲.۱. ***شرط کافی برای یک کمینه کننده موضعی.*** *فرض می‌کنیم x_s یک نقطه تعادل باشد و $F''(x_s)$ معین مثبت باشد. آن‌گاه x_s یک کمینه کننده موضعی است.*

۱-۳ بررسی برخی روش‌های تکاملی

اکثر روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی دارای این اشکال عمده هستند که به محض رسیدن به اولین نقطه‌ی بهینه موضعی متوقف شده و توانایی خروج از این نقطه و حرکت به سوی نقطه بهینه مطلق را ندارند. این روش‌ها طی یک فرمول یا قانون معین از نقطه‌ای خاص در فضای جستجو به نقاط دیگر می‌روند. این رویکرد (روش نقطه به نقطه) از این جهت خطرناک است که در فضای جستجوی چند بهینه‌ای احتمال قرار گرفتن در بهینه موضعی وجود دارد. از سال ۱۹۶۰ تقلید از رفتار موجودات زنده برای استفاده در الگوریتم‌های قدرتمند برای مسائل بهینه سازی مورد توجه قرار گرفت که **تکنیک‌های محاسبات تکاملی** نام گرفتند. تکنیک‌های محاسبات تکاملی، برخلاف الگوریتم‌های جستجوی متداول، روی یک مجموعه از جواب‌ها در فضای جستجو عمل می‌کنند و با استفاده از رقابتی که بین جواب‌ها ایجاد می‌کنند، می‌توانند خیلی سریع جواب بهینه را برای مسائل بهینه‌سازی پیچیده پیدا کنند. وجه اشتراک تکنیک‌های تکاملی آن است که بر خلاف روش‌های ریاضی مرسوم، برای حرکت به سوی پاسخ بهینه مسئله، نیازی به اطلاعات گرادیان مرتبه اول و یا مرتبه دوم تابع هدف ندارد. این ویژگی، الگوریتم‌های تکاملی را برای حل مسائلی که در آن‌ها تابع هدف یا قیود مسئله نسبت به متغیرهای کنترلی مشتق پذیر نیستند مناسب می‌کند. یک سری تکنیک‌های محاسباتی جدید ابداع شده‌اند که رفتار اجتماعی را شبیه‌سازی کرده‌اند. عمده دلیلی که می‌توان برای رفتار اجتماعی موجودات زنده آورد، بهینگی آن می‌باشد. به این ترتیب منطقی به نظر می‌رسد که برای حل مسائل بهینه‌سازی این رفتار اجتماعی را شبیه‌سازی کنیم. بدین منظور در این بخش برخی روش‌های تکاملی را به اختصار بررسی می‌کنیم.

۱-۳-۱ الگوریتم ژنتیک

در طبیعت تنوع موجودات در اختلافی است که در کروموزم‌های آن‌ها وجود دارد و این تفاوت در ساختار و رفتار افراد یک جمعیت، باعث قدرت بقای متفاوت می‌شود. چرا که تنوع ساختار و رفتار به نوبه خود بر روی نرخ زاد و ولد اثر می‌گذارد. موجوداتی که توانایی بیشتری برای انجام فعالیت‌ها در محیط دارند (برای مثال موجودات متکامل)، دارای نرخ زاد و ولد بالاتری هستند و به‌طور طبیعی موجوداتی که برازندگی یا تطابق کمتری با محیط دارند، دارای نرخ پایین‌تری از زاد و ولد هستند. بنابراین با گذشت زمان تعداد نفراتی که رفتار و ساختار مناسب‌تری دارند افزایش می‌یابد و جمعیت رو به بهبودی و تکامل می‌رود. بر اساس این مفهوم از تکثیر بقای طبیعی و تکثیر بقای احسن که به‌وسیله چارلز داروین [۵] در سال ۱۸۵۹ ، بیان شده است، بعد از چند دوره زمانی و گذشت چند نسل، کل جمعیت تمایل دارد موجوداتی را بیشتر در خود داشته باشد که با تغییر کروموزم‌هایشان، ساختار و رفتار آن‌ها قادر به انجام بهتر کارها در محیط و تولید مثل بهتر می‌شود [۲۵]. بنابراین در طی زمان، ساختار افراد جامعه به علت بقای طبیعی تغییر می‌کند و هنگامی این تفاوت‌های قابل اندازه‌گیری را در ساختار افراد که ناشی از تطابق با محیط اطراف است می‌بینیم، می‌گوییم که جمعیت تکامل یافته است. در این فرآیند، ساختار توسط تطبیق مشخصات افراد جامعه با محیط ایجاد می‌شود. الگوریتم ژنتیک [۶] (GA)، در حالت کلی با یک مجموعه از جواب‌های ممکن اولیه (که به‌صورت تصادفی و یا به‌صورت ابتکاری تولید می‌شود) که به آن جمعیت اولیه گوییم، شروع می‌شود. عناصر هر جمعیت را به اصطلاح نفر [۷] گوییم. الگوریتم ژنتیک با انتخاب تعدادی از زوج‌های جمعیت جاری به‌عنوان والدین و انجام عمل ترکیب بر روی آن‌ها چند جواب ممکن یا فرزند از هر کدام از زوج‌های والدین برای جمعیت جدید تولید می‌کند. علاوه بر این تعدادی از جواب‌های بد (یعنی جواب‌هایی با تطابق بسیار کم و یا با مقدار تابع هدف زیاد) از جمعیت جاری خارج می‌شوند. این فرآیند ادامه دارد تا اینکه شرط پایان برقرار شود. شرط پایان می‌تواند برای مثال یک بازه زمانی محدود و یا یک تعداد تکرار محدود باشد. در حین اجرای الگوریتم جهش‌ها و مهاجرت‌هایی به طور متناوب برای بهبود جمعیت انجام می‌شود. جهش و مهاجرت با تغییر بعضی از افراد و یا جایگزین کردن آن‌ها با افراد بهتر صورت می‌گیرد. گاهی به طور متناوب از روش‌های بهینه موضعی نیز برای بهبود جمعیت استفاده می‌شود که این الگوریتم‌ها را الگوریتم‌های ادغامی گوییم. جستجو در فضا را می‌توان به چند قسمت تقسیم کرد که به این کار رقابت

---

[۵] Charles Darwin

[۶] Genetic Algorithm

[۷] Individual

گوییم. یک رقابت، یعنی اجرای الگوریتم ژنتیک با جمعیت‌های اولیه متفاوت و توقف آن‌ها قبل از همگرایی و سپس ساختن یک جمعیت بهتر با انتخاب جواب‌های نهایی هر یک از این اجراها. شمای کلی الگوریتم ژنتیک به‌صورت زیر است

گام ۰. **مقادیر اولیه.** M رشته به‌طور تصادفی به‌عنوان جمعیت اولیه، حداکثر تعداد تکرار t_{max}،
تعیین درصدهای p_c برای برش، p_i برای مهاجرت، p_l برای نخبه پروری، p_m برای جهش.
قرار می‌دهیم $t = ۰$ و میزان برازندگی هر رشته را محاسبه می‌کنیم.
گام ۱. **شرط توقف.** اگر $t = t_{max}$ و یا همگرایی به حد دلخواه از لحاظ برازندگی رسیده است، بهترین جواب در تکرار جاری به عنوان جواب تقریباً بهینه می‌باشد و الگوریتم خاتمه می‌یابد.
گام ۲. **نخبه پروری.** به تعداد p_l رشته از بهترین جواب‌های نسل جاری را به نسل $t + ۱$ کپی می‌کنیم.
گام ۳. **مهاجرت.** به تعداد p_i جواب ممکن جدید به طور دلخواه تولید و به مخزن جواب انتقال می‌دهیم.
گام ۴. **برش.** به تعداد $\frac{p_c}{۲}$ زوج رشته‌های متمایز از نسل جاری (t)، انتخاب و عمل برش یا ترکیب را بر روی هر دوتای آن‌ها اعمال و جواب‌های حاصل را به مخزن جواب انتقال می‌دهیم.
گام ۵. **جهش.** به تعداد p_m رشته از تکرار جاری انتخاب و جهش روی هر کدام انجام و به مخزن جواب‌ها انتقال می‌دهیم.
گام ۶. **انتخاب.** از مخزن جواب به اندازه رشته انتخاب و به نسل $t + ۱$ انتقال می‌دهیم.
گام ۷. **افزایش.** $t := t + ۱$ و به گام یک می‌رویم.

الگوریتم ژنتیک

۱-۳-۲ بهینه‌سازی ازدحام ذرات

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات [۸] (PSO)، رفتار اجتماعی گروه پرندگان یا ماهی‌ها را شبیه‌سازی می‌کند و ایده اصلی آن از حرکت جمعی پرندگان یا ماهیان برای یافتن غذا اقتباس شده است که در سال ۱۹۹۵ میلادی توسط

[۸] Particle Swarm Optimization