دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب

استاد راهنما

دکتر محمد علی پرتانیان

استاد مشاور

دکتر سید ابوالفضل علوی

پژوهشگر:

مجید هاتفی

مهر ۱۳۹۳

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: مجید هاتفی

تاریخ و امضا:

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای /خانم **مجید هاتفی** دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳ با عنوان:

کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب

در ساعت مورخه در محل دانشکده دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید . پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای / خانم مجید هاتفی به دفاع از موضوع پرداخت وبه سئوالات آنها پاسخ گفت . سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره برابر درجه برای آن تعیین گردید . به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای/ خانم مجید هاتفی به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی کاربردی شناخته می شود .

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	امضـــــــــــــــا
۱	استاد راهنما	دکتر محمد علی پرتانیان	استادیار	
۲	استاد مشاور	دکتر سید ابوالفضل علوی	استادیار	
۳	استاد داور	دکتر محمود امین طوسی	استادیار	
۶	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر بلبلیان	استادیار	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه: دکتر عبد الله قلی زاده

رونوشت:

- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع
- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع
- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو
- دانشجو

تأییدیه ی صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب مجید هاتفی به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳ دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می نمایم که کلیه ی نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: مجید هاتفی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

☐ بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر محمد علی پرتانیان

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

ساحت مقدس آقا علی ابن موسی الرضا (ع)

بزرگان علم و فرهنگ ایران

و پدر و مادر مهربانم که در زندگی مدیون آنهایم.

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر پرتانیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر علوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین لازم می‌دانم از گروه پارسی‌لاتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

مجید هاتفی

مهر ۱۳۹۳

فرم چکیده ی پایان نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه حکیم سبزواری

نام خانوادگی دانشجو:هاتفی	نام:مجید	ش. دانشجویی:۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳
استاد راهنما: دکتر محمد علی پرتانیان		
استاد مشاور: دکتر سید ابوالفضل علوی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی کاربردی	گرایش:تحقیق در عملیات
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع:مهر ۱۳۹۳	تعداد صفحات: ۱۲۱
عنوان پایان نامه: کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب		
کلید واژه ها:برنامه ریزی غیر خطی، توابع محدب، آنالیز پایداری، توابع مکمل، شبکه عصبی		

چکیده: در این پایان نامه به معرفی سه مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب می پردازیم. ایده اصلی در مدل اول [۱] و دوم [۲] بر مبنای شرایط بهینگی کاروش کان تاکر و مدل سوم [۳] تبدیل کردن مسأله، به یک مسأله مینیمم سازی نامقید، به کمک تابع شایستگی $\varphi^{\varepsilon}_{FB}$، است. پایداری و همگرایی در انتهای هر مدل، به طور مفصل بررسی شده است. در فصل پنجم نیز، با ارائه چند مثال، سرعت و دقت همگرایی شبکه های عصبی پایش شده است.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست الگوریتم‌ها

فهرست علائم اختصاری

پیش گفتار

گستردگی و پیچیدگی مسائل برنامه ریزی که گاهی در دنیای واقعی شامل تعداد بسیار زیاد متغیر و محدودیت است و کارایی محدود روشها برای حل برخی از مسائل نیاز به تعداد گام زیادی دارد؛ لزوم ارائه ی الگوریتم هایی با سرعت مناسب و کارا برای مسائل پیچیده را مشخص می کند. از جمله ی مسائل پیچیده در دنیای واقعی مسائل برنامه ریزی غیر خطی می باشد که اکثر روش های حل آن به صورت تقریبی جواب بهینه را بدست می آورد. از جمله این روش ها ، روشهای جستجوی خطی مانند روش اصلاح شده ی نیوتن، روش گرادیان مزدوج و روش بهینه سازی زیرگرادیان است [۴]، [۵]، [۶]. ریاضیدان ها همیشه بدنبال یافتن روش های کارآمدتری برای حل چنین مسائلی بوده و هستند. یکی از قوی ترین و در عین حال ساده ترین این روش ها مدل های دیفرانسیلی می باشد. ما بر آن هستیم تا در این رساله از این روش برای حل تقریبی مسائل برنامه ریزی غیر خطی استفاده کنیم. هدف در این پایان نامه معرفی سه مدل دیفرانسیلی گرادیان [۱]، [۲] و [۳] برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب می باشد. ایده ی اصلی برگرداندن مسئله برنامه ریزی غیر خطی، به استفاده از توابع مکمل به یک مسئله مینیمم سازی نامقید معادل با تابع هدف انرژی می باشد . مدل دیفرانسیل، گرادیانی است که بطور مستقیم با استفاده از مشتقات تابع انرژی تعریف می شود. همچنین نشان خواهیم داد، مدل پیشنهادی پایدار لیاپانوف است و به یک جواب بهینه دقیق از مسئله اصلی همگرا است. همچنین می توان دریافت که عامل مقیاس گذاری بزرگتر به میزان همگرایی بهتر مسیر جواب، منجر می شود. سرعت همگرایی و دقت مدل ها با مثال های گوناگون نشان داده خواهد شد و نشان دهنده ضرورت پایان نامه جهت بررسی می باشد.

این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شده است. فصل اول معرفی برنامه ریزی غیر خطی محدب، فصل دوم شرایط بهینگی یک جواب برای مسائل برنامه ریزی غیر خطی و فصل سوم به بررسی پایداری یک دستگاه دینامیکی، می پردازیم. در فصل چهارم به معرفی توابع مکمل و سه مدل دیفرانسیلی می پردازیم. در نهایت در فصل پنجم با آوردن چند مثال عملکرد این سه مدل را با هم مقایسه می کنیم.

فصل ۱

مقدمه و پیش نیاز ها

۱-۱ برنامه ریزی غیر خطی محدب

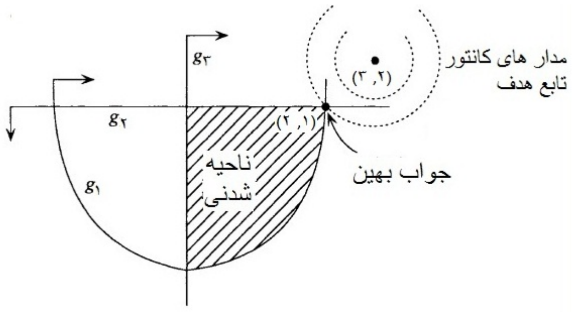
شکل کلی مسائل برنامه ریزی غیر خطی [۱] به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t: \quad & g_j(x) \leqslant 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, l \\ & x \in S \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

که در آن $S \subseteq \mathcal{R}^n$، و $f, g_j, h_i : S \longrightarrow \mathcal{R}$. جواب مساله ۱-۱، برداری به صورت $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است، که باید در قید های مساله ۱-۱، صدق کند و تابع f را مینیمم نماید. به f، تابع هدف [۲] یا تابع مزیت [۳] و به هر کدام از قید های $g_j(x) \leqslant 0$، قید های نامساوی [۴] و به هر کدام از قید های $h_i(x) = 0$ ، قید های تساوی [۵] گوییم. به بردار $x \in S$، که در تمامی قید ها صدق می کند را یک جواب شدنی [۶] و به مجموعه تمام نقاط شدنی، ناحیه شدنی می گوییم. هدف مسئله برنامه ریزی غیر خطی پیدا کردن یک نقطه شدنی $\overline{x}$، است طوری که برای هر جواب شدنی x داشته باشیم: $f(x) \geqslant f(\overline{x})$ به نقطه $\overline{x}$، نقطه بهین [۷] ، مسئله می گوییم. اگر بیش از یک نقطه بهین داشته باشیم، به آنها جواب بهین متناوب [۸] گفته می شود.

---

[۱] Nonlinear Programming
[۲] Objective function
[۳] Criterion function
[۴] Inequality constraint
[۵] Equality constraint
[۶] Feasible
[۷] Optimal
[۸] Alternative



شکل ۱-۱: جواب هندسی مسئله برنامه ریزی غیر خطی.

مثال ۱-۱-۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲ \\ s.t: \quad & x_۱^۲ - x_۲ - ۳ \leqslant ۰ \\ & x_۲ - ۱ \leqslant ۰ \\ & -x_۱ \leqslant ۰ \end{aligned}$$

نمودار ۱-۱ ناحیه شدنی را مشخص می کند. هدف مسئله پیدا کردن نقطه ای شدنی است، که دارای کمترین مقدار با توجه به ناحیه شدنی برای $(x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲$، است. توجه داریم که نقطه $(x_۱, x_۲)$، که در معادله $c = (x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲$، صدق می کند، نمایش یک دایره به شعاع $\sqrt{c}$، و مرکز $(۳, ۲)$، است، که به آن مدار کانتور [۹] تابع هدف به ازای مقدار c، گوییم. چون هدف مسئله کمینه کردن تابع هدف است، پس باید مدار کانتوری را پیدا کنیم که دارای کمترین شعاع بوده و ناحیه شدنی را قطع کند. همانطور که در نمودار ۱-۱، دیده می شود، کوچکترین مدار به ازای $c = ۲$، بدست می آید که تابع هدف را در نقطه $(۲, ۱)$، قطع می کند. بنابراین جواب بهین نقطه $(۲, ۱)$، با مقدار برازش ۲، خواهد بود. در این روش جواب بهین را به کمک مدارهای کانتور تابع هدف طوری پیدا می کنیم که تابع هدف دارای کمترین مقدار در محل تقاطع [۱۰] با ناحیه شدنی باشد. روشن است که این روش برای مسئله های با ابعاد کوچک مناسب است و برای مسئله های با بیش از دو متغیر مناسب نخواهد بود.

مفروضات ۱-۱-۲. در سرتاسر این پایان نامه قرارداد های زیر را خواهیم داشت.

الف) بردار ها همگی ستونی هستند، مگر غیر آن بیان شود.

ب) نماد T، علامت ترانهاده [۱۱] است. بعنوان مثال، $x^T = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$.

[۹] Contour circle
[۱۰] Intersect
[۱۱] Transpose

ج) فضای مورد بحث در این پایان نامه، فضای اقلیدسی [۱۲] حقیقی است، که از بردار های با مؤلفه های حقیقی با بعد n تشکیل شده است و با $\mathcal{R}^n$، نمایش می دهیم.

د) $\|.\|$ نرم $L^{۲}$، در $\mathcal{R}^n$ است و به صورت زیر معرفی می شود:

$$\forall x = (x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{R}^n; \qquad \|x\|^{۲} = x^T . x = \sum_{k=۱}^{n} x_k^{۲}$$

و) اگر $f : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$ ، تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه گرادیان تابع را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_{۱}}, \frac{\partial f}{\partial x_{۲}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)^T \in \mathcal{R}^{n\times ۱} \qquad (۲-۱)$$

و مشتق مرتبه دوم تابع را به نماد $\nabla^{۲} f = H$، نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{۱۱}(x) & f_{۱۲}(x) & \ldots & f_{۱n}(x) \\ f_{۲۱}(x) & f_{۲۲}(x) & \ldots & f_{۲n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n۱}(x) & f_{n۲}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{bmatrix} \qquad (۳-۱)$$

و اگر $F = (F_{۱}, F_{۲}, \ldots, F_m) : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$ نگاشتی مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\nabla F = \mathcal{J}_F = \frac{\partial(F_{۱}, F_{۲}, \ldots, F_m)}{\partial(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{۱}}{\partial x_{۱}} & \frac{\partial F_{۱}}{\partial x_{۲}} & \ldots & \frac{\partial F_{۱}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_{۲}}{\partial x_{۱}} & \frac{\partial F_{۲}}{\partial x_{۲}} & \ldots & \frac{\partial F_{۲}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{۱}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_{۲}} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m\times n} \qquad (۴-۱)$$

[۱۲] Euclidean space