بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه‌ای بر ساخت و تشخیص هم‌ارزی طرح‌های فاکتوریل کسری

استاد راهنما:

دکتر هوشنگ طالبی

پژوهشگر:

هاله سادات نکویی زهرایی

مهر ماه ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

هاله السادات نکویی

تحت عنوان

مطالعه ای بر ساخت و تشخیص هم ارزی طرح های فاکتوریل کسری

در تاریخ ۸۹/۷/ ۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر هوشنگ طالبی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- استادداور داخل گروه پایان‌نامه دکتر منوچهر خردمند نیا با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داورخارج از گروه دکتر سعید پولاد ساز با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

سپاس پروردگار بی‌همتا را که در سایه الطاف بی‌پایانش چون خورشید فروزان پرتوافشان راهم شد تا در عبور از جاده پرفراز و نشیب زندگی تن به جهل و ظلمت نسپارم و در سایه سار علم و اندیشه تنفس کنم. مسرور و شادمانم از این که به یاری پروردگار یک‌بار دیگر توانسته‌ام در فضایی مملو از صفا و صمیمیت حقایق را تجربه نموده و تلاش چندین ساله‌ام را سامان بخشم. اینک که دیگر بار هوای تازه از این کوی به مشامم می‌رسد به مصداق آیه‌ی **لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** بر خود لازم می‌دانم که مراتب تشکر و قدردانی خویش را از تمام اساتید دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد که همواره مشوقم بودند به عمل آورم.

بی‌تردید این مجموعه را مرهون تلاش و زحمات استاد راهنمایم، **جناب آقای دکتر طالبی** می‌دانم که فراتر از یک استاد راهنما، در نهایت صبر و شکیبایی، تشویق و راهنمایی نموده و در تمام مراحل مرا مورد لطف و محبت خویش قرار دادند به همین لحاظ از ایشان که در این مجموعه یاریم نمودند خالصانه و از صمیم قلب سپاسگزارم.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم، اولین آموزگاران اخلاق و تربیت من، اسطوره محبت، بردباری صداقت و ایمان که وجودشان گرمی بخش زندگی من است و با بذل محبت صمیمانه خود همواره مشوق و راهنمایم بوده اند و اگر بذل الطاف آن عزیزان نبود هرگز عشق به تحصیل و کسب علم در من شکوفا نمی گشت.

چکیده

طرح‌های عاملی کسری یک انتخاب رایج در طراحی آزمایش‌ها برای مطالعه اثرات چندین عامل به صورت هم‌زمان است. در برخی موارد آزمایش‌گر برای اجرای یک طرح عاملی کسری در صنعت یا آزمایشگاه با محدودیت‌هایی مواجه است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به قابل اجرا نبودن برخی ترکیبات تیماری طرح، هزینه‌های گزاف برای اجرای طرح و یا تأثیر بیش از حد متغیرهای اغتشاش بر روی اجراها اشاره کرد. در چنین مواردی لازم است طرحی هم‌ارز با طرح قبلی پیشنهاد شود تا علاوه بر این‌که ویژگی‌های این طرح یکسان با ویژگی‌های طرح قبلی باشد و نظر آزمایشگر را تأمین کند، تمام ترکیبات تیماری طرح پیشنهادی قابل اجرا باشد و موجب کاهش هزینه‌ها و پراکندگی مؤثر بر اجراهای طرح گردد. از این رو شناسایی و تشخیص طرح‌های هم‌ارز امری ضروری است.

یک واقعیت مهم در طرح آزمایش‌ها این است که آزمایشگر این اختیار را دارد که به صورت کاملاً تصادفی مرتبه‌ی اجرای ترکیبات تیماری و یا موقعیت عامل‌ها را تغییر دهد. دو طرح با تعداد اجراها، عامل‌ها و سطوح یکسان، هم‌ارز هستند اگر یک طرح با نام‌گذاری مجدد عامل‌ها، جایگشت در مرتبه‌ی اجرای ترکیبات تیماری و یا برچسب‌گذاری مجدد سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به‌دست آید. طرح‌های هم‌ارز ویژگی‌های آماری یکسانی از جمله برآورد اثرات، برازش مدل و تشخیص مدل صحیح از میان مدل‌های رقیب را دارا می‌باشند. در طرح‌های عاملی با عواملی که همگی در $s(\geq 3)$ سطح تغییر می‌کنند، با توجه به این‌که عامل‌ها کمی یا کیفی هستند، دو نوع هم‌ارزی به ترتیب هم‌ارزی هندسی و هم‌ارزی ترکیبیاتی وجود دارد. در صورتی که تمام عوامل موجود در طرح دو سطحی باشند، هم‌ارزی هندسی و هم‌ارزی ترکیبیاتی بر هم منطبق خواهند شد.

در این نوشتار شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی در طرح‌های عاملی دو سطحی و همچنین برای تشخیص هم‌ارزی ترکیبیاتی و هندسی ارائه می‌شود. این روش‌ها در حالت کلی برای طرح‌های عاملی و بدون این‌که ویژگی خاصی از طرح‌ها مورد نظر باشد، مطرح می‌گردند. اما طرح‌های عاملی کسری به دو دسته منظم و نامنظم تقسیم می‌شوند. طرح‌های کسری که با استفاده از رابطه معرف ساخته می‌شوند، طرح‌های منظم و در غیر این صورت طرح‌های نامنظم نامیده می‌شوند. شرط‌های لازم و کافی ویژه‌ای براساس رابطه معرف برای تشخیص هم‌ارزی دو طرح عاملی کسری منظم وجود دارد. در این پایان‌نامه به معرفی این روش‌ها می‌پردازیم.

شرط‌های لازم و کافی همیشه بین دو طرح غیر هم‌ارز تفاوت قائل می‌شوند. اما این شرط‌ها در تعیین هم‌ارزی دو طرح بسیار کُند عمل می‌کنند. از این رو نیاز به شرط‌های لازمی که تنها قادر به تشخیص عدم هم‌ارزی بین طرح‌ها هستند و سریع‌تر از شرط‌های لازم و کافی هم‌ارزی را تشخیص دهند، احساس می‌شود. در این پایان‌نامه همچنین به ارائه کاربردهای هم‌ارزی برای تهیه فهرستی از طرح‌ها و تعیین هم‌ارزی کاوش می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: طرح‌های عاملی کسری منظم، طرح‌های نامنظم، هم‌ارزی ترکیبیاتی، هم‌ارزی کاوش، هم‌ارزی هندسی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمه، تعاریف و اصطلاحات

۱-۱- معرفی موضوع و پیشینه تحقیق ۱

۱-۲- اهداف تحقیق ۷

۱-۳- کاربرد نتایج تحقیق ۷

۱-۴- معرفی ساختار پایان‌نامه ۸

فصل دوم: طرح‌های عاملی

۲-۱- طرح‌های عاملی دو سطحی کامل ۱۱

۲-۲- طرح‌های عاملی کسری 2^{k-p} ۱۵

۲-۳- طرح‌های عاملی کسری نامنظم ۲۴

۲-۴- هم‌ارزی در طرح‌های عاملی ۳۲

فصل سوم: هم‌ارزی در طرح‌های عاملی دو سطحی

۳-۱- شرط‌های لازم و کافی در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های عاملی دو سطحی ۳۶

۳-۱-۱- روش کلارک و دین ۳۶

۳-۱-۲- روش کاتسونیس و دین ۴۲

۳-۱-۳- روش تابع نشانگر ۴۹

۳-۲- شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های عاملی دو سطحی ۶۰

۳-۲-۱- روش توزیع فاصله همینگ ۶۱

۳-۲-۲- روش تصویر انحراف گشتاوری ۶۲

۳-۲-۳- توان دوم اختلاف $\mathcal{L}_2$ مرکزی شده ۶۵

۳-۲-۴- روش وزن همینگ ۶۹

۳-۲-۵- روش کوتاه‌ترین ستون پایه ۷۷

عنوان **صفحه**

فصل چهارم: هم‌ارزی در برخی طرح‌های عاملی ویژه

۴-۱- هم‌ارزی ترکیبیاتی در طرح‌های عاملی با بیش از دو سطح ۸۳
۴-۱-۱- شرط‌های لازم و کافی در تشخیص هم‌ارزی ترکیبیاتی ۸۳
۴-۱-۱-۱- روش کلارک و دین ۸۴
۴-۱-۱-۲- روش کاتسونیس و دین ۹۱
۴-۱-۲- شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی ترکیبیاتی ۹۸
۴-۱-۲-۱- روش توزیع فاصله همینگ ۹۸
۴-۱-۲-۲- روش تصویر انحراف گشتاوری ۹۹
۴-۱-۲-۳- توان دوم اختلاف $\mathcal{L}_2$ مرکزی شده ۹۹
۴-۲- هم‌ارزی هندسی در طرح‌های عاملی با بیش از دو سطح ۱۰۱
۴-۲-۱- شرط‌های لازم و کافی در تشخیص هم‌ارزی هندسی ۱۰۲
۴-۲-۱-۱- روش کلارک و دین ۱۰۲
۴-۲-۱-۲- روش کاتسونیس و دین ۱۰۸
۴-۲-۱-۳- روش تابع نشانگر ۱۱۳
۴-۲-۲- شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی هندسی ۱۲۰
۴-۲-۲-۱- روش قدرمطلق فاصله اقلیدسی ۱۲۱
۴-۲-۲-۲- روش تصویر انحراف گشتاوری ۱۲۱
۴-۳- هم‌ارزی در طرح‌های عاملی نامتعادل ۱۲۲
۴-۳-۱- هم‌ارزی ترکیبیاتی در طرح‌های عاملی نامتعادل ۱۲۳
۴-۳-۲- هم‌ارزی هندسی در طرح‌های عاملی نامتعادل ۱۲۶
۴-۴- هم‌ارزی در طرح‌های عاملی مختلط ۱۲۸

فصل پنجم: هم‌ارزی در طرح‌های منظم و نامنظم

۵-۱- شرط‌های لازم و کافی در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های منظم ۱۳۳
۵-۱-۱- روش چن ۱۳۳

عنوان **صفحه**

۵-۱-۲- روش لین و سیتر ۱۴۰

۵-۱-۳- روش گراف‌ها ۱۴۴

۵-۲- شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های منظم ۱۵۰

۵-۲-۱- معیارهای دسته‌بندی طرح‌های منظم ۱۵۰

۵-۲-۲- بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ۱۵۲

۵-۲-۳- روش بلاک و می ۱۵۵

۵-۲-۴- روش‌های دیگر در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های منظم ۱۵۶

۵-۳- شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های نامنظم ۱۵۸

۵-۳-۱- وضوح تعمیم‌یافته ۱۶۰

۵-۳-۲- کمینه انحراف تعمیم‌یافته ۱۶۲

فصل ششم: رده‌بندی طرح‌های غیر هم‌ارز و کاربرد آن

۶-۱- هم‌ارزی و تهیه لیستی از طرح‌های عاملی کسری منظم ۱۶۵

۶-۱-۱- روش چن و همکاران ۱۶۸

۶-۱-۲- روش لین و سیتر ۱۷۰

۶-۱-۳- روش شریواستاوا و دینگ ۱۷۳

۶-۲- هم‌ارزی در طرح‌های کاوش ۱۷۷

۶-۲-۱- احتمال کاوش وزنی، شرط لازم در تشخیص هم‌ارزی ۱۸۷

پیوست ۱۹۱

منابع و مآخذ ۲۰۳

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲- ۱- اجراهای طرح 2^3 ..... ۱۲
شکل ۵- ۱ گراف دو بخشی برای طرح 2^{7-3} با رابطه معرف مفروض ۱۴۶
شکل ۵- ۲- دو گراف دو بخشی هم‌ارز ۱۴۷
شکل ۶- ۱- دو گراف مربوط به طرح‌های خودهم‌ارز ۱۷۴

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱- اجراهای طرح 2^3 ..... ۱۳

جدول ۲-۲- طرح 2^3 ..... ۱۷

جدول ۲- ۳- طرح PB_{12} ۲۶

جدول ۲- ۴- بردارهای سطری مولد برای طرح‌های PB با N اجرا ۲۶

جدول ۳- ۱- سه طرح با پنج اجرا و سه عامل دو سطحی ۴۰

جدول ۳- ۲- توزیع فراوانی مقادیر CD_2^2 ..... ۶۹

جدول ۳- ۳- مجموعه مقادیر $\{n_E, n_O\}$ برای همه تصاویر دو طرح D_1 و D_2 ..... ۷۵

جدول ۴- ۱- دو طرح با پنج اجرا و دو عامل کیفی سه سطحی و ماتریس‌های فاصله همینگ متناظرشان ۸۵

جدول ۴- ۲- سه طرح با چهار اجرا و دو عامل کمی سه سطحی و ماتریس‌های قدر مطلق فاصله اقلیدسی متناظرشان ۱۰۳

جدول ۴- ۳- دو طرح نامتعادل $2^2 \times 3^2$ با سه اجرا ۱۲۳

جدول ۴- ۴- فاصله قدرمطلق اقلیدسی برای دو طرح نامتعادل $2^2 \times 3^2$ با سه اجرا ۱۲۶

جدول ۴- ۵- دو طرح با یک متغیر کیفی سه سطحی و یک متغیر کمی سه سطحی ۱۳۰

جدول ۵- ۱- تصویر طرح PB_{12} بر روی ستون‌های $\{1, 2, 3, 4, 10\}$ ۱۵۹

جدول ۵- ۲- تصویر طرح PB_{12} بر روی ستون‌های $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۱۵۹

جدول ۵- ۳- وضوح تعمیم‌یافته برای طرح‌های ناهم‌ارز $PB_{20-4.1}$، $PB_{20-4.2}$ و $PB_{20-4.3}$ ۱۶۱

جدول ۶- ۱- جدول جستجو برای طرح‌های 2^{6-2} ۱۷۱

جدول ۶- ۲- ماتریس‌های طرح D_1 و D_2 با ۱۲ اجرا و چهار عامل ۱۸۶

جدول ۶- ۳- مقایسه طرح‌های D_1 و D_2 با معیار احتمال کاوش وزنی ۱۸۶

جدول ۶- ۴- کلاس طرح‌هایی با ۱۲ اجرا و بیشترین مقدار احتمال کاوش وزنی ۱۸۸

جدول ۶- ۵- شماره اجراهای طرح عاملی کامل ۱۸۸

جدول ۶– ۶- پنج کلاس غیرهم‌ارز تولید شده از طرح‌هایی با بیشینه مقدار احتمال کاوش وزنی ۱۸۹

فصل اول

مقدمه، تعاریف و اصطلاحات

۱- ۱. معرفی موضوع و پیشینه تحقیق

در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی معمولاً پژوهشگران برای کشف واقعیت‌هایی از قبیل مشخص کردن عوامل مؤثر بر فرایند، محاسبه اثر عامل‌ها و همچنین برازش یک مدل مناسب بر روی متغیر پاسخ، آزمایش‌هایی انجام می‌دهند. در واقع، آزمایش یکی از ابزارهای اساسی برای به دست آوردن یافته‌های جدید یا درک بهتر وقایع است. در هر آزمایش، نتایجی که می‌توان استخراج کرد در سطح وسیعی وابسته به روشی است که داده‌ها جمع آوری شده‌اند.

طرح آماری آزمایش‌ها، طرح‌ریزی و شبیه‌سازی یک فرایند برای تولید داده‌هایی مناسب است که با استفاده از روش‌های آماری می‌توان آن‌ها را تحلیل کرد. در عمل، طرح آزمایش ابزاری فوق‌العاده مهم برای بسط و اصلاح عملکرد فرایندها است. لذا با توجه به ضرورت اجرای آزمایشی با حداکثر کارایی باید شیوه‌ای علمی در طراحی آزمایش به کار گرفته شود.

در بیشتر آزمایش‌ها لازم است دو یا چند عامل به صورت هم‌زمان مورد بررسی قرار گیرند که در این موارد طرح‌های عاملی[1] کاربرد گسترده‌ای دارند و معمولاً با هدف مطالعه تأثیر تغییر سطوح عوامل مختلف بر روی متغیر پاسخ به کار می‌روند. به عنوان اولین قدم در این‌گونه آزمایش‌ها بر پایه تجربه و دانسته‌های موجود از فرآیند تحت مطالعه، عوامل مختلفی که ممکن است روی متغیر پاسخ تأثیرگذار باشند، مشخص می‌شوند. برخی از این عوامل مانند نوع مواد به کار رفته در یک محصول، کیفی و بعضی نیز مانند درجه حرارت، کمی هستند.

یک آزمایش عاملی کامل، متغیر پاسخ را برای همه ترکیبات سطوح مختلف عوامل دخیل در آزمایش به دست می‌آورد. پس از انجام آزمایش می‌توان از تحلیل آماری برای مطالعه ارتباط بین متغیرهای ورودی و متغیرهای پاسخ استفاده کرد. به این ترتیب می‌توان به درک بهتری در مورد تأثیر متغیرهای ورودی بر متغیر پاسخ دست یافت و بهترین مجموعه ورودی‌ها را انتخاب نمود. برای تحلیل داده‌ها در آزمایش‌های عاملی به اندازه‌گیری تأثیر عوامل یا اثرات متقابل آن‌ها بر روی پراکندگی میانگین مقادیر متغیر پاسخ پرداخته می‌شود.

یکی از کلاس‌های مهم طرح‌های عاملی، طرح‌هایی هستند که برای بررسی k عامل دو سطحی استفاده می‌گردند. این طرح‌ها به عنوان طرح‌های عاملی 2^k شناخته می‌شوند و به دلیل این‌که هر عامل تنها در دو سطح تغییر می‌کند، برای بررسی اثر خطی عوامل بر روی متغیر پاسخ به‌کار می‌روند. هر چند خطی بودن اثر عوامل بر روی متغیر پاسخ ممکن است فرض درست و کاملی نباشد لیکن در مراحل اولیه آزمایش هنگامی‌که از بین تمام عوامل موجود در آزمایش قصد تعیین عوامل مهم و تأثیرگذار را داریم امری معمول و رایج است. به این مرحله از آزمایش، مرحله غربال‌گری[2] گفته می‌شود.

با افزایش تعداد عوامل آزمایش، تعداد اجراهای لازم برای انجام طرح‌های عاملی کامل 2^k به سرعت افزایش می‌یابد. این مسئله استفاده از این طرح‌ها را در بسیاری از مواقع، به‌خصوص در مواردی که اجراها پرهزینه یا زمان‌گیر هستند، غیر ممکن می‌سازد. در چنین مواردی می‌توان با انتخاب زیر مجموعه‌ای از اجراهای طرح عاملی کامل، تعدادی از اثرات مهم را برآورد کرد که این امر به انجام طرح‌های عاملی کسری[3] منتهی می‌شود.

---

[1]- Factorial Designs
[2]- Screening stage
[3]- Fractional factorial designs

یکی از مسائلی که در انجام آزمایش‌های کسری دنبال می‌شود، چگونگی انتخاب زیر مجموعه‌ای مناسب از اجراهای طرح عاملی کامل است که ضمن کاهش هزینه‌های آزمایش، امکان برآورد اثرات مورد نظر آزمایش‌گر را فراهم نماید. روش‌های متعددی برای انتخاب طرح‌هایی که رسیدن به این هدف را میسر می‌سازد، وجود دارد.

طرح‌های کسری منظم متداول‌ترین گزینه برای انتخاب طرح‌های کسری می‌باشند (باکس و هانتر[۱]،۱۹۶۱ ، فرایز[۲] و هانتر، ۱۹۸۰ و وو و هامادا[۳]، ۲۰۰۰). به منظور تشکیل یک طرح کسری منظم با تعداد اجرای 2^{k-p}، برای بررسی k عامل دو سطحی، ابتدا یک طرح عاملی کامل شامل یک زیر مجموعه $k-p$ عضوی از عامل‌ها، در نظر گرفته می‌شود و سپس بعضی از اثرات متقابل این عوامل به p عامل دیگر اختصاص می‌یابد. به این ترتیب در چنین طرح‌هایی اثرات اصلی برخی از عامل‌ها با اثرات متقابل دیگر عوامل مخلوط می‌شوند.

در حقیقت آزمایش‌گر با تعداد محدودی مشاهده و در ازای در نظر گرفتن برخی از عوامل، توانایی برآورد تعدادی از اثرات متقابل مراتب بالاتر را از دست می‌دهد. این خاصیت را هم‌اثری[۴] اثرات گویند. هم‌اثری در این روش کامل است. به این معنا که در این طرح‌ها اثرات عاملی یا کاملاً هم‌اثر هستند و یا می‌توانند به صورت مستقل برآورد شوند.

گروه دیگر از طرح‌های کسری، طرح‌های عاملی کسری نامنظم[۵] هستند. مشخصه‌ی این طرح‌ها مخلوط شدن جزئی اثرات اصلی عوامل با اثرات متقابل دیگر عوامل دخیل در طرح است. متداول‌ترین طرح‌های کسری نامنظم، طرح‌های پلاکت_ برمن[۶] (پلاکت و برمن، ۱۹٤٦) می‌باشند.

در استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش‌ها، تصادفی کردن مسئله‌ای بنیادی است. منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص ابزار آزمایش و ترتیبی که با آن، اجراهای فردی یا امتحان‌های آزمایش انجام می‌شوند به تصادف تعیین شده باشند. بنابراین یک واقعیت مهم در طرح آزمایش‌ها این است که آزمایش‌گر این اختیار را دارد که به صورت کاملاً تصادفی عوامل مختلف در آزمایش را نام‌گذاری و یا واحدهای آزمایش را به ترکیبات تیماری مختلف اختصاص دهد.

---

[1]- Box and Hunter
[2]- Fries
[3]- Wu and Hamada
[4]- Aliase
[5]- Nonregular fractional factorial designs
[6]- Plackett – Burman designs

در روش‌های آماری لازم است که مشاهدات (خطاها) متغیرهای تصادفی باشند که به صورت مستقل توزیع شده‌اند. تصادفی کردن معمولاً به این پذیره اعتبار می‌بخشد. با درست تصادفی کردن آزمایش، به خارج نمودن متوسط اثرهای عوامل خارجی دخیل در آزمایش کمک می‌شود. به عبارت دیگر، اجرای تصادفی ترکیبات تیماری و یا تعیین تصادفی موقعیت عوامل برای جلوگیری از تأثیر متغیرهای اغتشاش[۱] نامعلومی است که شاید در طی آزمایش تغییر کرده‌اند. تغییر متغیرهای اغتشاش خارج از کنترل بوده و این امر ممکن است منجر به مخدوش شدن نتایج آزمایش شود. در این حالت، جایگشت در اجراهای یک طرح و طریقه‌ی نام‌گذاری عوامل، تغییری در ساختار و ویژگی‌های طرح ایجاد نمی‌کند.

بنابراین دو طرح با تعداد اجراها، عامل‌ها و سطوح یکسان، طرح‌های هم‌ارز[۲] یا معادل[۳] هستند اگر یک طرح با نام‌گذاری مجدد عامل‌ها، جایگشت در مرتبه‌ی اجرای ترکیبات تیماری و یا برچسب‌گذاری مجدد سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به دست آید.

در طرح‌های عاملی متعادل[٤]، طرح‌هایی که عوامل موجود در طرح همگی در $s(\geq 3)$ سطح تغییر می‌کنند، با توجه به این‌که عامل‌ها کمی یا کیفی هستند، دو نوع هم‌ارزی، به ترتیب هم‌ارزی هندسی[٥] و هم‌ارزی ترکیبیاتی[٦] ترکیبیاتی[٦] خواهیم داشت. اگر سطوح یک عامل اسمی باشد و سطح‌ها تنها به منظور متمایز نمودن گروه‌ها به‌کار روند، عامل را کیفی و در غیر این صورت عامل مورد نظر را کمی می‌نامیم.

علت این جداسازی این است که بین سطوح عوامل کیفی رابطه‌ای برقرار نیست و مرتبه‌ی سطوح اهمیتی ندارند بنابراین همه‌ی جایگشت‌های ممکن بین سطوح مجاز است. اما برای عوامل کمی مرتبه‌ی سطوح و رابطه‌ی میان فواصل سطح‌ها حائز اهمیت هستند و جایگشت‌هایی از سطوح مجاز می‌باشند که مرتبه و فاصله‌ی میان سطح‌ها را حفظ کنند. در صورتی که تمام عوامل موجود در طرح دارای دو سطح باشند، هم‌ارزی هندسی و هم‌ارزی ترکیبیاتی بر هم منطبق خواهند شد.

---

[1]- Noise variables
[2]- Isomorphic designs
[3]- Equivalent designs
[4]- Symmetric factorial design
[5]- Geometric isomorph
[6]- Combinatorial isomorph

تعاریف هم‌ارزی هندسی و هم‌ارزی ترکیبیاتی برای طرح‌های عاملی نامتعادل[1]، طرح‌هایی که عوامل موجود در طرح دارای سطح‌های یکسانی نیستند، مشابه قبل است با این تفاوت که در طرح‌های نامتعادل تنها مجاز به جایگشت در عواملی هستیم که تعداد سطح‌های یکسانی را شامل می‌شوند. همچنین برای طرح‌های مختلط[2]، طرح‌هایی که شامل هر دو عامل کمی و کیفی هستند، هم‌ارزی هندسی و ترکیبیاتی به‌نحوی مناسب با یکدیگر مخلوط شده و هم‌ارزی در این‌گونه طرح‌ها مورد بررسی قرار گرفته می‌شود.

مسئله هم‌ارزی طرح‌های عاملی از پنجاه سال پیش تا به حال مورد توجه بسیاری از محققان آمار بوده است. اولین بار دراپر و میچل[3] (۱۹۶۷، ۱۹۶۸ و ۱۹۷۰) برای تهیه‌ی لیستی از طرح‌های عاملی کسری منظم، با مسئله تعیین هم‌ارزی در طرح‌ها مواجه شدند. آن‌ها معیارهایی را معرفی کردند که چن و لین[4] (۱۹۹۱) با ارائه مثال‌های نقضی نشان دادند که این معیارها، تنها شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی هستند. چن(۱۹۹۲) و چن و همکاران (۱۹۹۳) با جایگشت در روابط معرف طرح‌های منظم، شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی در این گونه طرح‌ها را ارائه دادند.

اما بسیاری از طرح‌ها از جمله طرح‌های کسری نامنظم، رابطه‌ی معرف ندارند. از این رو کلارک و دین[5] (۲۰۰۱) با معرفی معیارهای فاصله همینگ[6] و قدرمطلق فاصله اقلیدسی[7] به ترتیب شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی ترکیبیاتی و هم‌ارزی هندسی ارائه دادند. از دیگر شرط‌های لازم و کافی جهت تشخیص هم‌ارزی هندسی، می‌توان روش تابع نشانگر[8] چنگ و یه[9] (۲۰۰۴) را نام برد.

با توجه به معیار فاصله همینگ، روش‌های سریعی برای تشخیص عدم هم‌ارزی ترکیبیاتی مطرح گردید. به عنوان نمونه می‌توان به روش تصویر انحراف گشتاوری[10] (زو و دنگ[11]، ۲۰۰۴) و توان دوم اختلاف $\mathcal{L}_2$ مرکزی شده[12] (ما[13] و همکاران، ۲۰۰۱) اشاره داشت. همچنین با جایگذاری معیار قدرمطلق فاصله اقلیدسی به جای فاصله

1- Asymmetric factorial design
2- Mixed designs
3- Draper and Mitchell
4- Chen and Lin
5- Clark and Dean
6- Hamming distance
7- Euclidean distance
8- Indicator function method
9- Cheng and Ye
10- Moment aberration projection method
11- Xu and Deng
12- Squared centered $\mathcal{L}_2$ discrepancy
13- Ma

همینگ می‌توان این روش‌ها را برای تشخیص عدم هم‌ارزی هندسی نیز استفاده کرد. بلاک و می[1] (۲۰۰۵) با اشاره به روش چن و همکاران (۱۹۹۳)، حدس زدند که دو طرح عاملی کسری منظم دو سطحی هم‌ارز هستند اگر مجموعه طرح‌های به‌دست آمده از حذف یک عامل در دو طرح با یکدیگر برابر باشند. اما نتوانستند اثبات کنند که این شرط یک شرط کافی برای تشخیص هم‌ارزی در طرح‌های منظم دو سطحی است. در ادامه کاتسونیس[2] و و دین (۲۰۰۸) از ایده بلاک و می (۲۰۰۵) استفاده کردند و با استفاده از معیارهای کلارک و دین (۲۰۰۱) توانستند شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی یا عدم هم‌ارزی هندسی و ترکیبیاتی ارائه دهند.

از دیگر روش‌های تشخیص هم‌ارزی برای طرح‌های عاملی کسری منظم دو سطحی می‌توان به روش لین و سیتر[3] (۲۰۰۸) اشاره داشت. لین و سیتر با توجه به تعریف و ویژگی‌های مقادیر ویژه[4] و بردارهای ویژه[5] یک شرط لازم لازم برای تعیین هم‌ارزی طرح‌های 2^{k-p} ارائه دادند. به نظر می‌رسد که این روش یک شرط لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی باشد اما تاکنون شرط کافی آن اثبات نشده و مثال نقضی نیز برای برقرار نبودن این شرط مطرح نگردیده است. شریواستاوا و دینگ[6] (۲۰۱۰) براساس گراف‌های دو بخشی[7]، شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی طرح‌های عاملی کسری منظم دو سطحی ارائه دادند.

شرط‌های لازم و کافی همیشه بین دو طرح غیر هم‌ارز تفاوت قائل می‌شوند. اما این شرط‌ها در تعیین هم‌ارزی دو طرح بسیار کُند عمل می‌کنند. از این رو نیاز به شرط‌های لازمی که سریع‌تر از شرط‌های لازم و کافی هم‌ارزی را تشخیص دهند، احساس می‌شود. شرط‌های لازم تنها قادر به تشخیص عدم هم‌ارزی بین طرح‌ها هستند و هیچ‌گاه نمی‌توان براساس این شرط‌ها تصمیم قطعی در مورد هم‌ارزی دو طرح اتخاذ کرد.

از دیگر شرط‌های لازم برای بررسی عدم هم‌ارزی در طرح‌های منظم و نامنظم می‌توان به معیارهای گوناگون برای انتخاب این‌گونه طرح‌ها اشاره داشت. از جمله معیارهای انتخاب طرح‌های کسری منظم، معیارهای وضوح[8] (باکس و هانتر، ۱۹۶۱)، کمینه انحراف[9] (فرایز و هانتر، ۱۹۸۰) و تعداد اثرات واضح (چن و همکاران، ۱۹۹۳) می‌باشد که برای تشخیص عدم هم‌ارزی در طرح‌های عاملی کسری منظم می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

1- Block and Mee
2- Katsaounis
3- Lin and Sitter
4- Eigenvalues
5- Eigenvectors
6- Shrivastava and Ding
7- Bipartite graphs
8- Resolution
9- Minimum aberration

برای طرح‌های نامنظم نیز معیارهای متعددی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به معیار وضوح تعمیم یافته[1] و کمینه انحراف تعمیم یافته[2] (دنگ و تانگ[3]، ۱۹۹۹) اشاره کرد.

۱- ۲. اهداف تحقیق

نخستین هدف انجام این تحقیق، معرفی هم‌ارزی هندسی و ترکیبیاتی و ارائه جدیدترین نتایج حاصل از مطالعه بر روی هم‌ارزی طرح‌های عاملی است. برای این منظور، در حالت کلی برای طرح‌های عاملی کسری متعادل، نامتعادل و مختلط روش‌های لازم و کافی و نیز روش‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی هندسی و ترکیبیاتی مطرح می‌گردد. هدف دوم از انجام تحقیق، استفاده از روش‌های بررسی هم‌ارزی برای تهیه فهرست کاملی از طرح‌های منظم و نامنظم می‌باشد.

۱- ۳. کاربرد نتایج تحقیق

همان‌گونه که از تعریف هم‌ارزی مشخص است، طرح‌های هم‌ارز دارای برخی ویژگی‌های آماری یکسانی هستند. بنابراین اگر هدف از انجام آزمایش برآورد اثرات خاص یا در نظر گرفتن طرحی با بیشینه وضوح و کمینه انحراف و یا دیگر معیارهای انتخاب طرح باشد، تفاوتی نمی‌کند که کدامیک از طرح‌های هم‌ارز را برای انجام چنین آزمایشی برگزینیم. اما در برخی موارد برای اجرای یک طرح در صنعت یا آزمایشگاه با محدودیت‌هایی مواجه هستیم.

به‌عنوان مثال ممکن است در یک ترکیب تیماری از طرح پیشنهادی، نتوانیم دو عامل را در سطح‌های معین شده قرار داده و ترکیب تیماری مورد نظر را اجرا کنیم یا این‌که در حالت کلی برخی از ترکیبات تیماری در طرح پیشنهادی قابل اجرا نباشند. بنابراین باید به دنبال طرح‌های هم‌ارز با طرح پیشنهادی باشیم که علاوه بر ویژگی‌های مورد نظر آزمایش‌گر، تمام ترکیبات طرح نیز قابل اجرا باشند.

از دیگر معیارهایی که باید در انتخاب طرح هم‌ارز با طرح پیشنهادی در نظر بگیریم، مقرون به صرفه بودن طرح است. در طرح آزمایش‌ها کاهش هزینه‌های اجرایی طرح نقش مهمی را ایفا می‌کند. در این حالت ممکن است طرحی هم‌ارز با طرح پیشنهادی یافت شود که علاوه بر قابل اجرا بودن تمام ترکیبات تیماری، منجر به کاهش

---

[1]- Generalized resolution
[2]- Generalized minimum aberration
[3]- Deng and Tang