دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

قضیه لازارد برای S_سیستم‌های مرتب جزئی

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش :

محمدصادق تقی‌نژاد

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که همواره قوت قلب و فانوس راه زندگی‌ام هستند.

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس بی‌شمار پروردگار، که با الطاف بی‌کرانش در تمامی مراحل، یاری‌ام نمود.

امیدوارم توانسته باشم قدم کوچکی در راه علم برداشته باشم.

از تمامی اساتید بزرگوار که مرا علم آموختند تشکر و قدر دانی می‌کنم. از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر گلچین که در کلیه مراحل با صبر و شکیبایی بنده را یاری نمودند تشکر و قدر دانی می‌نمایم و هچنین از آقای دکتر رضایی و آقای دکتر محمدزاده ثانی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند تشکر و قدر دانی می‌نمایم. از دوستان عزیزم آقایان محمدرضا زمانی، جواد کوثری، محمدرضا محمدبیگی، شهاب بالو و مسعود انصاری که در مراحل تدوین پایان نامه بنده را یاری نموده‌اند تشکر می‌نمایم.

محمدصادق تقی‌نژاد

چکیده

در سال ۱۹۷۱، با الهام از کار لازارد[۱] و گُورو[۲] برای مدول‌ها روی یک حلقه، استنستروم[۳] ثابت کرد که سیستم راست A_S، به طور قوی هموار است هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$، (از رسته S_سیستم‌های چپ به رسته مجموعه‌ها) حافظ عقب‌برها و برابرکننده‌ها باشد. او همچنین نوعی از شرایط را (که تحت عنوان شرط (P) و (E) به آن اشاره خواهیم کرد) برای تشخیص همواری قوی فراهم کرد. بر خلاف حالت مدول‌های روی یک حلقه، همواری قوی اکیداً قوی‌تر از همواری است.(که در آن لازم است تابعگون $- \otimes A_S$، حافظ تکریختی باشد). مطالعه خواص همواری تکواره‌های مرتب جزئی با عمل بر روی مجموعه‌های مرتب جزئی، توسط اس. ام. فخرالدین[۴] در سال ۱۹۸۰ شروع شد و اخیراً در مقاله «تجزیه ناپذیری، S_سیستم‌های مرتب جزئی هموار و تصویری» توسط شی[۵]، لیو[۶]، وانگ[۷] و بولمن فلمینگ[۸] ادامه یافته است.

هدف این مقاله بیان شرط (E) و قضیه لازارد، گُورو، استنستروم در زمینه S_سیستم‌های مرتب جزئی می‌باشد.

---

[۱] Lazard

[۲] Govorov

[۳] Stenstrom

[۴] S. M. Fakhruddin

[۵] Shi

[۶] Liu

[۷] Wang

[۸] Bulman-Fleming

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مقدمات ۴

۱—۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها ۵

۱—۲ تعاریف مقدماتی رسته ۷

۱—۳ S_سیستم‌ها ۱۹

۱—۴ حاصلضرب تانسوری S_سیستم‌ها ۲۵

۱—۵ مجموعه‌های مرتب جزئی ۲۶

۱—۶ S_سیستم‌های مرتب جزئی ۲۸

۲ شرط‌های (P) و (E) برای S_سیستم‌های مرتب جزئی ۵۰

۳ S_سیستم های مرتب جزئی به طور متناهی نمایش داده شده و بروریختی‌های محض ۵۶

۴ قضیه لازارد ـ گُورو ـ استنستروم ۷۳

A **مراجع** ۸۲

B **واژه نامه** ۸۴

پیشگفتار

در قضیه‌ای معروف برای مدول‌ها (که به طور مستقل توسط لازارد و گورو اثبات شده است)، بیان می‌شود که مدول‌های (راست) هموار روی یک حلقه، مدول‌هایی هستند که با هم حدهای جهت دار مدول‌های به طور متناهی تولید شده آزاد یکریخت می‌باشند. در تلاش برای رسیدن به نتیجه‌ای شبیه این، استنستروم در [۱۰]، پی برد که هم حدهای جهت دار S_سیستم‌های راست به طور متناهی تولید شده آزاد، سیستم‌هایی مانند A_S هستند که تابعگون $A_S \otimes -$، عقب‌برها و برابرکنندها را حفظ می‌کند، او همچنین متوجه شد که تنها حافظ عقب‌برها بودن، کافی است [۱]. چنین سیستم‌هایی اکنون به طور قوی هموار یا عقب‌بر هموار نامیده می‌شوند. با تغییر در نوعی از شرایط، که بعداً تحت عنوان شرط‌های (P) و (E) در [۹] و [۱۰] معرفی می‌شوند هم زمان با هم همواری قوی را نتیجه می‌دهند. برای مدول‌ها همواری قوی اکیداً ضعیف‌تر از تصویری است. به هر حال، بر خلاف حالت مدول‌ها همواری قوی، همواری را نتیجه می‌دهد. به علاوه مفهوم به طور (اساسی) ضعیف همواری به دست می‌آید هر گاه تابعگون $A_S \otimes -$ ، حافظ نشانندە‌ها از ایدآل‌های (اصلی) چپ به توی S باشد.

هدف از اثر حاظر بیان شرط (E) و قضیه لازارد، گورو، استنستروم در زمینه عمل یک تکواره مرتب جزئی روی یک مجموعه مرتب جزئی، مختصراً S_سیستم مرتب جزئی می‌باشد. مقدمات کار روی خواص همواری S_سیستم‌های مرتب جزئی، توسط فخرالدین در سال ۱۹۸۰ در [۳] و [۴] انجام شد و اخیراً در مقاله [۱۱]، ادامه یافت. در این مقاله‌ها حاصلضرب‌های تانسوری، تصویری، آزاد و همواری S_سیستهای مرتب جزئی معرفی شده اما هم حدهای جهت دار S_سیستم‌های مرتب جزئی به طور متناهی تولید شده آزاد مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است، که این مقاله مطلب فوق را مورد بررسی قرار می‌دهد.

فصل اول را با مفاهیم و تعاریف مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آغاز می‌کنیم.

در فصل دوم شرایط (P) و (E) برای S_سیستم‌های مرتب جزئی و همچنین لم‌هایی که در فصل‌های بعد استفاده می‌شوند، را بیان می‌کنیم، در فصل سوم S_سیستم‌های مرتب جزئی به طور متناهی نمایش داده شده و بروریختی‌های محض معرفی می‌شوند و در فصل آخر به بیان قضیه لازارد برای S_سیستم‌های مرتب جزئی می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل ابتدا به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند اشاره می‌کنیم.

۱—۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گروه‌وار یا ساختار جبری $(S,*)$ عبارت است از یک مجموعه غیرتهی S که یک عمل دوتایی "$*$" روی آن تعریف شده باشد.

گروه‌وار $(S,*)$ را نیم‌گروه گوییم در صورتی که عمل "$*$" شرکت پذیر باشد، به عبارت دیگر به ازای هر $x,y,z \in S$،

$$x*(y*z)=(x*y)*z.$$

برای راحتی کار، عمل نیم‌گروه را ضربی در نظر می‌گیریم و از این پس به جای $x*y$ از نماد $x.y$ یا xy استفاده می‌کنیم.

نیم‌گروه S را تعویض پذیر گوییم، هر گاه به ازای هر $x,y \in S$، $xy=yx$.

هر گاه در نیم گروه S عنصر $1 \in S$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $x \in S$، $1x=x1=x$، آنگاه ۱ را عنصر همانی نیم‌گروه S و S را تکواره گوییم. اگر S دارای عنصر همانی نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۱ به S و با تعریف عمل ضرب به صورت زیر، آن را به یک تکواره تبدیل کرد.

$$\forall s \in S, \;\; s.1=1.s=s, \;\; 1.1=1.$$

در این صورت $S \cup \{1\}$ یک تکواره است و S^1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^1=\begin{cases} S & 1 \in S \\ S\cup\{1\} & 1 \notin S. \end{cases}$$

S^1 را تکواره به دست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن می‌نامیم.

اگر S یک نیم‌گروه و عنصر $0 \in S$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $x \in S$، $0x=x0=0$، آنگاه ۰ را عنصر صفر نیم‌گروه S گوییم. اگر S دارای عنصر صفر نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۰ به S و با تعریف

عمل ضرب به صورت زیر، آن را به یک نیم‌گروه صفردار تبدیل کرد.

$$\forall s \in S, \quad \circ s = s\circ = \circ, \quad \circ . \circ = \circ.$$

در این صورت $S \cup \{\circ\}$ یک نیم‌گروه می‌باشد و S° را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^\circ = \begin{cases} S & \circ \in S \\ S \cup \{\circ\} & \circ \notin S. \end{cases}$$

S° را نیم‌گروه به دست آمده از S با الحاق عنصر صفر به آن می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را یک زیر نیم‌گروه S گوییم هر گاه، $T^۲ \subseteq T$ به عبارت دیگر T زیر نیم‌گروه S است، هرگاه تحت عمل S بسته باشد.

اگر S تکواره با عنصر همانی ۱ باشد، آنگاه زیر نیم‌گروه T را زیر تکواره S گوییم اگر $۱ \in T$.

تعریف ۳.۱.۱. گروه عبارت است از یک تکواره مانند S به طوری که برای هر $s \in S$ عنصر منحصر به فرد $s^{-۱}$ در S موجود باشد، به طوری که $s^{-۱}s = ss^{-۱} = ۱$.

تعریف ۴.۱.۱. اگر S یک گروه باشد، آنگاه زیر تکواره T از S را زیر گروه S گوییم، هر گاه به ازای هر $x \in T$، داشته باشیم $x^{-۱} \in T$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. هر زیرمجموعه ρ از حاصلضرب دکارتی $S \times S$، یک رابطه دوتایی روی S نامیده می‌شود.

مجموعه تمام روابط دوتایی روی S با $B(S)$ نشان داده می‌شود.

رابطه $\rho \in B(S)$:

(۱) بازتابی نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in S$، $x\rho x$؛

(۲) تقارنی نامیده می‌شود، اگر $x\rho y$ نتیجه دهد $y\rho x$؛

(۳) تعدی است، اگر $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد $x\rho z$؛

رابطه ρ که خواص بازتابی، تقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این صورت ρ را همنهشتی چپ روی S گوییم، اگر

$$\forall s,t,u \in S, \qquad s\rho t \Rightarrow (us)\rho(ut)$$

و آن را همنهشتی راست گوییم، اگر

$$\forall s,t,u\in S,\qquad s\rho t\Rightarrow (su)\rho(tu),$$

و آن را همنهشتی گوییم، هر گاه

$$\forall s,t,s',t'\in S,\qquad s\rho t, s'\rho t'\Rightarrow (ss')\rho(tt').$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید S، نیم‌گروه باشد. برای هر $a\in S$، نگاشت $\rho_a : S^۱ \to S^۱$، را انتقال راست گوییم هر گاه

$$\forall x \in S^۱,\quad \rho_a\left(x\right)=xa.$$

و $\lambda_a : S^۱ \to S^۱$، را انتقال چپ گوییم هر گاه

$$\forall x \in S^۱,\quad \lambda_a\left(x\right)=ax.$$

۱—۲ تعاریف مقدماتی رسته

تعریف ۱.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$، گردایه‌ای است از اشیاء (که با A، B و $\cdots$ نشان داده می شوند)، به همراه :

۱) گردایه‌ای از مجموعه‌ها به شکل $Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ که به ازای هر جفت از اشیاء در $\mathbf{C}$ این مجموعه‌ها مجزا هستند. ($f\in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$)، یک ریخت از C به D نامیده می‌شود و با $f: C\to\ D$، نشان داده می‌شود).

۲) برای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء $\mathbf{C}$ تابع

$$Mor_{\mathbf{C}}\left(A,B\right)\times Mor_{\mathbf{C}}\left(B,C\right)\to Mor_{\mathbf{C}}\left(A,C\right)$$

$$(f,g)\mapsto gof$$

موجود است که در دو اصل زیر صدق می‌کند:

الف) شرکت پذیری: یعنی برای اشیاء A,B,C,D در رسته $\mathbf{C}$ و ریخت‌هایی $f\in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$، $g\in Mor_{\mathbf{C}}(B,C)$، $h\in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ داشته باشیم:

$$h\circ(g\circ f)\ =(h\circ g)\circ f$$

ب) ریخت همانی: برای هر شیء A دررسته $\mathbf{C}$، ریخت $id_A : A \to A$، تحت عنوان، ریخت همانی A موجود باشد، به طوری که برای هرشیء B در رسته $\mathbf{C}$ و هر $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ و $g \in Mor_{\mathbf{C}}(B,A)$ داریم:

$$f \circ id_A = f, \quad id_A \circ g = g \ .$$

تعریف ۲.۲.۱. در رسته مجموعه‌ها که با **Set** نمایش داده می‌شود، اشیاء مجموعه‌ها، ریخت‌ها همان توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی برای هر مجموعه X، همان تابع همانی روی X است.

تعریف ۳.۲.۱. رسته $\mathbf{D}$ را یک زیر رسته از رسته $\mathbf{C}$ گوییم، اگر

(۱) اشیاء $\mathbf{D}$ زیر مجموعه‌ای از اشیاء $\mathbf{C}$ باشند یعنی $ob\,\mathbf{D} \subseteq ob\,\mathbf{C}$،

(۲) برای هر $A, B \in ob\,\mathbf{C}$، $Mor_{\mathbf{D}}\,(A,B) \subseteq Mor_{\mathbf{C}}\,(A,B)$،

(۳) ترکیب ریخت‌ها در $\mathbf{D}$ تحدیدی از ترکیب ریخت‌هایی در $\mathbf{C}$ باشد.

تعریف ۴.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$ رسته ملموس نامیده می‌شود هر گاه همه اشیاء آن، مجموعه‌ها همراه با یک ساختار اضافی و ریخت‌های از A به B، تابع‌های حافظ ساختار از A به B، ترکیب ریخت‌ها همان ترکیب توابع و ریخت همانی، تابع همانی باشد.

تعریف ۵.۲.۱. رسته که اشیاء آن تشکیل یک مجموعه می‌دهند رسته کوچک نامیده می‌شود.

مثال ۶.۲.۱. هر تکواره یک رسته کوچک است.

در این رسته شیء را خود تکواره، ریخت‌ها را عناصر تکواره و ترکیب ریخت‌ها را همان عمل نیم‌گروه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}$ یک رسته باشد. دوگان رسته $\mathbf{C}$ با $\mathbf{C}^{op}$ نمایش داده می‌شود و اشیاء آن همان اشیاء رسته $\mathbf{C}$ بوده و برای اشیاء M و N در $\mathbf{C}^{op}$، ریخت $f : M \to N$ در $\mathbf{C}^{op}$، ریخت $f : N \to M$ در $\mathbf{C}$ است و اگر ترکیب در $\mathbf{C}^{op}$ را $\circ^{op}$ در نظر بگیریم داریم $f \circ^{op} g = g \circ f$ که $\circ$ ترکیب در رسته $\mathbf{C}$ است.

تعریف ۸.۲.۱. نمودار زیر را تعویض پذیر گوییم هر گاه، $\beta \circ \alpha \ = \ \gamma$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] & C \\ B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

همچنین نمودار زیر تعویض پذیر است، هر گاه $fg = hk$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}$ و$\mathbf{D}$، دو رسته باشند و $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$، نگاشتی باشد که به هر شیء A، در $\mathbf{C}$ شیء منحصر به فرد $F(A)$، در $\mathbf{D}$، و نیز به هر ریخت $f : A \to A'$، در $\mathbf{C}$، ریخت منحصر به فرد $F(f)$ در $\mathbf{D}$ را نسبت می‌دهد. شرایط زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) F حافظ همانی است، یعنی برای هر شیء A در $\mathbf{C}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(۲) F حافظ ترکیب است، یعنی برای اشیاء A_1, A_2, A_3 در $\mathbf{C}$ و ریخت‌های، $f_1 \in Mor_{\mathbf{C}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathbf{C}}(A_2, A_3)$،

$$F\left(f_2 f_1\right) = F\left(f_2\right) F\left(f_1\right)$$

(۳) F برگرداننده ترکیب است، یعنی برای اشیاء A_1, A_2, A_3 در $\mathbf{C}$ و ریخت‌های، $f_1 \in Mor_{\mathbf{C}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathbf{C}}(A_2, A_3)$،

$$F\left(f_2 f_1\right) = F\left(f_1\right) F\left(f_2\right)$$

اگر F شرایط (۱) و (۲) را داشته باشد، F را تابعگون هم ورد می‌نامیم و در این حالت داریم:

$$F\left(Mor_{\mathbf{C}}\left(A_1, A_2\right)\right) \subseteq Mor_{\mathbf{D}}\left(F\left(A_1\right), F\left(A_2\right)\right).$$

حال اگر F شرایط (۱) و (۳) را داشته باشد، F را تابعگون پاد ورد می‌نامیم و در این حالت داریم:

$$F\left(Mor_{\mathbf{C}}\left(A_{1},A_{2}\right)\right)\subseteq Mor_{\mathbf{D}}\left(F\left(A_{2}\right),F\left(A_{1}\right)\right).$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته باشد، تابعگون $1_{\mathbf{C}}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ که برای هر شیء X از $\mathbf{C}$، $1_{\mathbf{C}}X=X$ تابعگون همانی روی $\mathbf{C}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. شیء U در رسته $\mathbf{C}$، شیء ابتدایی گفته می‌شود، اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(U,X)$، تک عضوی باشد. به طور مشابه T، انتهایی نامیده می‌شود اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(X,T)$، تک عضوی باشد.

شیء ابتدایی را شیء عمومی و شیء انتهایی را شیء هم عمومی نیز می‌گویند.

قضیه ۱۳.۲.۱.[۵] اشیاءعمومی(هم عمومی) در حد یکریختی، منحصر به فرد هستند.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}$ یک رسته ملموس باشد. برای $A\in\mathbf{C}$، $|A|\in\mathbf{Set}$ مجموعه زمینه A را نمایش می‌دهد.

و برای اشیاء A_{1},A_{2} در $\mathbf{C}$ و $f\in Mor_{\mathbf{C}}(A_{1},A_{2})$، $|f|:|A_{1}|\to|A_{2}|$ نگاشت زمینه f در $\mathbf{Set}$ را نشان می‌دهد.

تابعگون $|-|:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{Set}$ که روی اشیاء و ریخت‌ها به صورت بالا تعریف شده، تابعگون فراموش کار نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۲.۱. ریخت $f:A\to B$ در رسته $\mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم:

(۱) f تکریختی است اگر حذف پذیر از چپ باشد، یعنی برای هر شیء C در رسته $\mathbf{C}$ و هر $k,h\in Mor_{\mathbf{C}}(C,A)$ داشته باشیم:

$$f\circ k=f\circ h\ \Rightarrow k=h$$

(۲) f یک برویختی است اگر f حذف پذیر از راست باشد، یعنی برای هر شیء D در رسته $\mathbf{C}$ و هر $k,h\in Mor_{\mathbf{C}}(B,D)$ داشته باشیم:

$$k\circ f=h\circ f\ \Rightarrow k=h$$

f دوریختی است اگر هم تکریختی و هم برویختی باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱. رسته‌ای که در آن هر دو ریختی یکریختی است رسته متعادل گفته می‌شود.

مثال ۱۷.۲.۱. در رسته ملموس هر ریخت پوشا، یک بروریختی است. زیرا اگر فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ پوشا و $g, h : B \longrightarrow C$ طوری باشند که $g \circ f = h \circ f$. اگر $b \in B$ پس $b = f(a)$ برای یک $a \in A$. بنابراین $g(b) = g[f(a)] = h[f(a)] = h(b)$. در نتیجه $g = h$ و لذا f حذف پذیر راست است.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ رسته و $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$، و $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$، تابعگون باشند، آنگاه ترکیب تابعگون‌های F, G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم برای اشیاء A, A' در $\mathbf{C}$، و ریخت $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A, A')$،

$$(GF)(A) = G(F(A))$$

$$(GF)(f) = G(F(f)).$$

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم $G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ یک تابعگون و B یک $\mathbf{B}$ـشیء باشد (یعنی B، شیء از $\mathbf{B}$ است).

۱) ریخت Gـساخته شده با دامنه B، جفت (f, A) است به طوری که شامل یک $\mathbf{A}$ـشیء A و $\mathbf{B}$ـریخت $f : B \rightarrow GA$ است.

۲) ریخت Gـساخته شده (f, A) با دامنه B، ریخت Gـعمومی گفته می‌شود هر گاه برای هر ریخت Gـساخته شده دیگری مانند (f', A') با دامنه B، $\mathbf{A}$ـریخت منحصر به فردی مانند $\bar{f} : A \rightarrow A'$ وجود داشته باشد به طوری که $f' = G(\bar{f})of$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & GA \arrow[d, "G\bar{f}"] \\ & GA' \end{tikzcd}$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم $G : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ یک تابعگون و B یک $\mathbf{B}$ـشیء باشد،

۱) ریخت Gـهم‌ـساخته شده با هم دامنه B، جفت (A, f) شامل $\mathbf{A}$ـشیء A و $\mathbf{B}$ـریخت $f : GA \rightarrow B$ است.

۲) ریخت G_هم_ساخته شده (A, f) با هم دامنه B، ریخت G_هم_عمومی نامیده می‌شود هر گاه برای هر ریخت G_هم_ساخته شده (A', f') با هم دامنه B، $\mathbf{A}$_ریخت منحصر به فردی مانند $\bar{f} : A' \to A$ وجود داشته باشد به طوری که $f' = foG\left(\bar{f}\right)$.

تعریف ۲۱.۲.۱. تابعگون $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ الحاقی گفته می‌شود اگر برای هر $\mathbf{B}$_شی B، یک ریخت G_عمومی با دامنه B وجود داشته باشد.

به طور دوگان مفهوم تابعگون هم_الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲۲.۲.۱. تابعگون $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ هم_الحاقی گفته می‌شود اگر برای هر $\mathbf{B}$—شیء B، یک ریخت G_هم_عمومی با دامنه B وجود داشته باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ رسته باشند و $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$، حاصلضرب رسته‌های $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ باشد در این صورت تابعگون $F : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{E}$، دوتابعگون نامیده می‌شود.

به طور مشابه چند تابعگون تعریف می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. اگر $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ و $F : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ دو تابعگون باشند، آنگاه F، برای G هم_الحاقی (الحاقی چپ)، و G برای F الحاقی (الحاقی راست)، نامیده می‌شود و با نماد $F \dashv G$ نمایش داده می‌شود.

تبصره ۲۵.۲.۱. ۱) هر تابعگون الحاقی G، یک هم_الحاقی F دارد. برعکس، اگر تابعگون G، یک هم_الحاقی داشته باشد، آنگاه G، تابعگون الحاقی است. بنابراین یک تابعگون الحاقی است اگر و فقط اگر یک هم_الحاقی داشته باشد، همچنین هم_الحاقی یک تابعگون، یک تابعگون هم_الحاقی است.

۲) به طور دوگان یک تابعگون هم_الحاقی است اگر و فقط اگر یک الحاقی داشته باشد. تابعگون F، برای G هم_الحاقی است اگر و فقط اگر G برای F الحاقی باشد. بنابراین تابعگون‌های الحاقی و تابعگون‌های هم_الحاقی به طور طبیعی در جفت‌هایی می‌آیند که این جفت‌ها، بخش‌هایی از شرایط یا موقعیت‌های الحاقی هستند.

تبصره ۲۶.۲.۱. در رسته $\mathbf{Set}$ هر برووریختی یک تابع پوشاست.

زیرا اگر $f : A \to B$، حذف پذیر راست باشد و $g, h : B \to \{۰, ۱\}$ با

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \in Imf \\ ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \in Imf \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داده شده باشند، آنگاه برای هر $y \in A$، $g\left[f\left(y\right)\right] = f\left(y\right) = h\left[f\left(y\right)\right]$. بنابراین $gof = hof$ و لذا با توجه به

فرض $g=h$. حال اگر $Imf\subset B$، آنگاه x ای متعلق به B وجود دارد به طوری که $x\notin Imf$. برای چنین x ای داریم $1=h(x)=g(x)=0$ و این تناقض است. در نتیجه $Imf=B$.

قضیه ۲۷.۲.۱.[۷] اگر ترکیب gof دو ریخت $f:A\to B$ و $g:B\to C$ برویریختی باشد، آنگاه g برویریختی است.

مثال ۲۸.۲.۱. در رسته ملموس هر ریخت یک به یک، تکریختی است.

برهان: فرض کنیم f یک به یک و $g,h:C\to A$ به گونه‌ای باشند که $fog=foh$. پس برای هر $x\in C$

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left[h\left(x\right)\right]$$

با توجه به یک به یک بودن f، برای هر $x\in C$، $g\left(x\right)=h\left(x\right)$.$\square$

قضیه ۲۹.۲.۱.[۷] اگر ترکیب gof دو ریخت $f:A\to B$ و $g:B\to C$، تکریختی باشد، آنگاه f تکریختی است.

تعریف ۳۰.۲.۱. ریخت $f:A\to B$ در یک رسته یکریختی نامیده می‌شود هر گاه ریختی مانند g وجود داشته باشد به طوری که $gof=id_A$ و $fog=id_B$. ریخت g معکوس f نامیده می شود.

گزاره ۳۱.۲.۱. اگر $f:A\to B$، $g:B\to A$ و $h:B\to A$ ریخت‌هایی باشند که $gof=id_A$ و $foh=id_B$، آنگاه $g=h$.

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}$ یک رسته، I یک مجموعه و $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathbf{C}$ باشد. دوتایی $(P,(p_i)_{i\in I})$ حاصلضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر:

(۱) P یک شیء در $\mathbf{C}$ بوده و برای هر $i\in I$، $p_i\in Mor_{\mathbf{C}}(P,X_i)$.

(۲) $(P,(p_i)_{i\in I})$ در ویژگی جهانی نگاشت‌ها صدق می‌کند، به این معنی که برای هر شیء Q در $\mathbf{C}$ و برای هر خانواده $(q_i\in Mor_{\mathbf{C}}(Q,X_i))_{i\in I}$، فقط یک $q\in Mor_{\mathbf{C}}(Q,P)$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i\in I$، $p_iq=q_i$. به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_i"] & X_i \\ Q \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "q_i"'] & \end{tikzcd}$$

حاصلضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ را با $\prod\limits_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$ دارای حاصلضرب متناهی است اگر هر زیر مجموعه متناهی از اشیاء آن حاصلضرب داشته باشد.

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنیم $\mathbf{C}$ یک رسته، $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathbf{C}$ و I یک مجموعه باشد. دوتایی $((u_i)_{i\in I}, C)$ هم حاصلضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ در $\mathbf{C}$ نامیده می شود اگر:

(۱) C یک شیء در $\mathbf{C}$ بوده و برای هر $i \in I$، $u_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, C)$.

(۲) $((u_i)_{i\in I}, C)$ در ویژگی جهانی نگاشت‌ها صدق کند، به این معنی که برای هر شیء K در $\mathbf{C}$ و برای هر خانواده $(k_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, K))_{i\in I}$، یک k منحصر به فرد متعلق به $Mor_{\mathbf{C}}(C, K)$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i \in I$، $ku_i = k_i$. به عبارت دیگر نمودار زیر برای هر $i \in I$، تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, "u_i"'] & K \\ C \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

هم حاصلضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ را با $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$ دارای هم حاصلضرب متناهی است اگر هر زیر مجموعه متناهی از اشیاء آن هم حاصلضرب داشته باشد.

تعریف ۳۶.۲.۱. ریخت‌های $f_۱, f_۲ : X \to Y$، در رسته $\mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم. ریخت $e : E \to X$، برابرکننده $f_۱, f_۲$، در $\mathbf{C}$ گفته می‌شود هر گاه،

(۱) $f_1 e = f_2 e$.

(۲) برای هر ریختی چون $h : H \to X$ با $f_1 h = f_2 h$، یک ریخت منحصر به فرد $\bar{h} : H \to E$ وجود داشته باشد، به طوری که $h = e\bar{h}$، به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\bar{h}"'] & X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & Y \\ E \arrow[ur, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

تعریف ۳۷.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$ دارای برابر کننده است اگر هر جفت از ریخت‌های $f, g : A \to B$ یک برابر کننده داشته باشد.

تعریف ۳۸.۲.۱. ریخت‌های $f_1, f_2 : X \to Y$، در رسته $\mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم. ریخت $e : Y \to E$، هم برابر کننده f_1, f_2، در $\mathbf{C}$ گفته می‌شود هر گاه،

(۱) $e f_1 = e f_2$.

(۲) برای هر ریخت $h : Y \to H$ با $h f_1 = h f_2$، یک ریخت منحصر به فرد $\bar{h} : E \to H$ وجود داشته باشد، به طوری که $h = \bar{h} e$، به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "e"'] & H \\ & & E \arrow[u, "\bar{h}"'] \end{tikzcd}$$

تعریف ۳۹.۲.۱. رسته $\mathbf{C}$ دارای هم برابر کننده است اگر هر جفت از ریخت‌های $f, g : A \to B$ یک هم برابر کننده داشته باشد.

قضیه ۴۰.۲.۱. برابر کننده‌ها، تکریختی و هم برابر کننده‌ها، برووریختی می‌باشند.

برهان: به ([۷]، قضیه ۲.۸ و ۲.۹) مراجعه شود.□

تعریف ۴۱.۲.۱. فرض کنیم ریخت‌های f_1 و f_2، در رسته $\mathbf{C}$ به صورت زیر داده شده باشند:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

جفت $(P,(p_1,p_2))$ با $p_i : P \to X_i$ برای $i = 1,2$ در رسته $\mathbf{C}$ عقب‌بر جفت (f_1,f_2) نامیده می‌شود هر گاه:

(۱) $f_1p_1 = f_2p_2$.

(۲) برای هر جفت $(P',(p'_1,p'_2))$ به طوری که، $i = 1,2$، $p'_i : P' \to X_i$ و $f_1p'_1 = f_2p'_2$، ریخت منحصر به فردی چون $p : P' \to P$ وجود داشته باشد، به طوری که برای $i = 1,2$، $p_ip = p'_i$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, "p'_1"] \arrow[ddr, "p'_2"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
 & X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

می‌گوییم p، عقب‌بر جفت (p'_1,p'_2) می‌باشد. عقب‌بر $(K,(p_1,p_2))$ از جفت (f,f) برای ریخت $f : X \to Y$ را جفت هسته f می نامیم.

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنیم ریخت‌های $f_1 : X \to Y_1$ و $f_2 : X \to Y_2$، در رسته $\mathbf{C}$ داده شده باشند:

$$\begin{tikzcd}
Y_1 & \\
X \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

جفت $((q_1,q_2),Q)$ با $q_i : Y_i \to Q$ برای $i = 1,2$، در رسته $\mathbf{C}$ را جلوبر جفت (f_1,f_2) نامیده می‌شود هر گاه:

(۱) $q_1f_1 = q_2f_2$.