



دانشگاه حکیم بسزوری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی  
گرایش تحقیق در عملیات

# کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب

استاد راهنما

دکتر محمد علی پرتانیا

استاد مشاور

دکتر سید ابوالفضل علوی

پژوهشگر:

مجید هانفی

مهر ۱۳۹۳

## سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد      کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست و درست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که از همه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و ممنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که باراه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مابینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی:      مجید هاتفی

تاریخ و امضا:

## صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تلاوت آیاتی چند از کلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای / خانم مجید هاتفی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳ با عنوان:

### کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب

در ساعت مورخه در محل دانشکده دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید . پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای / خانم مجید هاتفی به دفاع از موضوع پرداخت و به سئوالات آنها پاسخ گفت . سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره برابر درجه برای آن تعیین گردید . به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای / خانم مجید هاتفی به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی کاربردی شناخته می شود .

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر محمد علی پرتانین	استادیار	
۲	استاد مشاور	دکتر سید ابوالفضل علوی	استادیار	
۳	استاد داور	دکتر محمود امین طوسی	استادیار	
۶	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر بلبلیان	استادیار	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه: دکتر عبد الله قلی زاده

رونوشت:

- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع
- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع
- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو
- دانشجو

## تأییدیه ی صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب مجید هاتفی به شماره دانشجویی ۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳ دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می نمایم که کلیه ی نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم ( قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ... ) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم. در ضمن، مسئولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: مجید هاتفی

تاریخ و امضا:

## مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به

شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلامانع است.

بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر محمد علی پرتانیان

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

ساحت مقدس آقا علی ابن موسی الرضا (ع)

بزرگان علم و فرهنگ ایران

و پدر و مادر مهربانم که در زندگی مدیون آنهایم.

## قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر پرتانیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر علوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین لازم می‌دانم از گروه پارسی‌لاتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

مجید هاتفی

مهر ۱۳۹۳



دانشگاه سبزوار

فرم چکیده ی پایان نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی  
مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: هاتفی	نام: مجید	ش. دانشجویی: ۹۱۱۳۱۳۳۰۳۳
استاد راهنما: دکتر محمد علی پرتانیا		
استاد مشاور: دکتر سید ابوالفضل علوی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی کاربردی	گرایش: تحقیق در عملیات
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع: مهر ۱۳۹۳	تعداد صفحات: ۱۲۱
عنوان پایان نامه: کاربردی از توابع شایستگی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب		
کلید واژه ها: برنامه ریزی غیر خطی، توابع محدب، آنالیز پایداری، توابع مکمل، شبکه عصبی		
<p>چکیده: در این پایان نامه به معرفی سه مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی محدب می پردازیم. ایده اصلی در مدل اول [۱] و دوم [۲] بر مبنای شرایط بهینگی کاروش کان تاکر و مدل سوم [۳] تبدیل کردن مسأله، به یک مسأله مینیمم سازی نامقید، به کمک تابع شایستگی <math>\varphi_{FB}^E</math>، است. پایداری و همگرایی در انتهای هر مدل، به طور مفصل بررسی شده است. در فصل پنجم نیز، با ارائه چند مثال، سرعت و دقت همگرایی شبکه های عصبی پایش شده است.</p>		



# فهرست مطالب

د	فهرست تصاویر
و	فهرست جداول
ز	فهرست الگوریتم‌ها
ح	فهرست علائم اختصاری
۱	پیش‌گفتار
۲	فصل ۱: مقدمه و پیش‌نیازها
۲	۱-۱ برنامه ریزی غیر خطی محدب
۵	۲-۱ آنالیز محدب
۷	۳-۱ تکیه‌گاه یک مجموعه در یک نقطه مرزی
۸	۴-۱ توابع محدب و تعمیم آنها
۱۰	۵-۱ پیوستگی توابع محدب
۱۰	۶-۱ مشتق جهتی توابع محدب
۱۱	۷-۱ زیرگرادیان
۱۳	۸-۱ مشتق توابع محدب
۱۶	۹-۱ ماتریس معین مثبت
۱۷	۱۰-۱ کمینه یک تابع محدب
۲۲	فصل ۲: شرایط بهینگی و دوگان
۲۲	۱-۲ شرایط هندسی بهینگی
۲۶	۲-۲ شرایط بهینگی مرتبه اول فریز و جان

۲۸	شرایط بهینگی مرتبه اول کاروش کان تاکر
۳۰	شرایط لازم و کافی بهینگی مرتبه دوم برای مسائل مقید
۳۲	مثال کورمیک

### فصل ۳: آنالیز پایداری

۳۵	مقدمه
۳۵	۱-۳
۳۸	تابع معین مثبت
۳۸	۲-۳
۳۹	پایداری لیاپانوف
۳۹	۳-۳
۴۲	پایداری لیاپانوف برای توابع مربعی
۴۲	۴-۳
۴۳	پایداری کرازوفسکی
۴۳	۵-۳
۴۵	روش خطی سازی لیاپانوف
۴۵	۶-۳
۴۶	روش گرادیان متغیر
۴۶	۷-۳
۴۹	اصل تغییر ناپذیری
۴۹	۸-۳

### فصل ۴: شبکه های عصبی

۵۳	مقدمه
۵۳	۱-۴
۵۳	اجزاء و قابلیت های مغز انسان
۵۳	۲-۴
۵۴	۱-۲-۴ نورون ها و سیناپس ها
۵۴	۵۴
۵۵	۲-۲-۴ یادگیری سیناپسی
۵۵	۵۵
۵۵	شبکه های عصبی مصنوعی
۵۵	۳-۴
۵۷	مقایسه مدل سازی کلاسیک در مقایسه با مدل سازی شبکه عصبی
۵۷	۴-۴
۵۷	۱-۴-۴ چگونگی مدل سازی کلاسیک
۵۷	۵۷
۵۸	۲-۴-۴ چگونگی مدل سازی شبکه عصبی
۵۸	۵۸
۵۸	۳-۴-۴ طرز کار مدل سلول عصبی
۵۸	۵۸
۵۹	۴-۴-۴ طرز کار شبکه عصبی
۵۹	۵۹
۶۲	۵-۴-۴ میزان یادگیری
۶۲	۶۲
۶۳	۶-۴-۴ مونتوم
۶۳	۶۳
۶۳	شبکه های عصبی بازگشتی
۶۳	۵-۴
۶۴	شبکه های هاپفیلد
۶۴	۶-۴

۶۵	۷-۴ مدل ریاضی شبکه عصبی
۶۷	۸-۴ تاریخچه کاربرد شبکه های عصبی در حل مسائل بهینه سازی
۶۸	۹-۴ توابع مکمل
۷۲	۱۰-۴ مدل عفتی-بایمانی
۷۴	۱-۱۰-۴ پایداری و همگرایی مدل
۷۶	۱۱-۴ مدل ناظمی
۷۷	۱-۱۱-۴ پایداری و همگرایی مدل
۸۱	۱۲-۴ مدل ناظمی - عفتی بکمک توابع شایستگی
۸۲	۱-۱۲-۴ بازنویسی و مدل گرادیان
۸۴	۲-۱۲-۴ پایداری و همگرایی مدل
۹۳	فصل ۵: مقایسه ی شبکه های عصبی
۹۳	۱-۵ مقدمه
۹۷	۲-۵ نتیجه گیری
۹۹	مراجع
۱۰۲	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۶	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۰	پیوست آ: خطی سازی سیستم های دینامیکی غیر خطی
۱۱۱	پیوست ب: برنامه ها و الگوریتم های کامپیوتری

# فهرست تصاویر

۳	۱-۱	جواب هندسی مسئله برنامه ریزی غیر خطی.
۵	۲-۱	مجموعه غیر محدب و محدب
۷	۳-۱	ابر صفحه و نیم فضا های متناظر
۷	۴-۱	تکیه گاه مجموعه $S$ ، در نقطه $\bar{x}$
۹	۵-۱	توابع محدب و مقعر
۱۱	۶-۱	اپی گراف و هیپو گراف
۱۲	۷-۱	تفسیر هندسی زیر گرادیان
۱۲	۸-۱	نمودار مثال ۱-۷-۴
۱۸	۹-۱	مینیمم محلی و سراسری
۱۹	۱۰-۱	نمودار مربوط به قضیه های ۱-۱۰-۳ و ۱-۱۰-۶
۲۰	۱۱-۱	نمودار مثال ۱-۲
۲۵	۱-۲	$F_0 \cap G_0 \neq \emptyset$
۲۶	۲-۲	$F_0 \cap G_0 = \emptyset$
۲۷	۳-۲	ناحیه شدنی
۳۴	۴-۲	دو حالت جواب بهین
۳۷	۱-۳	فضای وضعیت و مسیر جواب
۳۹	۲-۳	پایداری و پایداری مجانبی به شکل لیاپانوف
۵۰	۳-۳	اصل تغییر ناپذیری
۵۱	۴-۳	نوسان پاندول
۵۴	۱-۴	ساختار یک نورون
۵۴	۲-۴	یادگیری سیناپسی

۵۸	مدل شبکه عصبی	۳-۴
۵۹	مدل ریاضی سلول عصبی یا پرسپترون	۴-۴
۶۰	توپولوژی فید فوروارد	۵-۴
۶۴	ساختار یک شبکه عصبی بازگشتی	۶-۴
۶۵	نورون با یک ورودی	۷-۴
۶۵	نورون با چند ورودی	۸-۴
۶۶	شبکه دو لایه	۹-۴
۸۴	نمودار شبکه عصبی ۳۹-۴	۱۰-۴
۹۴	روش عفتی - بایمانی برای مثال ۱-۱-۵	۱-۵
۹۴	روش ناظمی برای مثال ۱-۱-۵	۲-۵
۹۵	روش ناظمی - عفتی برای مثال ۱-۱-۵	۳-۵
۹۵	روش عفتی - بایمانی برای مثال ۲-۱-۵	۴-۵
۹۵	روش ناظمی برای مثال ۲-۱-۵	۵-۵
۹۶	روش ناظمی - عفتی برای مثال ۲-۱-۵	۶-۵
۹۶	روش ناظمی برای مثال ۳-۱-۵	۷-۵
۹۶	روش ناظمی - عفتی برای مثال ۳-۱-۵	۸-۵
۱۱۲	ب-۱ کد عفتی - بایمانی مثال ۱-۱-۵	
۱۱۳	ب-۲ کد ناظمی مثال ۱-۱-۵	
۱۱۴	ب-۳ کد ناظمی - عفتی مثال ۱-۱-۵	
۱۱۵	ب-۴ کد عفتی - بایمانی مثال ۲-۱-۵	
۱۱۶	ب-۵ کد ناظمی مثال ۲-۱-۵	
۱۱۷	ب-۶ کد ناظمی - عفتی مثال ۲-۱-۵	
۱۱۸	ب-۷ کد ناظمی مثال ۳-۱-۵	
۱۱۹	ب-۸ کد ناظمی - عفتی مثال ۳-۱-۵	

## فهرست جداول

۹۷	جدول زمانی اجرای برنامه ها بر حسب ثانیه.	۱-۵
۹۷	جدول خطاهای اجرای برنامه ها $\ fval - f^*\ $ .	۲-۵
۹۷	جدول جواب های بهین مثال ۱-۵-۱.	۳-۵
۹۸	جدول جواب های بهین مثال ۲-۵-۱.	۴-۵
۹۸	جدول جواب های بهین مثال ۳-۵-۱.	۵-۵

# فهرست الگوریتم‌ها

ب-۱ الگوریتم اویلر لاگرانژ ..... ۱۲۰

# فهرست علائم اختصاری

$ANN$	شبکه عصبی مصنوعی
$\nabla$	گرادیان
$CNP$ ( $CNLP$ )	برنامه ریزی غیر خطی محدب
$diag(A)$	قطر ماتریس $A$
$epi(f)$	نقاط بالای نمودار تابع $f$
$FJ$	فریز - جان
$\mathcal{J}$	ماتریس ژاکوبین
$H$	ماتریس هسین
$hyp(f)$	نقاط زیر نمودار تابع $f$
$graph(f)$	نقاط روی نمودار تابع $f$
$KKT$	کاروش کان تاکر
$Max$	ماکزیمم یا بیشینه
$Min$	مینیمم یا کمینه
$NCP$	مسائل مکمل غیر خطی
$S_\alpha$	مجموعه تراز
$S.t$	به طوری که
$T$	ترانهاده
$\  \cdot \ $	نرم $L^2$



## پیش‌گفتار

گسترده‌گی و پیچیدگی مسائل برنامه‌ریزی که گاهی در دنیای واقعی شامل تعداد بسیار زیاد متغیر و محدودیت است و کارایی محدود روشها برای حل برخی از مسائل نیاز به تعداد گام‌های زیاد دارد؛ لزوم ارائه‌ی الگوریتم‌هایی با سرعت مناسب و کارا برای مسائل پیچیده را مشخص می‌کند. از جمله‌ی مسائل پیچیده در دنیای واقعی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد که اکثر روش‌های حل آن به صورت تقریبی جواب بهینه را بدست می‌آورد. از جمله این روش‌ها، روشهای جستجوی خطی مانند روش اصلاح شده‌ی نیوتن، روش‌های گرادیان مزدوج و روش بهینه‌سازی زیرگرادیان است [۴]، [۵]، [۶]. ریاضیدان‌ها همیشه بدنبال یافتن روش‌های کارآمدتری برای حل چنین مسائلی بوده و هستند. یکی از قوی‌ترین و در عین حال ساده‌ترین این روش‌ها مدل‌های دیفرانسیلی می‌باشد. ما بر آن هستیم تا در این رساله از این روش برای حل تقریبی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده کنیم. هدف در این پایان‌نامه معرفی سه مدل دیفرانسیلی گرادیان [۱]، [۲] و [۳] برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی محدب می‌باشد. ایده‌ی اصلی برگرداندن مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، به استفاده از توابع مکمل به یک مسئله مینیمم‌سازی نامقید معادل با تابع هدف انرژی می‌باشد. مدل دیفرانسیل، گرادیانی است که بطور مستقیم با استفاده از مشتقات تابع انرژی تعریف می‌شود. همچنین نشان خواهیم داد، مدل پیشنهادی پایدار لیاپانوف است و به یک جواب بهینه دقیق از مسئله اصلی همگرا است. همچنین می‌توان دریافت که عامل مقیاس‌گذاری بزرگتر به میزان همگرایی بهتر مسیر جواب، منجر می‌شود. سرعت همگرایی و دقت مدل‌ها با مثال‌های گوناگون نشان داده خواهد شد و نشان‌دهنده ضرورت پایان‌نامه جهت بررسی می‌باشد.

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است. فصل اول معرفی برنامه‌ریزی غیرخطی محدب، فصل دوم شرایط بهینگی یک جواب برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی و فصل سوم به بررسی پایداری یک دستگاه دینامیکی، می‌پردازیم. در فصل چهارم به معرفی توابع مکمل و سه مدل دیفرانسیلی می‌پردازیم. در نهایت در فصل پنجم با آوردن چند مثال عملکرد این سه مدل را با هم مقایسه می‌کنیم.

# فصل ۱

## مقدمه و پیش نیازها

### ۱-۱ برنامه ریزی غیر خطی محدب

شکل کلی مسائل برنامه ریزی غیر خطی<sup>۱</sup> به صورت زیر است:

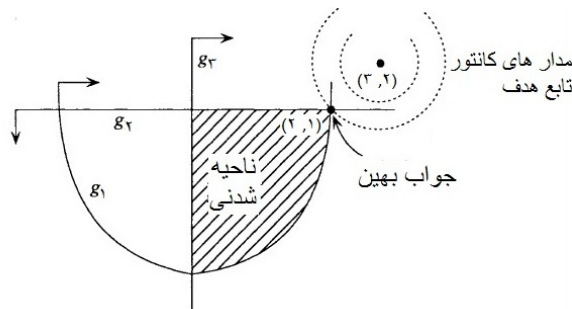
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_j(x) \leq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \\ & h_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \\ & x \in S \end{aligned} \tag{1-1}$$

که در آن  $S \subseteq \mathcal{R}^n$ ، و  $f, g_j, h_i : S \rightarrow \mathcal{R}$ . جواب مساله ۱-۱، برداری به صورت  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  است، که باید در قیدهای مساله ۱-۱، صدق کند و تابع  $f$  را مینیمم نماید. به  $f$ ، تابع هدف<sup>۲</sup> یا تابع مزیت<sup>۳</sup> و به هر کدام از قیدهای  $g_j(x) \leq 0$ ، قیدهای نامساوی<sup>۴</sup> و به هر کدام از قیدهای  $h_i(x) = 0$ ، قیدهای تساوی<sup>۵</sup> گوئیم. به بردار  $x \in S$ ، که در تمامی قیدها صدق می کند را یک جواب شدنی<sup>۶</sup> و به مجموعه تمام نقاط شدنی، ناحیه شدنی می گوئیم. هدف مسئله برنامه ریزی غیر خطی پیدا کردن یک نقطه شدنی  $\bar{x}$ ، است طوری که برای هر جواب شدنی  $x$  داشته باشیم:  $f(x) \geq f(\bar{x})$  به نقطه  $\bar{x}$ ، نقطه بهین<sup>۷</sup>، مسئله می گوئیم. اگر بیش از یک نقطه بهین داشته باشیم، به آنها جواب بهین متناوب<sup>۸</sup> گفته می شود.

<sup>۱</sup>Nonlinear Programming  
<sup>۲</sup>Objective function  
<sup>۳</sup>Criterion function  
<sup>۴</sup>Inequality constraint

<sup>۵</sup>Equality constraint  
<sup>۶</sup>Feasible  
<sup>۷</sup>Optimal

<sup>۸</sup>Alternative



شکل ۱-۱: جواب هندسی مسئله برنامه ریزی غیر خطی.

مثال ۱-۱-۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 - x_2 - 3 \leq 0 \\ & x_2 - 1 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

نمودار ۱-۱ ناحیه شدنی را مشخص می کند. هدف مسئله پیدا کردن نقطه ای شدنی است، که دارای کمترین مقدار با توجه به ناحیه شدنی برای  $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$  است. توجه داریم که نقطه  $(x_1, x_2)$ ، که در معادله  $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = c$  صدق می کند، نمایش یک دایره به شعاع  $\sqrt{c}$ ، و مرکز  $(3, 2)$  است، که به آن مدار کانتور<sup>۹</sup> تابع هدف به ازای مقدار  $c$ ، گوئیم. چون هدف مسئله کمینه کردن تابع هدف است، پس باید مدار کانتوری را پیدا کنیم که دارای کمترین شعاع بوده و ناحیه شدنی را قطع کند. همانطور که در نمودار ۱-۱ دیده می شود، کوچکترین مدار به ازای  $c = 2$ ، بدست می آید که تابع هدف را در نقطه  $(2, 1)$ ، قطع می کند. بنابراین جواب بهین نقطه  $(2, 1)$ ، با مقدار برآزش ۲، خواهد بود. در این روش جواب بهین را به کمک مدارهای کانتور تابع هدف طوری پیدا می کنیم که تابع هدف دارای کمترین مقدار در محل تقاطع<sup>۱۰</sup> با ناحیه شدنی باشد. روشن است که این روش برای مسئله های با ابعاد کوچک مناسب است و برای مسئله های با بیش از دو متغیر مناسب نخواهد بود.

مفروضات ۱-۱-۲. در سرتاسر این پایان نامه قرارداد های زیر را خواهیم داشت.

الف) بردار ها همگی ستونی هستند، مگر غیر آن بیان شود.

ب) نماد  $T$ ، علامت ترانپوز<sup>۱۱</sup> است. بعنوان مثال،  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

<sup>۹</sup>Contour circle

<sup>۱۰</sup>Intersect

<sup>۱۱</sup>Transpose

ج) فضای مورد بحث در این پایان نامه، فضای اقلیدسی<sup>۱۲</sup> حقیقی است، که از بردارهای با مؤلفه های حقیقی با بعد  $n$  تشکیل شده است و با  $\mathcal{R}^n$ ، نمایش می دهیم.

د)  $\|\cdot\|$  نرم  $L^2$ ، در  $\mathcal{R}^n$  است و به صورت زیر معرفی می شود:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{R}^n; \quad \|x\|^2 = x^T \cdot x = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

و) اگر  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ، تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه گرادیان تابع را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \in \mathcal{R}^{n \times 1} \quad (2-1)$$

و مشتق مرتبه دوم تابع را به نماد  $H = \nabla^2 f$ ، نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

و اگر  $F = (F_1, F_2, \dots, F_m): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$  نگاشتی مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\nabla F = \mathcal{J}_F = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad (4-1)$$

<sup>۱۲</sup>Euclidean space