بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

بررسی اتحادهای هموردای نودر و مولدهای لاگرانژی تبدیل پیمانه‌ای در چند نظریه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

جواد حیدری

استاد راهنما

دکتر احمد شیرزاد

۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای جواد حیدری

تحت عنوان

بررسی اتحادهای هموردای نودر و مولدهای لاگرانژی تبدیل پیمانه‌ای در چند نظریه

در تاریخ ۱۳۹۲/۱۰/۲۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر احمد شیرزاد
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر منصور حقیقت
۳- استاد مدعو	دکتر بهروز میرزا
۴- استاد ممتحن داخلی	دکتر غلامرضا خسروی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر مجتبی اعلائی

قدردانی:

از خدا جوییم توفیق ادب
بی ادب محروم ماند از لطف رب
بی ادب تنها نه خود را داشت بد
بلکه آتش در همه آفاق زد

(مثنوی معنوی، دفتر اول)

برای تشکر از پدر و مادر و استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر شیرزاد، زبانم قاصر و واژگانم فقیراند. چراکه بسیار مرا آموختند و به فرمایش امام پارسایان به من نعمتی عطا فرموده اند که از سپاس آن درمانده ام. اما به رسم ادب و با افتخار دست ایشان را می بوسم. همسر عزیزم را به خاطر صبر و پایداری شان قدردانم. از استاد عزیزم جناب آقای دکتر حقیقت، مشاور این پایان نامه که همواره خوشه چین خرمن دانش ایشان بوده ام سپاس فراوان دارم. همچنین از اساتید فاضل آقایان پروفسور میرزا و دکتر خسروی که این پایان نامه را به کرسی داوری نشستند بی نهایت متشکرم. در نهایت ممنون از یاری دوستانی که در کنار ایشان بودن مایه ی مسرت بود و هم صحبتی با ایشان غنیمت، پس کامرانی همه را از الله سبحان خواهانم.

و آخر دعوانا ان الحمدلله رب العالمین.

تقدیم به

همسر عزیز

و

پدر و مادر فداکارم

فهرست مطالب

چکیده

از جمله مفاهیمی که می‌توان در مورد سامانه‌های قیدی مورد بررسی قرار داد، تقارن پیمانه‌ای است. برای بررسی این تقارن می‌توان از دو رهیافت هامیلتونی و لاگرانژی استفاده نمود. در این تحقیق رهیافت لاگرانژی مورد بررسی قرار گرفته است. در رهیافت لاگرانژی با استفاده از معادلات حرکت می‌توان به اتحادهایی دست یافت که اتحادهای نودر نامیده می‌شوند. این اتحادها علاوه بر معادلات حرکت، مولدهای تبدیلات پیمانه‌ای را نیز در برمی‌گیرند. با استفاده از این مولدها می‌توان تبدیلات پیمانه‌ای میدان‌های دینامیکی را به دست آورد.

در ادامه با معرفی روش غیرهموردای سیستماتیک و مولدهای تبدیلات پیمانه‌ای، تقارن‌های مدل بوزونی شده شوینگر تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. سپس با استفاده از روش فوق، روش غیرهموردای دیگری مورد مطالعه قرار داده شده که به آن روش آزمونی گفته می‌شود. با این روش تقارن‌های نظریه‌های یانگ–میلز، الکترومغناطیس، نسبیت عام و گرانشی جرم‌دار توپولوژیک مورد بررسی قرار گرفته شده است. در نهایت نیز روش مذکور به صورت هموردا ارائه می‌شود و با بررسی تقارن‌های نظریه‌های یاد شده به صورت هموردا، مزیت‌های استفاده از این روش نسبت به روش‌های غیرهموردا به خوبی نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی:
تقارن، اتحاد نودر، مدل شوینگر، نظریه یانگ–میلز، نظریه الکترومغناطیس، بازپرمایه بندی، نسبیت عام، نظریه گرانشی جرم‌دار توپولوژیک، متریک، هموستار، هموردا

فصل ۱

مقدمه

با مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی مشخص می‌گردد که این سیستم‌ها به دو نوع مقید و غیرمقید تفکیک‌پذیرند. دلیل تفاوت آنها این است که لاگرانژی سیستم‌های مقید بر خلاف سیستم‌های غیر مقید، تکین است. برای سیستم‌های با لاگرانژی غیر تکین تمامی جواب‌های معادلات حرکت باشرایط اولیه معین یکتا خواهند بود. یعنی با داشتن شرایط اولیه معین، یک مسیر یکتا برای چنین سیستم‌هایی وجود دارد. در مقابل اما یکی از پی‌آمدهای لاگرانژی تکین آن است که نمی‌توانیم یک جواب یکتا برای معادلات حرکت بیابیم. در واقع با یک شرایط یکسان اولیه برای سیستم‌های مقید تنها یک جواب برای معادلات حرکت وجود ندارد و ممکن است بی‌نهایت جواب متفاوت برای معادلات حرکت داشته باشیم.

اگر فرض کنیم حالت اولیه یک دستگاه مقید در فضای فاز در لحظه‌ی $t_{\circ}$ با شرایط اولیه $(p_{\circ}, q_{\circ})$ به صورت $\phi_{\circ}$ مشخص گردد، در زمان t دستگاه می‌تواند وضعیت‌های مختلفی داشته باشد. زیرا برای سیستم‌های مقید که تکینگی لاگرانژی خاصیت ذاتی این سیستم‌هاست، قیود ذاتی داریم که وجود این قیود ذاتی باعث ظاهر شدن توابع دلخواه زمانی در معادلات حرکت می‌گردد. وجود این توابع دلخواه زمانی در معادلات حرکت خود موجب وضعیت‌های متفاوت سیستم در لحظه‌ی t می‌شود. نتیجه آن که تمامی مسیرهای به‌دست آمده که نقطه‌ی شروع آنها حالت اولیه $\phi_{\circ}$ است، می‌توانند مسیر دستگاه در زمان‌های مختلف باشند. پس هر نقطه‌ی $(p_{\circ}, q_{\circ})$ در فضای فاز تعیین کننده‌ی یک حالت فیزیکی مشخص در فضای فاز است، ولی یک حالت فیزیکی دستگاه با مجموعه‌ای از نقاط فضای فاز

مرتبط است. حال سوالی که مطرح می‌شود آن است که آیا می‌توان این مجموعه نقاط روی فضای فاز را به هم مربوط کرد؟ به بیان دیگر این مجموعه نقاط فضای فاز مربوط به یک حالت فیزیکی یکسان، آیا ارتباطی با یکدیگر دارند؟ جواب این سوال مثبت است. با استفاده از تبدیلی که آن را تبدیل پیمانه‌ای[۱] می نامیم، می‌توانیم این مجموعه نقاط روی فضای فاز را به یکدیگر مرتبط سازیم. تبدیل پیمانه‌ای این امکان را به ما می‌دهد که از یک نقطه در فضای فاز با یک حالت فیزیکی معین به‌گونه‌ای جابجا شویم تا به نقطه‌ی دیگر در فضای فاز که دارای همان حالت فیزیکی است، برسیم. پس تبدیلات پیمانه‌ای میدان‌ها آن دسته از تبدیلاتی است که شامل توابع دلخواه زمانی و مشتقات آن‌ها باشد و تحت این تبدیلات کنش سیستم ناوردا باقی می‌ماند[۱، ۲، ۳]. به عبارت دیگر تبدیلات پیمانه‌ای بدون این‌که حالت‌های فیزیکی سیستم را تغییر دهند، تمامی نقاط مختلف فضای فاز که بر اثر انتخاب متفاوت توابع دلخواه زمانی از یک حالت اولیه سرچشمه گرفته‌اند را به یکدیگر تبدیل خواهند کرد. با توجه به آن چه بیان شد اگر یک تغییر δq_i برای متغیرهای دینامیکی در نظر بگیریم آنگاه:

$$S\left[q\left(t\right)\right]=S\left[q\left(t\right)+\delta q\left(t\right)\right]. \tag{۱.۱}$$

برای یک مدل معین می‌توان سوال‌های زیر را طرح کرد:

۱. چه نوع تبدیل پیمانه‌ای برای این مدل وجود دارد؟

۲. شکل‌های دقیق تبدیلات پیمانه‌ای چه هستند؟

۳. کدام مختصه‌ها دارای دینامیک بوده و سیستم چند درجه آزادی دارد؟

اگر با اعمال این تبدیلات کنش سیستم ناوردا بماند، یعنی از نقطه‌ای به نقطه دیگر برویم و تحت این تغییر لاگرانژی و به تبع آن کنش سیستم بدون تغییر باشد، این خود نشان دهنده‌ی تقارنی در سیستم است که ما آن را تقارن پیمانه‌ای و یا تقارن نودر[۲] می‌نامیم. پس تقارن نودر آن دسته از تبدیلاتی است که تحت آن لاگرانژی ناوردا باشد. چنین تقارنی‌هایی را تحت مسئله ناوردایی تقارن پیمانه‌ای مورد بررسی قرار می‌دهند. یکی از روش‌هایی که می‌توان به مطالعه‌ی این تقارن‌ها پرداخت روش مرتبط با هامیلتونی سیستم است[۴]. با یک ترکیب خطی از قیود نوع اول می‌توان مولد تبدیل پیمانه‌ای را به دست آورد. ارتباط این روش با هامیلتونی در آن است که برای به دست آوردن قیود ثانویه باید کروشه پواسون قیود اولیه و هامیلتونی کل را حساب کرد. سپس با محاسبه کروشه پواسون قیود اولیه و ثانویه، قیود نوع اول را به دست آورد. در نتیجه برطبق فرض دیراک قیود نوع اول مولد تبدیلات پیمانه‌ای هستند[۶]. ولی با استفاده از رهیافت لاگرانژی نیز می‌توان به بررسی این تقارن‌ها پرداخت. در این رهیافت با استفاده از اتحادهای نودر می‌توان تقارن‌های پیمانه‌ای لاگرانژی را به دست آورد[۷، ۸]. این اتحادهای پیمانه‌ای

[۱] Gauge transformation

[۲] Noether symmetries

شامل مشتقات اویلری و مولدهای تبدیل پیمانه‌ای هستند و به آن‌ها اتحادهای نودر [۱] گفته می‌شود. در مرجع [۸] روش به دست آوردن این اتحادها با استفاده از ماتریس هسیان و قیود لاگرانژی توضیح داده شده است.

و اما در این پایان‌نامه با استفاده از رهیافت لاگرانژی به مطالعه‌ی تبدیل پیمانه‌ای در چند نظریه می‌پردازیم. مطالعه‌ی این روش بدین صورت که در فصل دوم مطمئن‌ترین و علمی‌ترین روش به دست آوردن اتحادهای نودر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه‌ی این فصل برای درک بهتر شیوه‌ی کار و روشن‌تر شدن روش رهیافت مورد مطالعه، تقارن‌های پیمانه‌ای یک مثال ساده و همچنین تقارن‌های پیمانه‌ای مدل شوینگر [۲] را بررسی خواهیم کرد. اما در فصل سوم به مطالعه‌ی روشی می‌پردازیم که در آن با الهام گرفتن از روش فصل دوم می‌توانیم، برای بسیاری از نظریات اتحادهای نودر را به صورت آزمونی به دست آوریم. این روش همراه با سعی و خطا بوده و شاید بتوان آن را یک روش میانبر دانست. اما این روش برای هر لاگرانژی تکینی به سادگی قابل استفاده نیست. در ادامه‌ی فصل سوم با استفاده از این روش آزمونی به بررسی تقارن پیمانه‌ای در نظریه‌ی غیرآبلی یانگ–میلز و نظریه‌ی الکترومغناطیس می‌پردازیم. همچنین در فصل‌های چهارم و پنجم تقارن پیمانه‌ای را در نظریه‌ی نسبیت‌عام، با استفاده از روش آزمونی بررسی می‌کنیم. تفاوت این دو فصل در آن است که در فصل چهارم تنها میدان دینامیکی ما متریک است ولی در فصل پنچم میدان‌های دینامیکی ما علاوه بر متریک، هموستار را نیز شامل می‌شود. فصل ششم نیز اختصاص به بررسی تقارن پیمانه‌ای در نظریه‌ی گرانشی جرم‌دار توپولوژیک[۳] دارد. در این فصل ابتدا مقدمه‌ای در مورد اهمیت این نظریه‌ها بیان داشته و سپس به بررسی تقارن پیمانه‌ای این نظریه پرداخته‌ایم. روش مورد استفاده در این فصل نیز روش آزمونی است. تا فصل ششم همه‌ی محاسبات را به صورت غیر هموردا انجام داده‌ایم. در منابع موجود نیز همواردایی شکسته شده و محاسبات برای زمان و فضا به صورت جداگانه صورت پذیرفته است. یعنی مطالعه‌ی تقارن پیمانه‌ای و به دست آوردن اتحاد نودر به صورت هموردا انجام نشده است. در فصل هفتم ما رهیافت غیر هموردای آزمونی فصل سوم را به صورت هموردا نوشته‌ایم. در ادامه فصل هفتم با استفاده از روش هموردای آزمونی، تقارن پیمانه‌ای نظریه‌های یانگ–میلز، الکترومغناطیس و نسبیت عام را مورد بررسی قرار گرفته است.

---

[۱] Noether identity

[۲] Schwinger models

[۳] Topologically Massive Gravity

فصل ۲

تقارن پیمانه‌ای در فرمول‌بندی لاگرانژی و بررسی تقارن پیمانه‌ای در مدل‌های بوزونی شده‌ی شوینگر تعمیم یافته

همان طور که در مقدمه وعده نمودیم، در این فصل کلی‌ترین روش برای بررسی تقارن پیمانه‌ای در فرمول‌بندی لاگرانژی را بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا شیوه‌ی به دست آوردن اتحادهای نودر یا همان اتحاد پیمانه‌ای را مورد مطالعه قرار داده و در ادامه با استفاده از آن تقارن پیمانه‌ای در مدل‌های بوزونی شده‌ی شوینگر را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ به دست آوردن اتحاد نودر برای لاگرانژی تکین

اگر یک سیستم دینامیکی با k درجه آزادی فرض کنیم که به صورت کلی دارای لاگرانژی $L\left(q,\dot{q}\right)$ باشد، آنگاه مشتقات اویلری این سیستم به صورت زیر است:

$$L_i \equiv \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv W_{ij}\,\ddot{q}_j + \alpha_i, \qquad\qquad i = ۱, ..., k \tag{۱.۲}$$

که در آن W_{ij} ماتریس هسیان[۱] و α_i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$W_{ij} = \frac{\partial^{۲} L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \tag{۲.۲}$$

[۱] Hessian matrix

$$\alpha_i = \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (۳.۲)$$

برای به دست آوردن معادلات حرکت نیز باید مشتقات اویلری را متحد با صفر قرار دهیم:

$$L_i = 0. \qquad (۴.۲)$$

برای یک لاگرانژی تکین دترمینان ماتریس هسیان برابر صفر است و این ماتریس وارون‌پذیر نیست. در نتیجه شتاب‌ها را نمی‌توان بر اساس توابعی از مختصات و سرعت‌ها به دست آورد. اگر فرض کنیم رتبه ماتریس هسیان $(k - A_1)$ باشد، تعداد A_1 ویژه بردار پوچ[1] $\lambda_i^{a_1}$ برای ماتریس هسیان W خواهیم داشت، به طوری که:

$$\lambda_i^{a_1} W_{ij} = 0, \qquad a_1 = 1, ..., A_1 \qquad (۵.۲)$$

با ضرب از هر دو طرف این بردار پوچ بر روی رابطه‌ی (۱.۲)، خواهیم داشت:

$$\gamma^{a_1}(q, \dot{q}) = \lambda_i^{a_1} L_i = \lambda_i^{a_1} \alpha_i = 0, \qquad a_1 = 1, ..., A_1 \qquad (۶.۲)$$

توابع γ^{a_1} قیودی‌اند به تعداد A_1 ، که شامل مختصات و سرعت‌ها هستند. اما این قیود الزاما مستقل از هم نیستند. فرض می‌کنیم رتبه‌ی معادلات (۶.۲) برابر $\bar{A_1}$ است. می‌توان به تعداد $\bar{A_1}$ ، تابع مستقل $\gamma^{\bar{a_1}}$ در نظر گرفت که صفر شدن آنها شرط لازم و کافی برای صفر شدن γ^{a_1} است. به عبارت دیگر در جایی که $\gamma^{\bar{a_1}}$ صفر باشد، توابع γ^{a_1} نیز برابر صفر است.

پس توابع $\gamma^{\bar{a_1}}$ ترکیبات مستقل خطی از توابع γ^{a_1} هستند، ولی با ضرایبی که ممکن است وابسته به q و $\dot{q}$ باشد:

$$\gamma^{\bar{a_1}}(q, \dot{q}) = \sum_{a_1}^{A_1} C_{a_1}^{\bar{a_1}}(q, \dot{q})\, \gamma^{a_1}(q, \dot{q}), \qquad \bar{a_1} = 1, ..., \bar{A_1} \qquad (۷.۲)$$

از طرفی تعداد $\tilde{A_1} = A_1 - \bar{A_1}$ ترکیب خطی از γ^{a_1} وجود دارد، که به صورت اتحادی برابر صفر است:

$$\sum_{a_1}^{A_1} C_{a_1}^{\tilde{a_1}}\Big(q, \dot{q}\Big)\, \gamma^{a_1}\Big(q, \dot{q}\Big) = 0, \qquad \tilde{a_1} = 1, ..., \tilde{A_1} \qquad (۸.۲)$$

[1] Null eigenvector

با مقایسه روابط (۶.۲) و (۷.۲) داریم:

$$\lambda^{\bar{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)=\sum_{a_1}^{A_1}C_{a_1}^{\bar{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)\lambda^{a_1}\left(q,\dot{q}\right),\qquad \bar{a}_1=1,\dots,\bar{A}_1 \tag{9.2}$$

در نتیجه قیود اولیه لاگرانژی [1] به صورت زیر است:

$$\gamma^{\bar{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)=\lambda_i^{\bar{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)L_i,\qquad \bar{a}_1=1,\dots,\bar{A}_1 \tag{10.2}$$

به طرز مشابه‌ای با مقایسه روابط (۶.۲) و (۸.۲) مشاهده می‌شود که برای ویژه بردارهای پوچ نیز داریم:

$$\lambda^{\tilde{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)=\sum_{a_1}^{A_1}C_{a_1}^{\tilde{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)\lambda^{a_1}\left(q,\dot{q}\right),\qquad \tilde{a}_1=1,\dots,\tilde{A}_1 \tag{11.2}$$

و در نهایت اتحاد زیر را می‌توان برای مشتقات اویلری بیان نمود:

$$\lambda^{\tilde{a}_1}\left(q,\dot{q}\right)L_i=0.\qquad \tilde{a}_1=1,\dots,\tilde{A}_1 \tag{12.2}$$

در مرحله‌ی بعدی باید شرط سازگاری قیود با زمان را محاسبه‌کرده و مشتقات زمانی قیود (۱۰.۲) را به معادلات حرکت (۴.۲) اضافه می‌کنیم. بنابراین تعداد معادلاتی که شامل شتاب‌ها می‌شود برابر $k+\bar{A}_1$ خواهد بود:

$$\begin{cases} W_{ij}\,\ddot{q}_j+\alpha_i=0, & i=1,\dots,k \\ \frac{d\gamma^{\bar{a}_1}}{dt}=\frac{\partial\gamma^{\bar{a}_1}}{\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j+\frac{\partial\gamma^{\bar{a}_1}}{\partial q_j}\dot{q}_j=0, & \bar{a}_1=1,\dots,\bar{A}_1 \end{cases} \tag{13.2}$$

برای حفظ الگویی شبیه به رابطه(۱.۲)، معادلات حرکت رابطه (۱۳.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$L^1_{i_1}\equiv W^1_{i_1 j}\,\ddot{q}_j+\alpha^1_{i_1}=0,\qquad i_1=1,\dots,k+\bar{A}_1 \tag{14.2}$$

که در آن به تعداد k اول از معادلات حرکت جدید ($L^1_{i_1}$)، شبیه L_i در معادله (۱.۲) و تعداد $\bar{A}_1$ نیز از $\frac{d\gamma^{\bar{a}_1}}{dt}$ است.

حال باید ویژه بردارهای پوچ از چپ ماتریس مستطیلی شکل W^1 را به دست آورد. می‌دانیم حداکثر رتبه‌ی ماتریس $\frac{\partial\gamma^{\bar{a}_1}}{\partial\dot{q}_j}$ برابر $\bar{A}_1$ است و هیچ ویژه بردار پوچی که k جزء اولیه آن صفر باشد، وجود ندارد. از طرفی اگر

[1] Primary Lagrangian constraints

$\bar{A}_{۱}$ صفر به انتهای ویژه بردار پوچ $\lambda^{\bar{a}_{۱}}$ اضافه نماییم، این ویژه بردارها هنوز ویژه بردارهای پوچ $W^{۱}_{i_{۱}j}$ هستند. اما احتمال دارد برای ماتریس مستطیلی $W^{۱}_{i_{۱}j}$ ویژه بردارهای پوچی پیدا کنیم که $\bar{A}_{۱}$ آرایه‌ی انتهایی و k آرایه ابتدایی آنها غیر صفر باشد. این ویژه بردارهای پوچ را ویژه بردارهای پوچ جدید می‌نامیم و آنها را با $\lambda^{a_{۲}}$ نشان می‌دهیم.

حال فرض می‌کنیم تعداد $A_{۲}(A_{۲} \leq \bar{A}_{۱})$ ویژه بردار پوچ $\lambda^{a_{۲}}$ وجود دارد، به صورتی‌که:

$$\lambda^{a_{۲}}_{i_{۱}} W^{۱}_{i_{۱}j} = ۰ \qquad\qquad a_{۲} = ۱, ..., A_{۲}, \tag{۱۵.۲}$$

پس رتبه‌ی معادلات (۱۴.۲) چنین است:

$$(k - A_{۱}) + \bar{A}_{۱} - A_{۲},$$

همچنین قیود جدید به صورت زیر می‌باشند:

$$\gamma^{a_{۲}}\left(q, \dot{q}\right) = \lambda^{a_{۲}}_{i_{۱}} L^{۱}_{i_{۱}} = \lambda^{a_{۲}}_{i_{۱}} \alpha_{i_{۱}} = ۰ \qquad\qquad a_{۲} = ۱, ..., A_{۲}, \tag{۱۶.۲}$$

قیود جدید $\gamma^{a_{۲}}\left(q, \dot{q}\right)$ ، از قیود اولیه $\gamma^{a_{۱}}\left(q, \dot{q}\right)$ مستقل هستند. ذکر این نکته الزامی است که اگر در یک مرحله ما ویژه بردارهای $\lambda^{a_{۲}}$ و $\lambda^{a_{۱}}$ را داشته باشیم، تنها زمانی هر دو ویژه بردار را در نظر می‌گیریم که تفاوت آنها برابر ویژه بردار قبلی نباشد. اگر این تفاوت برابر ویژه بردار قبلی شد تنها باید یکی از این ویژه بردارها را در نظر گرفت. زیرا باید قیودی که به دست می‌آوریم مستقل از قیود قبلی باشند. اگر قیود جدید نیز توابع مستقل از هم نباشند، دوباره می‌توانیم تعداد $\bar{A}_{۲}$ تابع مستقل $\gamma^{\bar{a}_{۲}}\left(q, \dot{q}\right)$ را با استفاده از $\gamma^{a_{۲}}$ در نظر بگیریم، مشابه رابطه‌ی (۷.۲). این توابع را قیود ثانویه لاگرانژی [۱] می‌نامیم. در نهایت نیز همانند مرحله قبل تعداد $\tilde{A}_{۲} = A_{۲} - \bar{A}_{۲}$ اتحاد بین $L^{۱}_{i_{۱}}$ به دست می‌آوریم.

فرض می‌کنیم ویژه بردارهای پوچ $\lambda^{\tilde{a}_{۲}}\left(q, \dot{q}\right)$ را از روشی شبیه آن چه برای رابطه‌ی (۱۱.۲) داشتیم بتوان محاسبه کرد. پس اتحادهای بین $L^{۱}_{i_{۱}}$ چنین است:

$$\lambda^{\tilde{a}_{۲}}_{i_{۱}} L^{۱}_{i_{۱}} = ۰ \qquad\qquad \tilde{a}_{۲} = ۱, ..., \tilde{A}_{۲}, \tag{۱۷.۲}$$

اما شکل دیگری از رابطه‌ی (۱۷.۲) را نیز می‌توان به دست آورد. با استفاده از رابطه‌های (۱۱.۲) و (۱۳.۲) خواهیم

[1] Secondary Lagrangian constraints

داشت:

$$\lambda_i^{\tilde{a}_2} L_i + \lambda_{\bar{a}_1}^{\tilde{a}_2} \frac{d}{dt}\left(\lambda_i^{\bar{a}_1} L_i\right) = 0 \qquad \tilde{a}_2 = 1, ..., \tilde{A}_2, \tag{۱۸.۲}$$

این نتیجه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\left(\lambda_i^{\tilde{a}_2} - \dot{\lambda}_{\bar{a}_1}^{\tilde{a}_2} \lambda_i^{\bar{a}_1}\right) L_i + \frac{d}{dt}\left[\left(\lambda_{\bar{a}_1}^{\tilde{a}_2} \lambda_i^{\bar{a}_1}\right) L_i\right] = 0 \qquad \tilde{a}_2 = 1, ..., \tilde{A}_2, \tag{۱۹.۲}$$

به طرز مشابه‌ای با استفاده از رابطه‌ی (۱۰.۲) می‌توان قیود ثانویه لاگرانژی را به صورت زیر نوشت:

$$\gamma^{\bar{a}_2}\left(q, \dot{q}\right) = \left(\lambda_i^{\bar{a}_2} - \dot{\lambda}_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_2} \lambda_i^{\bar{a}_1}\right) L_i + \frac{d}{dt}\left[\left(\lambda_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_2} \lambda_i^{\bar{a}_1}\right) L_i\right] = 0 \quad \bar{a}_2 = 1, ..., \bar{A}_2. \tag{۲۰.۲}$$

تقریبا روش کار مشخص شده است. در مرحله بعد باید مشتقات زمانی $\gamma^{\bar{a}_2}\left(q, \dot{q}\right)$ را به معادلات (۱۴.۲) اضافه کنیم. با انجام این کار ماتریس بزرگتری از ضرایب شتاب‌ها ساخته می‌شود که ما آن را $W^2_{i_2 j}$ نامیده و باید ویژه بردارهای پوچ این ماتریس را بیابیم. باید این روش را مرحله به مرحله انجام دهیم. در هر مرحله برخی رابطه‌ها بین L_i و مشتقاتشان است مانند رابطه‌ی (۱۹.۲)، و برخی نیز مانند رابطه‌ی (۲۰.۲) قیود جدید را نتیجه می‌دهد.

به عنوان مثال در مرحله nام، $k + \bar{A}_1 + ... + \bar{A}_n$ معادله برای شتاب به دست می‌آوریم که به شرح زیر است:

$$\begin{cases} W_{ij}\, \ddot{q}_j + \alpha_i = 0 & i = 1, ..., k \\ \frac{d\gamma^{\bar{a}_1}}{dt} = 0 & \bar{a}_1 = 1, ..., \bar{A}_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \frac{d\gamma^{\bar{a}_n}}{dt} = 0 & \bar{a}_n = 1, ..., \bar{A}_n, \end{cases} \tag{۲۱.۲}$$

که می‌توانیم این معادلات را به صورت زیر خلاصه‌نویسی کنیم:

$$W^n_{i_n j}\, \ddot{q}_j + \alpha_{i_n} = 0 \qquad i_n = 1, ..., k + \bar{A}_1 ... + \bar{A}_n. \tag{۲۲.۲}$$

در این مرحله تعداد $\bar{A}_n$ معادله برای شتاب‌ها داریم. همچنین ممکن است تعداد A_{n+1} ویژه بردار پوچ $\lambda^{a_{n+1}}$ برای W^n داشته باشیم که k آرایه‌ی اولیه و $\bar{A}_n$ آرایه‌ی آخر بعضی از آنها غیر صفر باشد. پس رتبه‌ی کل معادلات

(۲۱.۲) یا (۲۲.۲) برابر است با:

$$(k - A_1) + (\bar{A}_1 - A_2) + ... + (\bar{A}_n - A_{n+1}). \qquad (۲۳.۲)$$

با اعمال ویژه بردار پوچ $\lambda_{in}^{a_{n+1}}$ بر روی معادله‌ی (۲۲.۲)، به تعداد $\bar{A}_{n+1}$ قید لاگرانژی $\gamma^{\bar{a}_{n+1}}$ به علاوه $\widetilde{A}_{n+1}$ رابطه‌ی جدید بین L_i و مشتقاتشان داریم. یعنی:

$$\lambda_i^{\widetilde{a}_{n+1}} L_i + \lambda_{\bar{a}_1}^{\widetilde{a}_{n+1}} \frac{d\gamma^{\bar{a}_1}}{dt} + ... + \lambda_{\bar{a}_n}^{\widetilde{a}_{n+1}} \frac{d\gamma^{\bar{a}_n}}{dt} = 0, \qquad (۲۴.۲)$$

از رابطه‌ی (۱۹.۲) استفاده کرده و $\gamma^{\bar{a}_n}$ را بر حسب L_i و مشتقاتشان جایگذاری می‌کنیم. در نهایت رابطه‌ی (۲۴.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{d^s}{dt^s} (\rho_{si} L_i) = 0, \qquad (۲۵.۲)$$

در این رابطه ρ_{si} که توابعی از مختصات و مشتقاتشان هستند را مولدهای تقارن پیمانه‌ای و رابطه‌ی فوق را اتحاد نودر می‌نامیم.

۲.۲ تبدیلات پیمانه‌ای

در این بخش تمرکز ما بر روی رابطه‌ی (۲۵.۲) است. ابتدا وردش لاگرانژی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\delta L =& \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\ =& [\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})]\delta q_i + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i) \\ =& - L_i \delta q_i + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i),\end{aligned} \qquad (۲۶.۲)$$

همچنین تغییرات کوچک متغیرها را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$\delta q_i = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{d^s f}{dt^s} \rho_{si}, \qquad (۲۷.۲)$$

که در آن $f\left(t\right)$ تابع اختیاری کوچکی از زمان است. این پیشنهاد از آن جهت با اهمیت است که می‌توانیم با استفاده از آن وردش پیمانه‌ای مختصات را نشان دهیم. با این تغییر مختصات، وردش (۲۶.۲) چنین است:

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\,L_i\,\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right) \\
&\cong -\sum_{s=0}^{n}\left(-1\right)^s\frac{d^s f}{dt^s}\,\rho_{si}\,L_i \\
&\cong -\,\rho_{0i}\,L_i\,f - \sum_{s=1}^{n}\left(-1\right)^{s-1}\frac{d^{s-1}f}{dt^{s-1}}\frac{d}{dt}\left(\rho_{si}\,L_i\right) \\
&\cong \dots \\
&\cong -\left[\sum_{s=0}^{n}\frac{d^s}{dt^s}\left(\rho_{si}\,L_i\right)\right]f \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

که در آن نماد $\cong$ نشانه‌ایی معادل دیفرانسیل کامل زمانی است و در آخر نیز از رابطه‌ی (۲۵.۲) استفاده کرده‌ایم. از این‌رو وردش کنش را می‌توان با استفاده از ترکیبی از مشتقات $f\left(t\right)$ نشان داد. پس رابطه‌ی (۲۸.۲) یک تبدیل پیمانه‌ای است. زیرا تحت تبدیل (۲۷.۲)، لاگرانژی و به تبع آن کنش ناوردا می‌ماند. این نتیجه برای هر $q_i\left(t\right)$ اختیاری و L_i برقرار است. زیرا ما در محاسبات و نتایج، L_i را در نظر گرفتیم، بدون فرض $L_i = 0$.

به طور کلی ممکن است چندین رابطه شبیه رابطه‌ی (۲۵.۲) داشته باشیم، پس برای تمیز دادن آنها از اندیس a استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{d^s}{dt^s}\left(\rho_{si}^{(a)}\,L_i\right) = 0 \qquad a = 1, ..., M. \tag{۲۹.۲}$$

همچنین تبدیلات پیمانه‌ای نیز به وسیله‌ی این اندیس تمیز داده می‌شوند. یعنی برای هر تابع اختیاری $f_a\left(t\right)$ داریم:

$$\delta q_i = \sum_{a=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_a}\left(-1\right)^s\frac{d^s f_a}{dt^s}\left(\rho_{si}^{(a)}\right). \tag{۳۰.۲}$$

به نظر مناسب است که این نتایج را به نظریه میدان نیز تعمیم دهیم. فرض می‌کنیم دینامیک یک سیستم که شامل میدان‌های $q_i\left(x,t\right)$ است، به وسیله لاگرانژی زیر توصیف می‌شود:

$$L = \int dx\mathcal{L}\left(q_i\left(x,t\right), \partial_x\,q_i\left(x,t\right), \partial_t\,q_i\left(x,t\right)\right), \tag{۳۱.۲}$$

مشتقات اویلری این سیستم به صورت زیر هستند:

$$L_i\left(x,t\right)=\int dy\, W_{ij}\left(x,y\right)\ddot{q}_j\left(y,t\right)+\alpha_i\left(x,t\right)\qquad i=1,...,N \tag{۳۲.۲}$$

که در آن N شماره‌ی میدان‌ها و α_i و W_{ij} به صورت زیر هستند:

$$\alpha_i\left(x,t\right)=\int dy\frac{\delta^2 L}{\delta q_j\left(y,t\right)\delta\dot{q}_i\left(x,t\right)}\dot{q}_j\left(y,t\right)-\frac{\delta L}{\delta\, q_i\left(x,t\right)}, \tag{۳۳.۲}$$

$$W_{ij}\left(x,y,t\right)=\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{q}_j\left(y,t\right)\delta\dot{q}_i\left(x,t\right),} \tag{۳۴.۲}$$

در ضمن همه مشتق‌های لاگرانژی مشتقات تابعی هستند.

ماتریس هسیان را می‌توانیم به صورت عملگر ماتریس $N\times N$ که در $\delta\left(x-y\right)$ ضرب می‌شود، در نظر بگیریم. در ابتدا فرض ما بر این بود که لاگرانژی سیستم تکین است و این تکینگی از صفر بودن دترمینان ماتریس هسیان لاگرانژی ناشی می‌شود. ویژه فضای پوچ ماتریس هسیان را می‌توان به وسیله‌ی بردارهای پایه زیر

$$\lambda_z^{a_1}(x)=\lambda^{a_1}\delta(x-y)$$

نشان داد، که λ^{a_1} شبیه ویژه بردارهای پوچ قبل هستند. با ضرب $\lambda_z^{a_1}\left(x\right)$ در معادلات حرکت، قیود اولیه لاگرانژی به دست می‌آیند:

$$\gamma^{a_1}\left(z,t\right)=\int dx\,\lambda_i^{a_1}\,\delta\left(x-y\right)L_i\left(x,t\right)=\lambda_i^{a_1}\,\alpha_i\left(z,t\right). \tag{۳۵.۲}$$

برای یک سیستم در چارچوب نظریه میدان که دارای تقارن پیمانه‌ای باشد، می‌توان رابطه‌ای شبیه به رابطه‌ی (۲۵.۲) بیان نمود که به صورت زیر است:

$$\sum_{s=0}^{n_\alpha}\int dx\frac{\partial^s}{\partial t^s}\left[\rho_{si}^{(\alpha)}\left(z,x\right)L_i\left(x,t\right)\right]=0, \tag{۳۶.۲}$$

در این جا متغیر فضایی z و اندیس α نقشی تفکیکی شبیه اندیس a در رابطه‌ی (۲۹.۲) دارند. تبدیل پیمانه‌ای