دانشگاه تربيت معلم

دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

پايان نامه كارشناسي ارشد رياضي محض

عنوان : درون ريختي هاي فشرده روي بعضي از جبرهاي ليپشيتس توابع مشتق پذير

تدوين : الهه شيرين كلام

استاد راهنما : طاهر قاسمي هنري

بهمن ۱۳۸۸

ABSTRACT

Let $A(X)$ be the uniform algebra of all continuous complex-valued functions on the compact plane set X, which are analytic in the interior of X. For $0 < \alpha \leq 1$, The Lipschitz algebra, $Lip(X, \alpha)$, is defined by

$$Lip(X,\alpha) = \{f : X \to \mathbb{C} : p_\alpha(f) = \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}.$$

Clearly, $Lip(X, \alpha)$ is a Banach function algebra under the norm $\|f\|_\alpha = \|f\|_X + p_\alpha(f)$. We now define $Lip_A(X, \alpha) = Lip(X, \alpha) \cap A(X)$ and for the perfect compact plane set X, we define $Lip^n(X, \alpha)$ as the algebra of all complex-valued functions having derivatives up to order n on X, which belong to $Lip(X, \alpha)$. The algebra $Lip_A(X, \alpha)$ under the above norm is a Banach function algebra on X, and $Lip^n(X, \alpha)$ under the norm

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_X + p_\alpha(f^{(k)})}{k!},$$

is also a Banach function algebra on a class of perfect compact plane sets X. Moreover, these algebras are natural on certain compact plane sets X, that is, their maximal ideal spaces are homeomorphic with X.

Let $Lip^\infty(X, \alpha)$ be the subalgebra of $Lip(X, \alpha)$ consisting of all functions f with derivatives of all orders for which $f^{(k)} \in Lip(X, \alpha)$ for all k.

Let $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of possitive numbers such that $M_0 = 1$ and

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \leq \frac{M_{m+n}}{M_n.M_m},$$

for all $m, n \in \mathbb{N}$. Let

$$Lip(X, M, \alpha) = \{f \in Lip^\infty(X, \alpha) : \ \|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}\|_X + p_\alpha(f^{(n)})}{M_n} < \infty \ \}.$$

For certain compact plane sets X, $Lip(X, M, \alpha)$ is a Banach funcion algebra on X under the above norm. It is also natural if we impose some conditions on the sequence $M = \{M_n\}$.

Now let B be a commutative semisimple unital Banach algebra and $T : B \to B$ be a unital endomorphism (i.e. T takes the unit element of B to itself). Then there exists

a continuous mapping $\varphi : M(B) \to M(B)$ such that $\widehat{Tf} = \hat{f} \circ \varphi$ for all $f \in B$. In this case we say that φ induces T. In particular, when B is a natural Banach function algebra on X, there exists a self-map $\varphi : X \to X$ such that $Tf = f \circ \varphi$ for all $f \in B$.

If B is a natural uniform subalgebra of $A(X)$ or $Lip_A(X, \alpha)$ and $\varphi(X) \subseteq intX$ or φ is a constant on X, then φ induces a compact endomorphism on B. For the converse we deduce some results for certain plane sets X, when α =1.

For $Lip^n(X, \alpha)$ we also show that the self-map $\varphi : X \to X$ induces a compact endomorphisms on $Lip^n(X, \alpha)$, under certain conditions. In particular, when $X = \overline{\mathbb{D}}$, the closed unit disk, and T is induced by φ, then a necessary and sufficient condition for the compactness of T is that $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < 1$ or φ is a constant function.

Next we verify some of the above results for the infinitely differentiable Banach function algebras $Lip(X, M, \alpha)$ and obtain necessary or sufficient conditions to induse compact endomorphisms on these algebras.

Finally, we obtain some results on the spectrum of the compact endomorphisms on some natural Banach function algebras containg the indentity function. In fact, we show that if φ induces an endomorphism T on B such that $\varphi(X) \subseteq intX$ and z_0 is a fixed point for φ, then

$$\sigma(T) = \{(\varphi'(z_0))^n : \; n \in \mathbb{N} \} \cup \{0, 1\}.$$

2000 Mathematical Subject Classification: 46J10, 46J15.

Keywords: Banach function algebras, Lipschitz algebras, Analytic Lipschitz algebras, Differentable Lipschitz algebras, Endomorphism, Compact endomorphism, Inducing endomorphism, Spectrum.

چکیده

فرض کنیم $A(X)$ جبر یکنواخت متشکل ازکلیهٔ توابع مختلط مقدار پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ $X \subseteq \mathbb{C}$ باشد که بر $intX$ تحلیلی‌اند. برای هر $0 < \alpha \leq 1$، جبر لیپشیتس از مرتبهٔ α را، که با $Lip(X,\alpha)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Lip(X,\alpha)=\{f:X\rightarrow\mathbb{C}:p_\alpha(f)=\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty\}.$$

واضح است که $Lip(X,\alpha)$ تحت نرم $\|f\|_\alpha=\|f\|_X+p_\alpha(f)$ یک جبر تابعی باناخ است.
حال تعریف می کنیم $Lip_A(X,\alpha)=Lip(X,\alpha)\cap A(X)$ و برای هر X تام و فشرده، $Lip^n(X,\alpha)$ را جبر تمام توابع مختلط مقدار بر X می گیریم که مشتقات آنها تا مرتبهٔ n ام بر X موجود و در $Lip(X,\alpha)$ قرار دارند. جبر $Lip_A(X,\alpha)$ تحت همان نرم $\|.\|_\alpha$ جبر تابعی باناخ است و $Lip^n(X,\alpha)$ نیز تحت نرم

$$\|f\|=\sum_{k=0}^{n}\frac{\|f^{(k)}\|_X+p_\alpha(f^{(k)})}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\|f^{(k)}\|_\alpha}{k!}$$

برای رده‌ای از X ها جبر تابعی باناخ می شود. ضمناً این جبرها تحت شرایطی روی X طبیعی نیز هستند، یعنی فضای ایده‌آل ماکسیمال آنها همسان ریخت با X است.
جبر $Lip^\infty(X,\alpha)$ را به عنوان جبر متشکل از کلیهٔ توابعی در نظر می گیریم که مشتقات آنها تا هر مرتبه‌ای بر X موجود و در $Lip(X,\alpha)$ قرار دارند. فرض کنیم $M=\{M_n\}_{n=0}^\infty$، دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $M_0=1$ و برای هر $m,n\in\mathbb{N}$،

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}\leq\frac{M_{m+n}}{M_n.M_m}.$$

جبر لیپشیتس بی‌نهایت بار مشتق پذیر را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$Lip(X,M,\alpha)=\{f\in Lip^\infty(X,\alpha):\ \|f\|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|f^{(n)}\|_X+p_\alpha(f^{(n)})}{M_n}<\infty\ \},$$

برای برخی از زیر مجموعه‌های فشردهٔ $X \subseteq \mathbb{C}$، $Lip(X,M,\alpha)$ جبر تابعی باناخ است و تحت شرایط خاصی روی دنبالهٔ $M=\{M_n\}$، این جبر طبیعی نیز است.
حال فرض کنیم B جبر باناخ جابه‌جایی یکدار و نیم ساده و $T:B\rightarrow B$ یک درون ریختی یکال باشد (یعنی عضو واحد B را به عضو واحد ببرد). در این صورت نگاشت پیوسته‌ای مانند $\varphi:M(B)\rightarrow M(B)$ موجود است به طوری که برای هر $f\in B$، $\widehat{Tf}=\hat{f}\circ\varphi$، که در این حالت گوییم φ، نگاشت T را القا یا تولید می کند. در حالت خاص که B یک جبر تابعی باناخ طبیعی بر

X است، خود نگاشت $\varphi : X \to X$ موجود است به طوری که برای هر $f \in B$ داریم $Tf = f \circ \varphi$.
در حالتی که B زیر جبر یکنواخت و طبیعی از $A(X)$ یا $Lip_A(X, \alpha)$ باشد و $\varphi(X) \subseteq intX$ یا φ بر X ثابت باشد، آنگاه φ درون ریختی فشرده بر B القا می کند. برای برقراری عکس این مطلب در حالت $\alpha = ۱$، برای X های خاصی نتایجی بدست آورده‌ایم.
برای جبرهای لیپشیتس n بار مشتق پذیر، $Lip^n(X, \alpha)$ نیز شرایطی بدست آورده‌ایم که تحت آنها خود نگاشت $\varphi : X \to X$ درون ریختی فشرده روی $Lip^n(X, \alpha)$ تولید می کند. در حالت خاصی که $X = \overline{\mathbb{D}}$ نشان می دهیم شرط لازم و کافی برای آنکه درون ریختی القا شده توسط φ روی $Lip^n(\overline{\mathbb{D}}, ۱)$ فشرده باشد آنست که $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < ۱$ یا φ تابعی ثابت باشد.
در ادامه برخی از نتایج فوق را برای جبرهای لیپشیتس بی‌نهایت بار مشتق پذیر $Lip(X, M, \alpha)$ بررسی و شرایط لازم یا کافی برای تولید یا القای درون ریختی فشرده روی این جبرها را بدست می آوریم.
در پایان نتایجی در مورد طیف درون ریختی های فشرده روی برخی از جبرهای تابعی باناخ طبیعی که شامل تابع همانی هستند، بدست می آوریم. در حقیقت نشان می دهیم اگر φ درون ریختی T را روی B القا کند و $\varphi(X) \subseteq intX$ و $z_\circ$ نقطهٔ ثابت φ باشد آنگاه

$$\sigma(T) = \{(\varphi'(z_\circ))^n : \ n \in \mathbb{N} \} \cup \{\circ, ۱\}$$

رده بندی موضوعی ریاضی 2000 : 46J10، 46J15.

واژه‌های کلیدی: جبر تابعی باناخ، جبرهای لیپشیتس، جبرهای لیپشیتس تحلیلی، جبرهای لیپشیتس مشتق پذیر، درون ریختی، درون ریختی فشرده، درون ریختی القایی، طیف.

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه به بررسی شرایط لازم و کافی برای القای درون ریختی های فشرده روی چهار دسته از زیر جبرهای $A(X)$ می پردازیم. یعنی

۱. زیر جبرهای یکنواخت و طبیعی از $A(X)$.

۲. جبرهای لیپشیتس تحلیلی یا $Lip_A(X,\alpha)$.

۳. جبرهای لیپشیتس n بار مشتق پذیر یا $Lip^n(X,\alpha)$.

۴. جبرهای لیپشیتس بی‌نهایت بار مشتق پذیر یا $Lip(X,M,\alpha)$.

کاموویتز در [14] ثابت کرده است که اگر T یک درون ریختی القاشده توسط φ بر $A(\overline{\mathbb{D}})$ باشد، T فشرده است اگر و تنها اگر φ ثابت باشد یا $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < ۱$. کاموویتز و شینبرگ در [16] نشان داده اند درون ریختی T بر جبرهای لیپشیتس که بوسیلهٔ نگاشتی چون φ القا شده، فشرده است اگر و تنها اگر

$$\lim_{d(x,y)\to ۰} \frac{d(\varphi(x),\varphi(y))}{d(x,y)} = ۰$$

در [2] ثابت شده است یک درون ریختی بر جبرهای دیلز– دیوی $D^n(\mathbb{D})$ فشرده است اگر و تنها اگر φ ثابت باشد یا $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < ۱$.

این پایان نامه شامل پنج فصل است.

در فصل اول، ابتدا برخی از تعاریف و قضیه هایی را که در فصل های بعد مورد نیاز هستند بیان و برای برخی از آنها برهان های نسبتاً جدید ارائه می کنیم. در پایان نشان می دهیم اگر B جبر باناخ جابه‌جایی یکدار و نیم ساده و $T: B\to B$ یک درون ریختی یکال باشد (یعنی عضو واحد B را به عضو واحد ببرد) آنگاه نگاشت پیوسته‌ای مانند $\varphi: M(B)\to M(B)$ موجود است به طوری که برای هر $f\in B$، $\widehat{Tf}=\hat{f}\circ\varphi$، که در این حالت گوییم φ، نگاشت T را القا یا تولید می کند. در حالت خاص که B یک جبر تابعی باناخ طبیعی بر X است، خود نگاشت $\varphi: X\to X$ موجود است به طوری که برای هر $f\in B$ داریم $Tf=f\circ\varphi$.

در فصل دوم که برگرفته از [21] است، زیر جبرهای باناخ و طبیعی از $A(X)$ و $Lip_A(X,\alpha)$ را در نظر گرفته و نشان می دهیم اگر $\varphi(X) \subseteq intX$ یا φ بر X ثابت باشد آنگاه φ درون ریختی های فشرده بر این جبرها القا می کند. بر عکس، اگر B زیر جبر یکنواخت و طبیعی از $A(X)$ باشد، X باید علاوه بر شرایط مذکور، بستار حوزهٔ کرانداری در صفحه بوده و دارای مرز قله‌ای نسبت به B باشد، یا اگر B جبر $Lip_A(X,\alpha)$ باشد، حالت $\alpha = ۱$ را در نظر گرفته و نشان می دهیم اگر X بستار حوزهٔ کرانداری در صفحه، از درون قوی دست یافتنی و دارای مرز قله‌ای نسبت به $Lip_A(X,\alpha)$ باشد و اگر T درون ریختی ناصفر و فشرده بر B و القا شده بوسیلهٔ φ باشد آنگاه $\varphi(X) \subseteq intX$ یا φ بر X ثابت است.

در فصل سوم این پایان نامه که برگرفته از [21] است، ابتدا جبرهای لیپشیتش n بار مشتق پذیر را معرفی کرده، سپس بررسی می کنیم تحت چه شرایطی نگاشت $\varphi : X \to X$ درون ریختی های فشرده روی $Lip^n(X,\alpha)$ القا می کند. منظور از شرط $(*)$ که از آن به دفعات استفاده خواهیم کرد عبارت زیر است.

ثابت C وجود دارد به طوری که برای هر $z, w \in X$ و هر $f \in D^۱(X)$،

$$|f(z) - f(w)| \leqslant C|z-w|(\|f\|_X + \|f'\|_X)$$

در حقیقت نشان می دهیم اگر $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده و $intX \neq \phi$ و X در شرط $(*)$ صدق کند، به علاوه φ خود نگاشتی متعلق به $Lip^n(X,\alpha)$ باشد و $\varphi(X) \subseteq intX$ یا φ بر X ثابت باشد آنگاه φ درون ریختی فشرده بر $Lip^n(X,\alpha)$ القا می کند. در حالت $\alpha = ۱$ نشان می دهیم اگر X بستار حوزهٔ کرانداری در صفحه، از درون قوی دست یافتنی و دارای مرز قله‌ای نسبت به $Lip_A(X,\alpha)$ باشد، در شرط $(*)$ صدق کند و T درون ریختی ناصفر و فشرده بر $Lip^n(X,\alpha)$ و القا شده بوسیلهٔ φ باشد آنگاه $\varphi(X) \subseteq intX$ یا φ بر X ثابت است. در پایان نتیجه می گیریم اگر $X = \overline{\mathbb{D}}$ آنگاه درون ریختی القا شده توسط φ روی $Lip^n(\overline{\mathbb{D}}, ۱)$ فشرده است اگر وتنها اگر $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < ۱$ یا φ تابعی ثابت باشد.

درفصل چهارم که برگرفته از [22] است، جبرهای لیپشیتس بی‌نهایت بار مشتق پذیر را معرفی و برخی از خواص این جبر را بیان می کنیم. سپس شرایطی را بیان می کنیم که در صورت برقراری می توان بین دو جبر لیپشیتس بی‌نهایت بار مشتق پذیر، همریختی ایجاد کرد. در ادامه شرایط لازم و(یا) کافی برای القای همریختی و درون ریختی های فشرده روی $Lip(X, M, \alpha)$ را بررسی می کنیم و در پایان با ارائه مثال هایی نشان می دهیم که عکس برخی از این قضیه‌ها برقرار نمی باشند.

در فصل پنجم که برگرفته از [21] و [22] است به بررسی طیف درون ریختی های فشرده

بر جبرهای تابعی باناخ و طبیعی بر X می پردازیم. در حقیقت نشان می دهیم اگر B جبر تابعی باناخ طبیعی بر X و شامل تابع همانی Z باشد، به علاوه $B \subseteq A(X)$، T درون ریختی روی B و القا شده بوسیلهٔ φ باشد، $\varphi(X) \subseteq intX$ و $z_\circ$ نقطهٔ ثابت φ باشد آنگاه $\sigma(T) = \{(\varphi'(z_\circ))^n : \ n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\circ, ۱\}$. در پایان شرط $intX \neq \phi$ را نادیده گرفته و با در نظر گرفتن شرایطی روی X و خود نگاشت φ نشان می دهیم اگر جبر تابعی باناخ B همان جبر $Lip(X, M, \alpha)$ باشد آنگاه طیف درون ریختی فشرده القا شده بوسیلهٔ φ برابر است با $\{(\varphi'(z_\circ))^n : \ n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\circ, ۱\}$.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل که شامل یازده بخش است، ابتدا مفاهیمی چون جبرهای باناخ، همریختی های مختلط و درون ریختی، تبدیل گلفاند، جبرهای تابعی باناخ، جبرهای لیپشیتس، مجموعه‌های منظم و یکنواخت منظم و همپیوستگی را تعریف می کنیم. سپس قضیه‌هایی را که در فصل های بعد مورد نیاز هستند بیان و برای برخی از آنها برهان های نسبتاً جدید ارا ئه می کنیم.

۱.۱ جبرهای باناخ

از ابتدا فرض می کنیم K میدان اسکالر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱. یک جبر روی K عبارت است از یک فضای خطی (برداری) مانند A روی K با نگاشت $A \times A \to A$، $(f,g) \mapsto f.g$ که به ازای هر f,g,h متعلق به A و هر $\alpha \in K$ داشته باشیم:

(i) $f.(g.h) = (f.g).h$

(ii) $f.(g+h) = f.g + f.h$ و $(f+g).h = f.h + g.h$

(iii) $(\alpha f).g = \alpha(f.g) = f.(\alpha g)$

جبر A راجابه‌جایی (تعویضپذیر) گوییم هرگاه به ازای هر $f,g \in A$، $f.g = g.f$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر روی K و $\|.\|$ یک نرم روی A باشد به طوری که برای هر $f,g \in A$، $\|f.g\| \le \|f\|\|g\|$. در این صورت $(A,\|.\|)$ را یک جبر نرمدارنامیم.
به طور کلی نرمی که در رابطه بالا صدق کند، نرم جبری نامیده می شود. اگر جبر نرمدار $(A,\|.\|)$، به عنوان یک فضای برداری نرمدار، تحت نرم $\|.\|$ کامل باشد، آن را جبر باناخ می

نامیم.
جبر نرمدار A را یکدار(واحددار) گوییم هرگاه عضوی از A مانند e موجود باشد به‌طوری که $\|e\| = ۱$ و برای هر $f \in A$، $f.e = e.f = f$

فرض کنیم A یک جبر یکدار باشد.

تعریف ۳.۱.۱. یک ایده‌آل ماکسیمال (آرمانهٔ بیشین) در A، عضو ماکسیمال (بیشین) خانوادهٔ ایده‌آل های سره در A است.

تعریف ۴.۱.۱. رادیکال A، اشتراک ایده‌آل های چپ ماکسیمال A است. جبر A نیم ساده است اگر $radA = ۰$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم A جبر باناخ یکدار باشد. برای $a \in A$، طیف a، که به $\sigma_A(a)$ نمایش داده می شود، عبارت است از مجموعهٔ اعداد مختلطی چون λ به طوری که $\lambda e - a$ در A وارونپذیر نباشد.

۲.۱ همریختی و درون ریختی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم A, B جبر باشند. یک همریختی از A به B، یک نگاشت خطی $\theta : A \to B$ است به‌طوری که برای هر $f, g \in A$، $\theta(f.g) = \theta(f).\theta(g)$.
اگر جبرهای A, B یکدار باشند، همریختی $\theta : A \to B$ یکال است هرگاه $\theta(e_A) = e_B$، که در آن e_A واحد A و e_B واحد B است.

تعریف ۲.۲.۱. همریختی $\theta : A \to A$ یک درون ریختی روی A است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم A جبر مختلط باشد. همریختی $\varphi : A \to \mathbb{C}$ را یک همریختی مختلط ناصفر یا مشخصه بر A می نامیم هرگاه φ همه جا بر A صفر نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه تمام همریختی های مختلط ناصفر بر جبر باناخ A، فضای مشخصهٔ A نامیده می شود که آن را با Φ_A نمایش می دهیم.

اگر A جبر باناخ جابه‌جایی یکدار باشد، فضای مشخصهٔ A را با $M(A)$ نمایش می دهیم.

۳.۱ تبدیل گلفاند

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم A جبر باناخ جابه‌جایی و یکدار باشد. برای هر $f \in A$، نگاشت $\hat{f} : M(A) \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ تعریف می کنیم. نگاشت $\hat{f}$ را تبدیل گلفاند f می نامیم. به علاوه نگاشت $A \to \hat{A}$، با ضابطهٔ $f \mapsto \hat{f}$، که $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$، تبدیل گلفاند A نامیده می شود. توپولوژی ضعیف تولید شده بوسیله $\hat{A}$ را توپولوژی گلفاند روی $M(A)$ می نامیم.

لذا توپولوژی گلفاند ضعیفترین توپولوژی روی $M(A)$ است که تحت آن هر $\hat{f}$ پیوسته است و به علاوه $M(A) \subseteq A^*$. خانواده $\{e_f : f \in A\}$ توپولوژی ضعیف ستاره را برای A^* القا می کند که در آن $e_f : A^* \to \mathbb{C}$، با ضابطهٔ $e_f(\Lambda) = \Lambda(f)$ تعریف می شود. با توجه به تعریف e_f، واضح است که $e_{f|_{M(A)}} = \hat{f}$.

از طرفی توپولوژی ضعیف ستاره، ضعیفترین توپولوژی است که تحت آن هر e_f پیوسته می شود. لذا تحدید توپولوژی ضعیف ستاره A^* به $M(A)$، ضعیفترین توپولوژی روی $M(A)$ است که هر $\hat{f}$ تحت آن پیوسته می شود. بنابراین توپولوژی گلفاند روی $M(A)$، تحدید توپولوژی ضعیف ستاره A^* به $M(A)$ است. با این توپولوژی، $M(A)$ یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف می شود. در حالتی که A جبر باناخ تعویضپذیر غیر یکدار باشد، $M(A) \cup \{0\}$ را به عنوان زیر فضای توپولوژیک A^* در نظر گرفته، توپولوژی گلفاند را توپولوژی القا شده روی $M(A) \cup \{0\}$ می نامیم، که در این حالت تحت توپولوژی گلفاند، $M(A)$ موضعاً فشرده و $M(A) \cup \{0\}$ فشرده می شود.

۴.۱ جبرهای تابعی باناخ

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی و A خانواده‌ای از توابع $f : X \to \mathbb{C}$ باشد. A نقاط X را جدا می کند هرگاه به ازای دو عضو متمایز x, y، عضوی از A مانند f یافت شود به طوری که $f(x) \neq f(y)$ و A نقاط X را به طور قوی جدا می کند هرگاه علاوه بر اینکه A نقاط X را جدا می کند، برای هر $x \in X$، $f \in A$ای موجود باشد به طوری که $f(x) \neq 0$.

تعریف ۲.۴.۱. برای فضای فشرده و هاوسدورف X، زیر جبر A از $C(X)$ را جبر تابعی بر X گوئیم هرگاه A نقاط X را جدا کند و ثابت ها را شامل باشد. A را همراه با یک نرم جبری، جبرتابعی نرمدار بر X می نامیم. اگر جبر تابعی نرمدار A تحت نرمش کامل باشد، آن را جبر تابعی باناخ بر X می نامیم و در حالت خاص وقتی که نرم A با نرم یکنواخت هم ارز باشد، آن را جبر یکنواخت می نامیم.

$C(X)$ با نرم یکنواخت $\|f\|_X = sup\{|f(x)| : \ x \in X\}$ یک جبر یکنواخت و لذا جبر باناخ است.

تعریف ۳.۴.۱. برای زیر مجموعهٔ فشرده X از $\mathbb{C}$، فرض می کنیم $P_\circ(X)$ جبر توابع چند جمله‌ای بر X و $R_\circ(X)$ جبر توابع گویایی باشد که در X قطب ندارند.

واضح است که $P_\circ(X)$ و $R_\circ(X)$ زیر جبرهایی از $C(X)$ هستند. بستار یکنواخت این زیر جبرها را در $C(X)$ به ترتیب با $P(X)$ و $R(X)$ نمایش می دهیم. لذا $P(X)$ و $R(X)$ جبرهای یکنواخت هستند. به این جبرها، جبرهای یکنواخت استانده می گوییم.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}^n$ فشرده باشد. غلاف محدب چند جمله‌ای X، که با $\hat{X}$ نمایش می دهیم، عبارت است از

$$\hat{X} = hull(X) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |P(\lambda)| \leqslant \|P\|_X, \ (P \in P_\circ(X))\}$$

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه، Y_f یک فضای توپولوژیک و A خانواده‌ای از توابع $f : X \to Y_f$ باشد. A ـ توپولوژی روی X، ضعیفترین توپولوژی روی X است که تحت آن توپولوژی، هر $f \in A$ پیوسته شود.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژیک ناتهی باشد و A جبری از توابع روی X باشد. به مفهوم عام، A را جبر تابعی بر X می نامیم هرگاه A به طور قوی نقاط X را جدا کند و A ـ توپولوژی روی X بر توپولوژی روی X منطبق باشد.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم A جبر تابعی باناخ برفضای توپولوژیک X باشد. برای هر $x \in X$، همریختی مقداری $e_x \in M(A)$ را بر A با ضابطهٔ $e_x(f) = f(x)$ تعریف می کنیم.

قضیه ۸.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاوسدورف و A جبر تابعی باناخ بر X باشد. نگاشت $\pi : X \to M(A)$ با ضابطهٔ $\pi(x) = e_x$ یک نگاشت پیوسته و یک به یک است و چون X فشرده و $M(A)$ باتوپولوژی گلفاند هاوسدورف است، π^{-1} نیز پیوسته است.

تعریف ۹.۴.۱. اگر نگاشت $\pi : X \to M(A)$ با ضابطهٔ $\pi(x) = e_x$ پوشا باشد، یعنی اگر هر همریختی مختلط بر A یک همریختی مقداری باشد آنگاه جبر تابعی باناخ A را طبیعی گوئیم.

دراین صورت چون π یک همسان ریختی است لذا می نویسیم $M(A) \simeq X$ یا $M(A) = X$.

۵.۱ جبرهای لیپشیتس

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\alpha \in (0,1]$. دراین صورت فضای لیپشیتس که با $Lip(X,\alpha)$ نمایش داده می شود، فضای برداری همهٔ توابع مختلط مقدار کراندار f بر X است به طوری که

$$p_\alpha(f) := \sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d^\alpha(x,y)} : \ x,y \in X, \ x \neq y\} < \infty$$

زیر فضای بسته‌ای از $Lip(X,\alpha)$ را که متشکل از توابعی با خاصیت زیر است، فضای کوچک لیپشیتس می نامیم و با $lip(X,\alpha)$ نمایش می دهیم.

$$\lim_{d(x,y)\to 0} \frac{|f(x)-f(y)|}{d^\alpha(x,y)} = 0$$

برای هر $f \in Lip(X,\alpha)$، تعریف می کنیم $\|f\|_\alpha = \|f\|_X + p_\alpha(f)$.
این فضاها با عمل ضرب نقطه‌ای و نرم تعریف شده در بالا، تبدیل به جبرهای باناخ می شوند. به علاوه $Lip(X,\alpha)$ برای $\alpha \in (0,1]$ و $lip(X,\alpha)$ برای $\alpha \in (0,1)$ جبرهای تابعی باناخ هستند.

۶.۱ مشتق پذیری توابع مختلط بر مجموعه‌های فشرده

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ تام (perfect) و فشرده باشد. تابع مختلط مقدار $f : X \to \mathbb{C}$، در $a \in X$ مشتق پذیر مختلط است اگر $f'(a) = \lim_{\substack{z\to a \\ (z\in X)}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ موجود باشد.

$f'(a)$ را مشتق مختلط f در a می نامیم.
تعریف ۲.۶.۱. مجموعه $D^1(X)$ متشکل از توابع مختلط مقداری است که بر زیر مجموعهٔ تام و فشردهٔ X ازصفحه، به‌طور پیوسته مشتق پذیرند، یعنی مشتقات پیوسته دارند.
جبر $D^1(X)$ با نرم $\|f\| = \|f\|_X + \|f'\|_X$ یک جبر نرمدار است و در حالت کلی تحت این نرم کامل نیست.
تعریف ۳.۶.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ تام و فشرده باشد. تعریف می کنیم

$$D^n(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C(X) \quad (0 \leq k \leq n)\}$$

$$D^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C(X) \quad (0 \leq k)\}$$

واضح است که برای هر $n \geqslant 1$، $D^\infty(X), D^n(X)$ روی X جبرهای تابعی هستند و $D^\infty(X) = \bigcap_{n=1}^\infty D^n(X)$.

تعریف ۴.۶.۱. هر مجموعهٔ باز و همبند در $\mathbb{C}$ را یک حوزهٔ گویند. تابع f در نقطه $z_\circ$ تحلیلی است هرگاه f دریک همسایگی از $z_\circ$ مشتق پذیر باشد. به علاوه f درحوزهٔ D تحلیلی است اگر f در هر نقطه از D تحلیلی باشد.

تعریف ۵.۶.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده باشد. $A(X)$، جبر تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی X است که در درون X تحلیلی‌اند. به علاوه $H_\circ(X)$ جبر توابعی بر X است که در یک همسایگی از X دارای توسیع تحلیلی هستند.

بستار یکنواخت این زیر جبر را در $C(X)$ با $H(X)$ نمایش می دهیم. ضمناً با توجه به قضیهٔ رونگه (Runge) داریم $R(X) = H(X)$.

قضیه ۶.۶.۱. [5,Th 2.4.4]**(قضیهٔ حسابان تابعی)** فرض کنیم A جبر باناخ جابه جایی یکدار و $f \in A$ دلخواه باشد. اگر F تابعی تحلیلی بر یک همسایگی از $\sigma_A(f)$ باشد، در این صورت $g \in A$ وجود دارد به طوری که

$$\hat{g}(h) = F(\hat{f}(h)) \ (h \in M(A))$$

البته توجه می کنیم که به ازای هر $f \in A$، $\hat{f}(M(A)) = \sigma_A(f)$.

نتیجه ۷.۶.۱. فرض کنیم A جبر تابعی باناخ طبیعی بر فضای فشرده و هاوسدورف X باشد و $f \in A$. اگر F تابعی تحلیلی بر یک همسایگی از $\sigma_A(f)$ باشد، در این صورت $g \in A$ وجود دارد به طوری که $g = F \circ f$.

۷.۱ مجموعه های منظم و یکنواخت منظم

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده باشد و بتوان هر دو نقطهٔ آن را با کمانهایی در X با طول متناهی به هم وصل کرد. برای هر $z, w \in X$ ، $\delta(z,w)$ را متریک ژئودزیک روی X در نظر می گیریم. یعنی، اینفیمم طول کمان هایی که z را به w وصل می کنند.

(i) X منظم است اگر برای هر $z_\circ \in X$ ، ثابت C وجود داشته باشد به طوری که برای هر $z \in X$، $\delta(z, z_\circ) \leqslant C|z - z_\circ|$.

(ii) X یکنواخت منظم است اگر ثابت C وجود داشته باشد به طوری که برای هر $z, w \in X$، $\delta(z,w) \leqslant C|z-w|$.

قضیه ۲.۷.۱.[**19, 2.3.10**]. $D^1(X)$ کامل است اگروتنها اگر برای هر $z_\circ$، ثابت C وجود داشته باشد به طوری که برای هر $z \in X$ و هر $f \in D^1(X)$،

$$|f(z) - f(z_\circ)| \leqslant C|z - z_\circ|(\|f\|_X + \|f'\|_X)$$

توجه کنید که اگر X منظم باشد در شرط فوق صدق می کند و لذا $D^1(X)$ کامل می‌شود [**19, 2.3.8**] .

قضیه ۳.۷.۱. اگر X اجتماع متناهی از مجموعه های منظم باشد آنگاه $D^1(X)$ کامل است و در این صورت با توجه به قضیه قبل، می توان نتیجه گرفت برای هر $z_\circ \in X$، ثابت C وجود دارد به طوری که برای هر $z \in X$ و هر $f \in D^1(X)$،

$$|f(z) - f(z_\circ)| \leqslant C|z - z_\circ|(\|f\|_X + \|f'\|_X)$$

برهان: اثبات این قضیه در رسالهٔ دکتری آقای دکتر ابطحی [۱] در لم ۴.۱.۲ آورده شده است. ■

قرارداد ۴.۷.۱. منظور از شرط $(*)$، که از آن به دفعات استفاده خواهیم کرد، رابطه زیراست:
عددی ثابت مانند C وجود دارد به طوری که برای هر $z, w \in X$ و هر $f \in D^1(X)$

$$|f(z) - f(w)| \leqslant C|z - w|(\|f\|_X + \|f'\|_X)$$

نتیجه ۵.۷.۱. اگر شرط $(*)$ برقرار باشد، $D^1(X)$ کامل می شود.

نتیجه ۶.۷.۱.[**6, 1.5**]. هر مجموعهٔ یکنواخت منظم در شرط $(*)$ صدق می کند.

لم ۷.۷.۱. فرض کنیم K, X دو زیر مجموعهٔ فشرده از صفحه باشند و $K \subseteq intX$. دراین صورت اجتماع متناهی ازقرص های بسته و لذا یکنواخت منظم، که آن را Y می نامیم و عددی ثابت مانند C وجود دارند به طوری که $K \subseteq Y \subseteq intX$ و برای هر تابع تحلیلی f بر $intX$ و هر $z, w \in K$،

$$|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|(\|f\|_Y + \|f'\|_Y)$$

---

[۱] M. Abtahi, Banach Algebras of Infinitely Differentiable Functions, Ph.D. Thesis, Teacher Training University, Tehran, Iran, 2007.

برهان: می دانیم قرص بسته، مجموعه‌ای یکنواخت منظم است. از طرفی برای هر $x \in K$، $r_x > 0$ وجود دارد به طوری که $\overline{B(x,r_x)} \subseteq intX$. پس $K \subseteq \bigcup_{x\in K} \overline{B(x,r_x)}$ و چون K فشرده است لذا $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i,r_{x_i})} \subseteq intX$. قرار می دهیم $Y = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i,r_{x_i})}$. چون Y اجتماع متناهی ازقرص های بسته و لذا یکنواخت منظم است، طبق لم قبل، $D^1(Y)$ کامل می شود. برای هر $z_0 \in Y$، نرم زیر را روی $D^1(Y)$ تعریف می کنیم و نشان می دهیم $D^1(Y)$ با این نرم جدید کامل می شود.

$$\|f\|_1 := \|f\|_Y + \|f'\|_Y + sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_0}} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \quad (f \in D^1(Y))$$

واضح است که $(D^1(Y), \|.\|_1)$ یک فضای نرمدار است. از طرفی

$$\|f.g\|_1 = \|f.g\|_Y + \|f'.g + f.g'\|_Y + sup\frac{|f(z).g(z)-f(z_0).g(z_0)|}{|z-z_0|}$$

$$\leq \|f\|_Y\|g\|_Y + \|f'\|_Y\|g\|_Y + \|f\|_Y\|g'\|_Y +$$

$$\sup\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|g(z)| + \sup\frac{|g(z)-g(z_0)|}{|z-z_0|}|f(w)| \leq$$

$$(\|f\|_Y + \|f'\|_Y + \sup\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|})(\|g\|_Y + \|g'\|_Y + \sup\frac{|g(z)-g(z_0)|}{|z-z_0|}) = \|f\|_1.\|g\|_1,$$

و لذا $(D^1(Y), \|.\|_1)$ یک جبر نرمدار است. حال دنباله کوشی $\{f_n\}$ را در جبر $(D^1(Y), \|.\|_1)$ درنظر می گیریم. به ازای هر $\varepsilon > 0$، $N_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n, m \geq N_2$،

$$\|f_n - f_m\|_Y + \|f'_n - f'_m\|_Y + \sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_0}} \frac{|(f_n-f_m)(z)-(f_n-f_m)(z_0)|}{|z-z_0|} < \varepsilon/3.$$

پس

$$\|f_n - f_m\|_Y + \|f'_n - f'_m\|_Y < \varepsilon.$$

از آنجایی که $D^1(Y)$ با نرم‌اولیهٔ خود کامل است، پس تابعی چون $f \in D^1(Y)$ و $N_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که برای هر $n \geq N_1$،

$$\|f_n - f\|_Y + \|f'_n - f'\|_Y < \varepsilon/2.$$

به علاوه برای هر $n, m \geq N_2$ داریم

$$\sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_0}} \frac{|(f_n-f_m)(z)-(f_n-f_m)(z_0)|}{|z-z_0|} < \varepsilon/3.$$

از آنجایی که $\{f_m\}$ به طور یکنواخت به f همگراست، پس

$$\sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_\circ}} \frac{|(f_n-f)(z)-(f_n-f)(z_\circ)|}{|z-z_\circ|} \le \varepsilon/۳ < \varepsilon/۲.$$

قرار می دهیم $N = max\{N_۱, N_۲\}$. پس برای هر $n \ge N$،

$$\|f_n-f\|_Y + \|f'_n-f'\|_Y + \sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_\circ}} \frac{|(f_n-f)(z)-(f_n-f)(z_\circ)|}{|z-z_\circ|} < \varepsilon.$$

لذا $(D^۱(Y), \|.\|_۱)$ جبر تابعی باناخ می شود. می دانیم هر جبر تابعی باناخ یک جبر باناخ جابه‌جایی نیم سادهٔ یکدار است و بنا بر قضیه جانسون هر جبر باناخ نیم ساده نرم کامل یکتا دارد. پس می توان نتیجه گرفت این دو نرم با هم معادل‌اند، یعنی ثابت C' وجود دارد به طوری که برای هر $f \in D^۱(Y)$،

$$\|f\|_Y + \|f'\|_Y + \sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_\circ}} \frac{|f(z)-f(z_\circ)|}{|z-z_\circ|} \le C'(\|f\|_Y + \|f'\|_Y)$$

در نتیجه

$$\sup_{\substack{z\in Y\\ z\neq z_\circ}} \frac{|f(z)-f(z_\circ)|}{|z-z_\circ|} \le (C'-۱)(\|f\|_Y + \|f'\|_Y)$$

قرار می دهیم $C = C' - ۱$. پس برای هر $z, w \in Y$،

$$\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|} \le C(\|f\|_Y + \|f'\|_Y)$$

از طرفی چون $K \subseteq Y$ پس حکم برقرار می شود. ■

۸.۱ همپیوستگی و برخی از ویژگی های آن

در این بخش $G \subseteq \mathbb{C}$ باز است.

تعریف ۱.۸.۱. [4, 1.14]. خانوادهٔ $F \subseteq C(G)$ نرمال است اگر هر دنباله‌ای در F زیر دنباله‌ای همگرا به تابعی چون $f \in C(G)$ داشته باشد. در اینجا همگرایی در $C(G)$ به مفهوم همگرایی یکنواخت بر هر زیر مجموعهٔ فشرده از G است که معادل با همان توپولوژی فشرده ـباز است.

(تابع حدی f ممکن است عضو خانوادهٔ F نباشد)

تعریف ۲.۸.۱. [4, 1.21]. خانوادهٔ $F \subseteq C(G)$ در نقطهٔ $w \in G$، همپیوسته است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $z \in G$ وهر $f \in F$ اگر $|z-w| < \delta$ آنگاه $|f(z)-f(w)| < \varepsilon$.

F بر مجموعهٔ $E \subseteq G$ همپیوسته است اگر در هر نقطه‌ای از E همپیوسته باشد.

قضیه ۱.۸.۳. (آرزلا—اسکولی) [4, 1.23]. خانوادهٔ $F \subseteq C(G)$ نرمال است اگر و تنها اگر احکام زیر برقرار باشند:

(i) برای هر $z \in G$ مجموعهٔ $\{f(z) : f \in F\}$ در صفحه بستار فشرده داشته باشد.

(ii) F در هر نقطه‌ای از G همپیوسته باشد.

تعریف ۱.۸.۴.[4, 2.7]. خانوادهٔ $F \subseteq H(G)$ موضعاً کراندار است اگر برای هر $a \in G$ اعدادی مثبت مانند M و r یافت شوند به طوری که برای هر $f \in F$ و هر $z \in G$ اگر $|z-a| < r$ آنگاه $|f(z)| \leq M$.

البته توجه داشته باشید که این تعریف معادل است با اینکه خانوادهٔ F بر هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ G، یکنواخت کراندار باشد.

قضیه ۱.۸.۵.(Montel)[4, VII.2.9]. خانوادهٔ $F \subseteq H(G)$ نرمال است اگر و تنها اگر F موضعاً کراندار باشد.

۱.۹ درون‌ریختی القایی

لم ۱.۹.۱. فرض کنیم B جبر باناخ جابه جایی، نیم ساده، یکدار و $T : B \to B$ درون ریختی یکال باشد. در این صورت نگاشت پیوستهٔ $\varphi : M(B) \to M(B)$ موجود است به طوری که برای هر $f \in B$، $\widehat{Tf} = \hat{f} \circ \varphi$.

برهان: چون T همریختی است، الحاقی T، $T^* : B^* \to B^*$ را که با ضابطهٔ زیرتعریف می شود در نظر می گیریم. برای هر $h \in B^*$ و هر $b \in B$، $T^*(h)(b) = h(T(b))$. T^* را به $M(B)$ تحدید می کنیم و آن را φ می نامیم. نشان می دهیم φ نگاشتی است که $M(B)$ را به $M(B)$ می‌برد. بنا بر تعریف φ، به ازای هر $h \in M(B)$، $\varphi(h) \in B^*$. از طرفی برای هر $b_1, b_2 \in B$ و برای هر $h \in M(B)$ داریم:

$$T^*(h)(b_1.b_2) = h(T(b_1.b_2)) = h(T(b_1)T(b_2)) = h(T(b_1))h(T(b_2)) = T^*(h)(b_1).T^*(h)(b_2)$$

پس $\varphi(h) = T^*(h)$ بر B ضربی است. حال نشان می دهیم که $\varphi(h)$ به ازای هر $h \in M(B)$ ناصفر است. چون T درون ریختی یکال است لذا به ازای هر $h \in M(B)$ داریم $T^*(h)(e_B) = h(T(e_B)) = h(e_B) \neq 0$. پس $\varphi(h) = T^*(h)$ به ازای هر $h \in M(B)$ صفر نمی شود و لذا عضوی از $M(B)$ است. با مفروضات فوق T پیوسته است [23, 11.10] و لذا T^* و در