بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی

(گرایش محض)

جبرهای باناخ با نرم یکنواخت یکتا (۲)

از:

محمد حسین نوراله‌زاده

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل انصاری

(دی ۱۳۸۵)

تقدیم به خانواده عزیز

و

همسر مهربانم

تقدیر و تشکر

با سپاس از یگانه خالق هستی، همان قادر مطلق که با استعانت از لطف بیکران او توفیق انجام این پایان نامه را یافتم.

وظیفهٔ خود می‌دانم که از تمامی اساتید دلسوز گروه ریاضی این دانشکده، خصوصاً استاد بزرگوار ، دکتر اسماعیل انصاری که در کلیهٔ مراحل انجام این پایان نامه، استادانه مرا راهنمایی نمودند تشکر نمایم.

فهرست مطالب

چکیده

جبرهای باناخ با نرم یکنواخت یکتا (۲)

محمد حسین نوراله‌زاده

جبر باناخ جابجایی شبه سادهٔ A که دقیقاً یک نرم یکنواخت می‌پذیرد بررسی شده است.
A خاصیت نرم یکنواخت یکتا دارد اگر و فقط اگر U(A) (که اتمام A نسبت به شعاع طیفی $r(.)$ است)، خاصیت نرم یکنواخت یکتا داشته باشد و برای هر ایده‌آل ترکیب طیفی غیر صفر مثل I از U(A) ، $A \cap I$ غیر صفر باشد.

A منظم است اگر و فقط اگر U(A) منظم باشد و برای هر ایده‌آل ترکیب طیفی مانند I از A ، $\frac{A}{I}$ خاصیت نرم یکنواخت یکتا داشته باشد اگر و فقط اگر U(A) منظم باشد و برای هر ایده‌آل ترکیب طیفی از U(A) ، $I = K(h(A \cap I))$.

A خاصیت نرم یکنواخت یکتا دارد و مرز شیلو با فضای گلفند مطابق است اگر و فقط اگر A ضعیف منظم باشد. ضعیف منظم بودن A به این معناست که برای هر زیرمجموعهٔ محضِ بستهٔ داده شده از فضای گلفند مانند F ، وجود داشته باشد x ای مخالف صفر در A که نمایش گلفند آن روی F صفر شود.

کلید واژه : خاصیت نرم یکنواخت یکتا ، جبرهای باناخ منظم ، خاصیت C^*– نرم یکتا.

Abstract

Banach algebras with unique uniform norm II
M.H. Nourallahzadeh

Semisimple commutative Banach algebras A admitting exactly one uniform norm (not necessarily complete) are investigated.
A has this Unique Uniform Norm Property if and only if the completion U(A) of A in the spectral radius r(.) has unique uniform norm property (UUNP) and , for any non–zero spectral synthesis ideal I of U(A), $I \cap A$ is non-zero. A is regular if and only if U(A) is regular and for any spectral synthesis ideal I of A , $\frac{A}{I}$
has UUNP if and only if U(A) is regular and for any spectral synthesis ideal I of U(A), $I = k(h(A \cap I))$ (hull and kernels in U(A)). A has UUNP and the shilov boundary coincides with the Gelfand space if and only if A is weakly regular in the sense that, given a proper, closed subset F of the Gelfand space, there exists a non-zero x in A having its Gelfand transform vanishing on F.

Key words : unique uniform norm property , regular Banach algebras , unique C*- norm property .

پیشگفتار.

در این پایان نامه جبرهای باناخ جابجایی شبه ساده که دقیقاً یک نرم یکنواخت می‌پذیرند بررسی شده است.

هدف ما در این پایان نامه ارائه و بررسی قضایا و تعاریف موجود در مقاله [٦] می‌باشد.

این سومین مقاله‌ای است که آقای بهات در این زمینه در سال ۲۰۰۱ به رشته تحریر درآورده است[٦] و در ادامه دو مقاله دیگر ایشان در سالهای ۱۹۹۵ و ١٩٩٦ می باشد ولی کاملا مستقل از آن دو است.

مقاله ایشان در سال ١٩٩٦ با عنوان جبرهای باناخ با نرم یکنواخت یکتا موضوع پایان نامه آقای قنبری درسال ۱۳۸۰ (دانشجوی دکتر اسماعیل انصاری در دانشگاه گیلان) قرار گرفت[۱]، به همین منظور این پایان نامه یکی از مراجع ما قرار گرفته است.

در پایان نامه حاضر بررسی خواهد شد که آیا خواص در نظر گرفته شده برای جبر باناخ، جابجایی و شبه ساده به اتمام آن جبر منتقل می شود؟ و آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

در ادامه بررسی می کنیم که چه شرایطی برای جبر باناخ، جابجایی و شبه ساده در نظر بگیریم تا سوالات مطرح شده به جواب منتهی گردد.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است. در شروع هر فصل سعی شده تا مفاهیم و تعاریف مورد نیاز آن فصل ارائه گردد. فصل اول به تعاریف و قضایای پیش نیاز اختصاص دارد. فصل دوم به قضایا و مفاهیم اصلی اختصاص دارد و فصل سوم با بیان مثالهایی کاربرد فصل دوم را مشخص می‌کند.

فصل اول

فضای برداری و جبری.

در این فصل تعاریف و قضایای به کار رفته در سراسر این پایان نامه را به منظور سهولت در به کار گیری مکرر گردآوری نموده‌ایم.

بدیهی است که این تعاریف در کتابهای مختلف آنالیز تابعی و کتابهای مربوط به جبرهای باناخ یافت می‌شود.

۱-۱ تعریف فضای برداری توپولوژیکی.

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F (اعداد حقیقی یا مختلط) و τ یک توپولوژی روی X باشد. اگـر در ایـن توپولوژی دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) هر مجموعه تک عضوی بسته باشد.

ب) اعمال فضال برداری نسبت به این توپولوژی پیوسته باشند. یعنی اعمال:

$$\begin{array}{l} \bullet : F\times X \to X \\ (\alpha, x) \to \alpha x \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} + : X\times X \to X \\ (x,y) \to x+y \end{array} .$$

پیوسته باشند آنگاه (X,τ) را یک فضای برداری توپولوژیکی گویند.

۲-۱ تعریف گروه توپولوژیکی.

اگر G یک گروه باشد و روی G یک توپولوژی تعریف شود بطوریکه اعمال گروه یعنی ضرب و وارون پذیری نـسبت بـه آن پیوسته باشند. در این صورت G را یک گروه توپولوژیکی گویند.

اعمال: $\begin{array}{l} G\to G \\ a\to a^{-1} \end{array}$ و $\begin{array}{l} G\times G\to G \\ (a,b)\to ab \end{array}$ باید پیوسته باشند.

۳-۱ تعریف فضای برداری توپولوژیکی تام.

فضای برداری توپولوژیکی (X,τ) را تام (کامل) نامیم، اگر هر دنبالهٔ کشی در فضا به نقطه‌ای در آن فضا همگرا باشد.

۴-۱ تعریف فضای برداری نرمدار.

فضای برداری X را نرمدار می‌نامیم اگر تابع حقیقی مانند $\|.\|$ را بتوان روی X تعریف کرد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{array}{l} \|.\| : X \to R^{+} \\ x \to \|x\| \end{array} .$$

برای هر x, y در X و هر α در F داشته باشیم:

$$(1) \qquad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| .$$

$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$. (۲)

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. (۳)

۱–۵ فضای برداری توپولوژیکی نرمدار.

فضای برداری توپولوژیکی X را نرمدار می‌نامیم اگر بتوان نرمی روی آن گذاشت که توپولوژی حاصل از نرم بـا توپولـوژی فضا یکی باشد.

۱–٦ تابع نیم نرم.

تابع حقیقی p روی فضای برداری X را نیم نرم نامیم اگر برای هر x,y در X و هر α در F داشته باشیم:

$$\begin{aligned} P &: X \to R^+ \\ x &\to P(x) \end{aligned}$$

$P(x+y) \leq P(x) + P(y)$. (۱)

$P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$. (۲)

بدیهی است اگر تابع نیم نرم p در شرط $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ صدق کند، X همراه با p یک فضای برداری نرمدار است.

۱–۷ خانواده‌های جداکننده از توابع.

اگر $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از توابع روی فضای برداری توپولوژیکی X باشد آن را یک خـانواده جداکننـده از توابـع روی X می‌نامیم اگر وجود داشته باشد $\alpha \in I$ بطوریکه برای هر x ناصفر در X، $f_\alpha(x) \neq 0$.

۱–۸ تبصره.

اگر $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از توابع خطی روی X باشد، تعریف جدا کننده در بالا را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

وجود داشته باشد $\alpha \in I$ بطوریکه برای هر x,y متمایز در X، $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

۱–۹ نرمهای معادل.

نرمهای p_2, p_1 را روی فضای برداری X معادل می‌نامند اگر توپولوژیهایی که این نرمها روی X تولید می‌کنند با هم یکـی باشند.

۱–۱۰ قضیه.

نرمهای p_2, p_1 روی فضای برداری X معادلند اگر و تنها اگر اعداد مثبت M , N وجود داشته باشند بطوریکه برای هر x ناصفر در X نامساوی زیر برقرار باشد:

$$M \le \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \le N \ .$$

برهان: فرض کنید برای هر x ناصفر در X نامساوی $M \le \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \le N$ برقرار باشد. ادعا می‌کنیم دو نرم p_2, p_1 با هم معادل هستند زیرا اگر $\beta_r^{(1)}(0)$ گوی باز به مرکز صفر و شعاع r نسبت به نرم p_1 باشد و همچنین $\beta_{\frac{r}{N}}^{(2)}(0)$ گوی باز به مرکز صفر و شعاع $\frac{r}{N}$ نسبت به نرم p_2 باشد از نامساوی سمت راست نتیجه می‌گیریم که:

$$\beta_r^{(1)}(0) \subseteq \beta_{\frac{r}{N}}^{(2)}(0) \ .$$

زیرا داریم $\beta_r^{(1)}(0) = \{x \in X \mid p_1(x) < r\} \subseteq \{x \in X \mid Np_2(x) < r\} = \beta_{\frac{r}{N}}^{(2)}(0)$.

و به طریق مشابه از نامساوی سمت چپ نتیجه می‌شود که: $\beta_r^{(2)}(0) \subseteq \beta_{r.M}^{(1)}(0)$.

بنابر این پایه‌های موضعی در صفر، توسط دو توپولوژی بوجود آمده بوسیله دو نرم p_2, p_1 با هم معادلند در نتیجه دو نرم p_2, p_1 معادلند.

برعکس، فرض کنیم p_2, p_1 دو نرم معادل رویX باشند. با در نظر گرفتن گوی باز $\beta_l^{(1)}(0)$، $r > 0$ چنان وجود دارد که:

$$\beta_r^{(2)}(0) \subseteq \beta_l^{(1)}(0) \qquad (۱)$$

یعنی برای هر $x \in X$ که $p_2(x) < r$ آنگاه $p_1(x) < 1$.

حال برای هر y ناصفر درX در نظر می‌گیریم $x = \frac{ry}{2p_2(y)}$ ، بنابر این داریم:

$$p_2(x) = p_2\left(\frac{ry}{2p_2(y)}\right) = \frac{r}{2p_2(y)}.p_2(y) = \frac{r}{2} < r \ .$$

پس $p_1(x) < 1$ بعبارتی داریم:

$$p_1(y) < \frac{2}{r} p_2(y) \ .$$

حال با در نظر گرفتن $N \ge \frac{2}{r}$ یک طرف نامساوی قضیه را بدست می‌آوریم و به طریق مشابه طرف دیگر نامساوی مذکور بدست می‌آید.

۱-۱۱ توپولوژی $*$– ضعیف روی فضای دوگان.

فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی و X^* فضای تابعکهای خطی پیوسته روی X باشد. حال برای هر $x \in X$ تابعک

خطی $\hat{x}$ روی X^* را بصورت روبرو تعریف می‌کنیم: $\begin{aligned}&\hat{x}: X^* \to F\\&\hat{x}(f) = f(x)\end{aligned}$.

داریم $\{\hat{x} \mid x \in X\}$ نقاط روی X^* را جدا می‌کند.

ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* که خانواده تابعکهای $\{\hat{x} \mid x \in X\}$ در آن پیوسته‌اند را توپولوژی $*$– ضعیف روی X^* می‌نامیم که با w^* - توپولوژی نیز نمایش داده می‌شود.

۱-۱۲ جبر.

فضای برداری A روی میدان F، همراه با تابع $\varphi: A \times A \to A$ را که $\varphi(x,y) = xy$ یک جبر روی میدان F گویند اگر در موارد زیر صدق کند:

(۱) $x(yz) = (xy)z$.

(۲) $x(y+z) = xy + xz \;,\; (y+z)x = yx + zx$.

(۳) $(\alpha x)y = x(\alpha y)$.

در این تعریف اگر فرض کنیم $F = R$ آنگاه یک جبر حقیقی و اگر میدان، اعداد مختلط باشد یک جبر مختلط خواهیم داشت. همچنین در این تعریف تابع $\varphi: A \times A \to A$ را یک ضرب در A گویند و به بردار xy ضرب x,y گویند.

۱-۱۳ عضو واحد.

جبر A دارای عضو واحد است اگر $e \in A$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$xe = ex = x .$$

e را به عنوان عضو واحد جبر A معمولا با ۱ نمایش می‌دهیم و A را جبر یکدار می‌نامیم.

۱-۱٤ مثال.

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد اگر مجموعه توابع خطی از X به X را با L(X) نمایش دهیم با جمع و ضرب اسکالر توابع، L(X) ، به یک فضای برداری تبدیل می‌شود. حال اگر برای هر $s,t \in L(X)$ ضرب را به صورت $s.t = sot$ تعریف کنیم، L(X) تبدیل به یک جبر یکدار خواهد شد که معمولاً آن را یک جبر توابع می‌نامیم.

۱–۱۵ جبر توپولوژیکی.

فضای برداری توپولوژیکی A را جبر توپولوژیکی می‌نامیم، اگر :

اولا: A یک جبر باشد.

ثانیا: عمل ضرب $\begin{cases} \varphi : A\times A \to A \\ (x,y) \to xy \end{cases}$ نسبت به توپولوژی که روی A * A تعریف شده است جدا جدا پیوسته باشد.

۱–۱٦ نرم جبری.

فرض کنید A یک جبر باشد به نرم P روی فضای برداری A که در شرط زیر صدق کند یک نرم جبری گویند.

$$p(xy) \le p(x)p(y) \qquad (x,y \in A).$$

این خاصیت را، خاصیت زیر ضربیِ نرم P نیز می‌گویند.

۱–۱۷ جبر نرمدار.

به جبر A همراه با یک نرم جبری P ، یک جبر نرمدار گویند و به صورت (A,P) نشان می‌دهند.

۱–۱۸ جبر توپولوژیکی تام.

جبر توپولوژیکی A را جبر توپولوژیکی تام می‌نامیم اگر فضای برداری توپولوژیکی آن تام باشد.

۱–۱۹ جبر باناخ.

یک جبر نرمدار (A,P) را جبر باناخ گویند اگر فضای برداری نرمدار A با نرم P تام باشد.

۱–۲۰ زیر جبر.

فرض کنید A یک جبر و $B \subseteq A$ باشد، B را یک زیر جبر A گویند اگر B زیر فضای برداری باشد بطوریکه برای هر $x,y \in B$ داشته باشیم:

$$xy \in B\ .$$

۱–۲۱ زیر جبر چگال.

اگر A یک جبر توپولوژیکی باشد و B یک زیر جبر A باشد آنگاه B در A چگال است اگر $\overline{B} = A$.

۱-۲۲ هومرفیسم جبری.

اگر A و B جبرهای دلخواه باشند نگاشت Φ از A به B را هومرفیسم جبری مـی‌نـامیم اگـر بـرای هـر $a,b\in A$ و هـر $\alpha\in F$ داشته باشیم:

$$.\Phi(a+b)=\Phi(a)+\Phi(b) \qquad (۱)$$

$$.\Phi(ab)=\Phi(a)\Phi(b) \qquad (۲)$$

$$.\Phi(\alpha a)=\alpha\Phi(a) \qquad (۳)$$

هومرفیسم جبری را به اختصار هومرفیسم نیز می‌نامند.

۱-۲۳ یکه سازی جبر A.

فرض کنیم A جبر بدون واحد باشد یکدار شدهٔ آن را به صورت A+F نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم:

$$A+F=\{(a,\alpha)\mid a\in A,\alpha\in F\}.$$

که با اعمال زیر تبدیل به یک جبر یکدار می‌شود.

برای هر (x,α) و (y,β) در A+F و هر $\lambda\in F$ داشته باشیم:

$$.(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\alpha+\beta) \qquad (۱)$$

$$.\lambda(x,\alpha)=(\lambda x,\lambda\alpha) \qquad (۲)$$

$$.\ (x,\alpha)(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\ \alpha\beta) \quad (۳)$$

اگر فرض کنیم A یک جبر نرمدار باشد آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\|(x,\alpha)\|=\|x\|+|\alpha|.$$

که A+F را به جبر نرمدار تبدیل می‌کند و $(0,1)$ عضو واحد جبر A+F است.

۱-۲٤ تبصره.

با هومرفیسم جبری $\begin{cases}\pi: A\to A+F\\ a\to(a,0)\end{cases}$ ، A را می‌توان یک زیر جبر A+F در تعریف (۱-۲۳) در نظر گرفت.

۱-۲۵ معکوس(چپ- راست).

فرض کنیم A جبر یکدار باشد. b را وارون یا معکوس راست (چپ) a می‌نامیم، اگر داشته باشیم،

$$ab=1 \quad (ba=1).$$

براحتی دیده می‌شود اگر a دارای وارون راست و وارون چپ باشد، آنگاه وارون چپ و راست آن بـا هـم برابـر هـستند و در این حالت a را وارون پذیر می‌نامیم که معمولا آن را با a^{-1} نشان می‌دهیم که در صورت وجود یکتاسـت. مجموعـه عناصـر وارون پذیر هر جبر یکدار A را با inv(A) و بقیه عناصر آن را با sing(A) (عناصر غیر وارون پذیر) نشان می‌دهند.

۱-۲۶ شعاع طیفی.

فرض کنید a یک عضو از جبر نرمدار $(A,\|.\|)$ باشد. شعاع طیفی a را که با $r_A(a)$ نشان می‌دهیم، بـه صـورت زیـر تعریف می‌کنیم $r_A(a)=\inf\left\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \mid n=1,2,\ldots\right\}$ و اگر باعث اشتباه نشود می‌تـوان از نمـاد $r(a)$ بـه جـای $r_A(a)$ استفاده کرد.

۱-۲۷ قضیه.

فرض کنید a یک عضو از جبر نرمدار A باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ وجود دارد و $r(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

برهان: [۹ : ۲.۸]

همچنین داریم $\lim\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\leq\|a\|$ ، زیرا به ازای $n=1$ ، $r(a)\leq\|a\|$.

۱-۲۸ گسترش جبر.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. جبر باناخ B را یک گسترش A گویند اگر A را از راه جبری بتوان در B نشاند. یعنـی A را بتوان به وسیلهٔ یک هومرفیسم (نه حتما پیوسته) در داخل B نشاند.

۱-۲۹ تبصره.

۱. فرض کنید A و B جبرهای دلخواه باشند. یک منومرفیسم یک هومرفیسمِ یک به یک و یـک ایزومرفیـسم، یـک هومرفیسمِ دوسویی است.

۲. فرض کنید A و B دو جبر نرمدار باشند. یک ایزومرفیسم توپولوژیکی از A بـه روی B ، یـک ایزومرفیـسم از A به روی B هست به قسمی که یک همیومرفیسم از فضای توپولـوژیکی A بـه روی فـضای توپولـوژیکی B نیـز باشد.

۳. فرض کنید A و B دو جبر نرمدار باشند. یک ایزومتریک ایزومرفیسم از A به روی B، یک ایزومرفیسم مثل T از جبر A به روی جبر B است به طوری که T یک ایزومتریک از فضای متریکِ A به روی فضای متریکِ B نیز باشد. با شرط:

$$\|Tx-Ty\|=\|x-y\| \qquad (x,y)\in A.$$

و اگر T خطی باشد خواهیم داشت:

$$\|Tx\|=\|x\| \qquad (x\in A).$$

۱–۳۰ قضیه.

فرض کنید A یک جبر نرمدار باشد. آنگاه جبر باناخ B و یک ایزومتریک ایزومرفیسم از A به روی زیر جبر چگال B وجود دارد. همچنین B با مقیاس ایزومتریک ایزومرفیسم یکتاست.

برهان: [۹ : ۱.۱۲]

۱–۳۱ اتمام جبر نرمدار X.

فرض کنید **X** یک جبر نرمدار باشد، جبر باناخ A را اتمام جبر **X** گویند اگر یک ایزومتریک ایزومرفیسم از **X** به روی زیر جبر چگال A وجود داشته باشد.

۱–۳۲ تبصره.

اگر $(X,\|.\|)$ یک جبر نرمدار و A اتمام **X** نسبت به نرم $\|.\|$ باشد. آنگاه عناصر A بصورت کلاسهای هم ارزیِ دنباله‌های کوشی از اعضای **X** می‌باشند.

۱–۳۳ مثال.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، که $X=\{p:[0,1]\to R\}$ که P چند جمله‌ای است و

$$\forall x\in X: p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \qquad (n\in \mathrm{N}).$$

$$d(p,q)=\max\{\,|p(x)-q(x)|: x\in[0,1]\,\} \qquad (p,q\in X).$$

(X,d) یک فضای متری کامل نیست زیرا $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ کشی است ولی همگرا نیست. برای اینکه یک فضای متری کامل داشته باشیم بصورت زیر عمل می‌نماییم:

اگر $(x_n),(y_n)$ دنباله‌های کوشی در X باشند آنگاه دنباله (x_n) هم ارز دنباله (y_n) خوانده می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

اگر اتمام X را با A نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$A = \{ [(x_n)] : \text{است } X \text{ دنباله کشی در } (x_n) \} .$$

متری که روی A تعریف می‌شود بدین صورت است:

$$\rho([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) .$$

به این ترتیب (A, ρ) اتمام (X, d) خوانده می‌شود و X در A چگال است.

حال اگر $(B, \|.\|)$ یک جبر نرمدار باشد داریم:

دنباله (x_n) هم ارز دنباله (y_n) است اگر و تنها اگر $\lim\|x_n - y_n\| = 0$ و اتمام جبر نرمدار B خواهد شد:

$$D = \{ [(x_n)] : \text{است } B \text{ دنباله کشی در } (x_n) \}.$$

در این صورت $(D, \|.\|)$ یک جبر نرمدار خواهد شد اگر:

(۱) $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$.

(۲) $\alpha[(x_n)] = [(\alpha x_n)]$.

(۳) $[(x_n)][(y_n)] = [(x_n y_n)]$.

۱-۳٤ شبه ضرب.

فرض کنید x , y متعلق به جبر A باشد. شبه ضرب x , y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$xoy = x + y - xy .$$

۱-۳۵ شبه وارون (چپ- راست).

فرض کنید a یک عضو از جبر A باشد عضو b از A را شبه وارون چپ (راست)، a گویند هرگاه داشته باشیم:

$$boa = 0 \quad (aob = 0) .$$

در این صورت a را شبه وارون پذیر چپ (راست) گویند.

اگر a یک عضو از A و شبه وارون پذیر چپ و راست باشد به آن شبه وارون پذیر گویند. عناصر شبه وارون پذیر A را توسط $q - inv(A)$ و عناصری از A ، که شبه وارون پذیر نباشند را با $q - \sin g(A)$ نشان می‌دهیم.

۱-۳٦ تعریف.

فرض کنید$(A,\|.\|)$ یک جبر نرمدار باشد مجموعه تمام نرمهای جبری روی A که با $\|.\|$ هم ارز است را با En(A) نشان می‌دهیم و اگر A دارای عضو واحد باشد تعریف می‌کنیم:

$$Eun(A)=\{p\in En(A): p(1)=1\}.$$

۱-۳۷ قضیه.

فرض کنید S مجموعه‌ای کراندار و زیر شبه گروه (بسته نسبت به ضرب A) از A باشد آنگاه وجود دارد $p\in En(A)$ بطوریکه: $p(s)\leq 1 \quad (s\in S)$.

و اگر A یکدار باشد $p\in Eun(A)$ است.

برهان: [۱. ٤ :۹]

۱-۳۸ قضیه.

فرض کنید $(A,\|.\|)$ یک جبر نرمدار باشد.

۱. اگر A یکدار نباشد $r(a)=\inf\{p(a): p\in En(A)\}$.

۲. اگر A یکدار باشد $r(a)=\inf\{p(a): p\in Eun(A)\}$.

برهان: به ازای هر $p\in En(A)$ ، وجود دارد M و N ای در اعداد طبیعی بطوریکه داریم:

$$p(x)\leq N\|x\| \qquad , \qquad \|x\|\leq Mp(x) \; .$$

از طرفی $r_p(a)=r_{\|.\|}(a)$ بنابر این داریم:

$$\inf\left\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} : a\in A, n=1,2,...\right\}=\inf\left\{\left(p(a^n)^{\frac{1}{n}}\right): a\in A, n=1,2,...\right\}.$$

در نتیجه $r(a)\leq p(a)$.

حال اگر $r(a)\leq 1$ نتیجه می‌شود که $\{a^n : n=1,2,...\}$ یک زیر شبه گروه کراندار خواهد شد.

پس بنابر قضیه (۱-۳۸) وجود دارد $p\in En(A)$ و $p(a)\leq 1$ که این نتیجه می‌دهد:

$$r(a)=\inf\{p(a): p\in En(A)\} \; .$$

زیرا:

$$\forall \varepsilon>0 \qquad r(a)<r(a)+\frac{\varepsilon}{2} \ .$$

اگر فرض شود که $r(a)+\frac{\varepsilon}{2}=\lambda$ داریم:

$$\lambda^{-1} r(a)<1 \Rightarrow r\left(\lambda^{-1} a\right)<1 \Rightarrow p\left(\lambda^{-1} a\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow p(a) \leq \lambda \Rightarrow p(a) \leq r(a)+\frac{\varepsilon}{2}<r(a)+\varepsilon \ .$$

حال اگر A یکدار باشد مورد دوم قضیه بدست می‌آید یعنی:

$$r(a)=\inf \{p(a): p \in Eun(A)\} \ .$$

۱-۳۹ قضیه.

فرض کنید A یک جبر نرمدار باشد. اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab=ba$ آنگاه خواهیم داشت:

$$r(ab) \leq r(a) r(b) .$$

$$r(a+b) \leq r(a)+r(b) \ .$$

برهان: فرض کنیم $\varepsilon>0$ و $u=(r(a)+\varepsilon)^{-1} . a$ و $v=(r(b)+\varepsilon)^{-1} . b$.

آنگاه $u, v \in \mathrm{A}$ و داریم:

$$r(u)=\frac{r(a)}{r(a)+\varepsilon}<1 .$$

$$r(v)=\frac{r(b)}{r(b)+\varepsilon}<1 \ .$$

چون $uv=vu$ بنابر این S یک زیر شبه گروه است. (نسبت به عمل ضرب A بسته است.)

همچنین داریم:

$$r(u)<1 \Rightarrow \lim \left\|u^n\right\|^{\frac{1}{n}}<1 \Rightarrow \exists N_1, \forall n \geq N_1 \qquad \left\|u^n\right\|<1 .$$

$$r(v)<1 \Rightarrow \lim \left\|v^n\right\|^{\frac{1}{n}}<1 \Rightarrow \exists N_2, \forall n \geq N_2 \qquad \left\|v^n\right\|<1 .$$

$$N_0=\sup \left\{\|u\|, \ldots,\|u\|^{N_1-1},\|v\|, \ldots,\|v\|^{N_2-1}, 1\right\}.$$

$$\forall x \in S \qquad \|x\|<N_0^2 \ .$$

بنابر این S کراندار است. طبق قضیه (۱-۳۸) $p \in Eun(A)$ وجود دارد بطوریکه: