بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش: جبر وتوپولوژی

عنوان:

وارون پذیری مدول های ضربی

به وسیله‌ی:

سارا ریحانی اردکانی

استاد راهنما :

دکتر شهره نمازی

دی ماه ۱۳۹۰

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب سارا ریحانی اردکانی (۸۸۰۵۹۵) دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش جبرو توپولوژی دانشکده علوم اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده ودر جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام ، نشانی دقیق ومشخصات کامل آن را نوشته ام . همچنین اظهار می‌کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست وتعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن منتشر ننموده ویا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق آیین نامه مالکیت فکری ومعنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی : سارا ریحانی اردکانی

تاریخ و امضاء

سپاسگزاری

باسپاس از قدرت بی انتها که مثل همیشه کمک و رحمتش را یک بار دیگراز بنده دریغ نداشت تا بتوانم یکی دیگر از مراحل زندگیم را با موفقیت به پایان برسانم. از سرکار خانم دکترشهره نمازی استاد راهنمای گرانقدرم که همیشه راهنما وکمک دهنده در انجام این تحقیق بودند تشکر وقدردانی می‌کنم.   سپاس فراوان خدمت اساتید مشاورم آقایان دکتر حبیب شریف ودکتر بابک امینی را دارم.

خدایا چنان کن سرانجام کار   توخشنود باشی وما رستگار

چکیده

وارون پذیری مدول های ضربی

به وسیــلهی:

سارا ریحانــی اردکانــی

درسرتاسر این پایان نامه R یک حلقه جابه جایی یکدارو M یک R –مدول یکانی است. دراین پایان نامه زیرمدول های مـدول ضربـــی، پروفر ضربـــی و ددکیند را بررسی می‌کنیم. همچنین ما شرایط معادل حلقه بودن L^{-1} جایی که L یک زیرمدول از یک R-مدول پروفر ضربی وفادار است را بیان می‌کنیم. مفهوم مدول ها ی به طورصحیح بسته بیان می‌شود و نشان داده می‌شودکه مدولهای ارزیاب ضربی وفادار و درنتیجه مدول های پروفر ضربـی وفادار روی یک دامنه صحیح به طورصحیح بسته هستند. ما ثابت می‌کنیم اگر R یک دامنه صحیح و M یک R –مدول ضربی وفادار و N زیر مدول متناهیا تولید شده ای ازآن باشد، آنگاه $Tr_M(N) = NN^{-1}$ ، جایی‌که

$Tr_M(N) = \sum_{f \in Hom(N,M)} f(N)$. درپایان ارتباط بیـن مـــدول ددکیـند بـی‌تاب متناهیا تولید شده M روی دامنه R و زیرمدول های اول از $\mathcal{Q}(M)$ –مدول M بررســـی می‌شود، جایی که $\mathcal{Q}(M) = \{x \in \mathcal{K} \mid xM \subseteq M\}$.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱-۱ :کلیات

این پایان نامه برگرفته از [۲]، [۸]و[۲۳] است. درتمامی این پایان نامه R به عنوان یک حلقه جابه‌جایی یکدار درنظرگرفته می‌شود. R_S حلقه خارج قسمتی تام R که هرگاه R یک دامنه صحیح و M یک $R-$مدول بی تاب باشد، $\mathcal{K}=R_S=R_T$ میدان های کسرهای R می‌شود، جایی که S مجموعه مقسوم علیه های ناصفر R و

$$T=\left\{ t\in S \middle|\ \text{برای } m\in M \text{، } tm=\circ \text{ نتیجه دهد } m=\circ \right\}.$$

درسال(۱۹۹۶)، $(A.G.Naoum)$و $(F.H.AL-ALwan)$، [۲۲] مفهوم زیرمدول معکوس‌پذیرکه یک توسیع از ایده‌ال معکوس‌پذیراست را بیان کردند و همچنین مدول های پروفر و D_1-مدول ها رامعرفی کردند و نشان دادندکه یک $R-$مدول ضربـی وفادار M پروفر (به تناظر D_1)است اگروفقط اگر R یک دامنه پروفر(به تناظر دامنه صحیح) باشد برای بررسی بیشتر در مورد مدول های پروفر می‌توانید به[۱۴] مراجعه کنید. در سال(۱۹۸۹)، $(D.D.Anderson)$، [۸] ایده‌ال های یک دامنه ارزیاب را مورد بررسی قرار داده است که در سال ۲۰۰۹، $(M.Ali)$، [۲] قضایای فوق را برای یک مـــدول ارزیاب تعمیـــم مـی‌دهد. درسال(۱۹۹۷)، $(M.Fon\tan a)$، $(J.Huckaba)$و $(I.Papick)$، [۱۴] شرایطی را مطرح کرده اندکه برای ایده‌ال I از دامنه R، I^{-1}چه وقت حلقه می‌شود. که در سال (۲۰۰۹)، $(M.Ali)$ ، [۲] قضایای فوق مربوط به ایده‌ال ها رابرای مدول ها تعمیم می‌دهد. در سال (۲۰۰۵)، $(M.Alkan)$ و $(Y.Tiras)$، [۵] مدول های ددکیند را مورد بررسی قراردادند ودر سـال (۲۰۰۷)، $(P.F.Smit)$ و $(Y.Tiras)$ ارتباط بـین مدول های ددکـــیند روی دامنـــه R و زیرمـــدول های اول از $\mathcal{Q}(M)$-مـــدول M و حلقـــه $\mathcal{Q}(M)$ را مطـــرح کردند جایــــی کــه $\mathcal{Q}(M)=\{x\in\mathcal{K}:xM\subseteq M\}$ و $\mathcal{K}$ میدان‌کسرهای R باشد. دراین پایان نامه مدول های ضربـی ، پروفر ضربی، مفهوم $Tr_M(N)$، مدول‌های به طورصحیح بسته ومـدول‌های ددکیندرا بررسی می-

کنیم. همچنین قضایایی رابرای ایده ال های حلقه Rمطرح کرده که آنهارا برای زیرمدول های یک R –مدول ضربی تعمیم می‌دهیم. در بخش دوم از فصل اول تعاریف، لم ها و قضایای که در فصل های بعدی به طورمکرراستفاده می‌شود آمده است. می‌دانیم که I^{-1}همیشه حلقه نیست ازجمله اهداف بخش سوم فراهم آوردن شرایطـی است که I^{-1}یک حلقه شود. دربخـش چهارم ایده‌ال‌های یک دامنه ارزیاب رابیان می‌کنیم. در بخش پنجم، رد یک R –مدول‌که ایده‌الی از حلقه R می‌شود را بررسی می‌کنیم که ازجمله اهداف این بخش این است که وضعیت $Tr_R(I)$ را مشخص می‌کند و بیان می‌شود که اگر I یک ایده‌ال‌کسری R باشد، $Tr_R(I) = I\,I^{-1}$. در فصل دوم، مدول های‌ضربی، و پروفر ضربی را مورد بررســی قرار می‌دهیم. که در بخش اول زیر مدول های یک مدول ضربی و مفهوم مدول اولیه بودن را بررسی کرده که از جمله اهداف ارتباط بین مدول های اولیه وایده‌الهای اولیه است. دربخش دوم، مـدول‌های پروفـر ضربی را بررســی کرده که ازجمله اهداف فراهم کردن شرایط معادل برای یک مدول پروفرو همچنین یک مدول تصویری است وتعمیم یک سری قضایای مربوط به ایـده‌ال ها به مدول ها است. در فصل سوم مفهوم $Tr_M(N)$، جایی که N و M دو R –مـدول هستند بیان مــی‌شود که از جمله اهداف بخـش اول بررسی کردن وضعیت $Tr_M(N)$ است. دربخش دوم مــدول های به طور صحیح بسته و مرتبط بررسی می‌شود که ازجمله اهداف شرایط معادل برای به طورصحیح بسته بودن یک R –مدول ورابطه بین یک R –مدول مرتبط وپروفر است. درفصل چهارم مدول های ددکیند را بررســی کرده که ازجملـه اهداف این بخـش فــراهم ساختن شرایـط مـعادل برای ددکیند بـودن R –مدول Mبررسی شده وهمچنین اثبات می‌شود که یک مدول بی‌تاب متناهیا تولیدشده روی دامنه R ددکیند است اگروفقط اگرهرزیرمدول اول غیر صفراز $M_{\mathcal{Q}(M)}$ماکسیمال و $\mathcal{Q}(M)$ یک دامنه ددکیند باشد.

۱-۲: تعاریف وقضایای مقدماتی

تعریف۱-۲-۱: فرض‌کنید R یک حلقه جابجایی یکدارو M یک R –مدول باشد، دراین صورت M را یک مدول ضربی گوئیم هرگاه هرزیر مدول N از M را بتوان به شکل IM نوشت جایی که I یک ایده‌ال ازحلقه R است که این تعریف با این که $N=[N:M]M$ معادل است، وقتی که

$$[N:M]=\{r\in R : rM\subseteq N\}.$$

تعریف۱-۲-۲: M رایک R –مدول حذفی گوئیم هرگاه از $IM=JM$ نتیجه شود $I=J$، جایی که I و J دو ایده‌ال از حلقه R هستند.

لم۱-۲-۳: اگر R یک دامنه صحیح و M یک R –مدول ضربی وفادار باشد، آنگاه M با تولید متناهی است.

اثبات: طبق قضیه ۳-۴ از منبع [۱۳] برقرار است. ■

لم ۱-۲-۴: اگر M یک R –مدول ضربی و P یک ایده‌ال اول از حلقه R باشد، آنگاه M_P یک R_P–مدول دوری است.

اثبات : به مرجع [۹] مراجعه شود. ■

لم۱-۲-۵: فرض کنید M یک R –مدول ضربی وفادار باشد، آنگاه عبارتهای زیر با هم معادل هستند:

۱) M با تولید متناهی است.

۲) اگر A و B ایده‌ال‌های از R باشند به گونه‌ای که $AM\subseteq BM$، آنگاه $A\subseteq B$.

۳) برای هر زیر مدول N از M یک ایده‌ال یکتای I از حلقه R وجود دارد که $N=IM$.

اثبات: طبق قضیه ۱-۳ از [۱۳]برقرار است. ■

لـم۱-۲-۶: اگر M یک مدول ضربی وفاداربا تولید متناهی، I یک ایده‌ال از R و N زیرمـدولی از M باشد، آنگاه $[IN:M]=I[N:M]$.

اثبات: چـون IN زیرمـدولی از N است و M ضربـی است پس $IN=[IN:M]M$. از طرفـی $IN=I[N:M]M$، پس $I[N:M]M=[IN:M]M$. چون طبق لم ۱-۲-۵، M حذفـی است، لذا $I[N:M]=[IN:M]$. ■

تذکر۱-۲-۷: مدول های دوری، ضربی هستند.

لم۱-۲-۸: اگر M یک R-مدول ضربی وفادار باشد، آنگاه M بی‌تاب است.

اثبات: فرض کنید M یک R-مدول ضربی وفادار است که بی‌تاب نباشد، در این صورت اگر S مجموعه مقسوم‌علیه‌های ناصفراز R باشد، آنگاه عنصر $r\in S$ و $0\neq m\in M$ وجود دارد به طوری که $rm=0$. چون M یک مدول ضربی است، پس ایده‌ال ناصفر I از R هست که $Rm=IM$. بنابراین $r\operatorname{Im}=0$. از طرفی چون $I\neq 0$، پس $rI\neq 0$. در نتیجه M وفادار نیست و این یک تناقض است. پس حکم برقرار است.

اثبات قبل برگرفته از [۵] است. ■

لم۱-۲-۹: فرض‌کنید I و J دو ایده‌ال ازحلقه R و M یک R-مدول ضربی با تولید متناهی باشد. در این صورت $IM\subseteq JM$ اگروفقط اگر $I\subseteq J+ann(M)$.

اثبات: طبق نتیجه قضیه ۹ از [۲۴] برقرار است. ■

لم۱-۲-۱۰: فرض‌کنید I یک ایده‌ال از دامنه صحیح R باشدکه ضربی و با تولید متناهی است، آنگاه I وارون پذیراست.

اثبات: چون I ضربی و با تولیدمتناهی است، برای هرایده‌ال ماکسیمال P از R بنابر لم ۱-۲-۴، I_P دوری خواهد بود. یعنی $I_P = R_P x$ درنتیجه I وارون پذیر می شود. (قضیه ۳-۱۱ از [۲۰]) ■

لم۱-۲-۱۱: M یک $R-$ مـدول ضربی‌است اگروفقط اگربرای هرمجموعه‌غیرتهی $\{I_\alpha\}$ ازایده‌الهای حلقه R، $\bigcap_{\alpha\in A}(I_\alpha M) = (\bigcap_{\alpha\in A}[I_\alpha + ann(M)])M$.

اثبات: طبق قضیه ۱-۷ از [۱۳] برقرار است. ■

تعریف۱-۲-۱۲: فرض‌کنید S مجموعـه عناصرمنظـم حلقه R (عناصری از R که مقسوم‌علیه صفر نیستند) و $\mathcal{K} = R_S$ حلقه خارج قسمتی تام R باشد، دراین‌صورت ایده‌ال کسری غیر صفر A از حلقه R را وارون پذیرگوئیم هرگاه $AA^{-1} = R$، جایی‌که $A^{-1} = \{x \in \mathcal{K} \mid xA \subseteq R\}$. واضح است که A^{-1} نیز یک ایـده ال کسری R است که وارون آن یعنـی $(A^{-1})^{-1}$ را با نماد A_v نمایش مـی‌دهیم. یعنـی $A_v = [R :_{\mathcal{K}} A^{-1}]$. بنابراین $A \subseteq A_v$.

فـرض‌کنید S مجموعه مقسـوم‌علیه‌های غیرصفرحـلقه R باشد. دراین‌صورت زیر مجموعه

$$T = \{\, t \in S \mid \text{برای } m \in M\text{، } tm = \circ \text{ نتیجه دهد } m = \circ \,\}.$$

یک زیرمجموعه بسته ضربی از R مشمول در S است.

تعـریف۱-۲-۱۳: فـرض‌کنید $x = \frac{r}{t} \in R_T$ و $n \in M$ باشد، براساس[۵]گوئیم $xn \in M$ است اگرعنصر m از M موجـود باشد بـه طـوری که $tm = rn$. نشان مـی‌دهیم خـوش‌تعـریف است، یعنـی اگـر $\frac{r_1}{t_1} = \frac{r_2}{t_2} \in R_T$ و $a \in M$ باشد به طوری‌که $m = \frac{r_1}{t_1} a \in M$، آنگاه $\frac{r_2}{t_2} a \in M$. عنصر $u \in T$ وجود داردبه طـوری‌که $ur_1t_2 = ur_2t_1$. ازطرفی $r_1 a = t_1 m$، بنابراین $u\, t_2 r_1 a = u\, t_2 t_1 m$، پـس $u\, t_1 r_2 a = u\, t_1 t_2 m$، در نتیجـه $u\, t_1 (r_2 a - t_2 m) = \circ$. چون $u\, t_1 \in T$، لـذا $r_2 a = t_2 m$، پس ایـن تعـریف خوش‌تعریف اسـت.

تعریف۱-۲-۱۴: برای $R-$زیرمدول های N و L از M، $x\in[L :_{R_T} N]$ مجموعه تمام عناصر $x \in R_T$ که $xN \subseteq L$ را تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $xN \subseteq L$ اگروفقط اگر برای هر $n \in N$، $l \in L$ وجود

داشتـه باشد به طوری‌که $rn=tl$ وقتی که $x=\frac{r}{t}$.

لـم ۱-۲-۱۵: برای زیرمـدول های N و L از M، $[L :_{R_T} N]$ یک $R-$زیرمـدول از R_T اسـت.

اثبات : با استفاده از تعریف به راحتی ثابت می‌شود. ■

تعـریف۱-۲-۱۶: برای زیرمـدول N از $R-$مـدول M، تعریف می‌کنیم $N^{-1}=\{x\in R_T | xN\subseteq M\}$ یعنـی $N^{-1}=[M :_{R_T} N]$ که N^{-1} یک R-زیرمدول از R_T است وگـوییم N در M وارون‌پـذیر است هرگاه $NN^{-1}=M$. به طورمعادل N در M وارون‌پذیراست اگریک $R-$زیرمدول L از R_T وجودداشته باشدطوری‌که $NL=M$. همچنین وارون N^{-1} در R_T را با N_v نمایش می‌دهیم.

تذکر۱-۲-۱۷: درحالت کلی NN^{-1} یک $R-$زیرمدول از M است وهمچنین برای هرایده‌ال کسری A از R، AA^{-1} یک ایده‌ال از R است.

تذکر۱-۲-۱۸: برای ایده ال های کسری A و B از R اگر $A\subseteq B$، آنگاه $B^{-1}\subseteq A^{-1}$. همچنیـن اگر I ایده ال غیرصفری ازحلقه R باشد، $I\subseteq I^{-1}I$.

لم ۱-۲-۱۹: اگر I و J دو ایـده‌ال متبایـن ازحلقه R باشند، دراین صورت $(I\bigcap J)^{-1}=I^{-1}+J^{-1}$.

اثبات : طبق لم۳-۱-۶ از [۱۴] برقرار است. ■

لم۱-۲-۲۰: اگر L و N زیرمـدول هایی از $R-$مدول M باشندکه $L+N$ یک مدول‌ضربـــی با تولید متناهی باشد، دراین‌صورت $R=[L:N]+[N:L]$.

اثبات : طبق نتیجه ۳ از [۲۴] برقرار است. ■

لـم۱-۲-۲۱: اگر L و L' زیرمدول های ی از R -مدول M باشند، دراین‌صورت عبارات زیر معادلند:

۱) $R=[L:L']+[L':L]$.

۲) $[(L+L'):N]=[L:N]+[L':N]$، برای هر زیرمدول N از M.

اثبات: طبق قضیه ۴ از [۲۴] برقرار است. ■

لم ۱-۲-۲۲: برای هرایده‌ال غیرصفر I ازدامنه صحیح R عبارات زیر معادل هستند:

(۱) $I\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right)=\bigcap_{\alpha} IB_{\alpha}$، برای هرمجموعه غیر تهی $\{B_{\alpha}\}$ از ایده‌ال‌های R.

(۲) $I\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right)=\bigcap_{\alpha} IB_{\alpha}$ ، برای هرمجموعه غیر تهی $\{B_{\alpha}\}$ از ایده‌ال‌های کسری R.

(۳) I وارون پذیر است.

(۴) I تصویری است.

اثبات: طبق قضیه۱ از [۷] برقرار است. ■

لم۱-۲-۲۳: برای هر ایده‌ال I ازدامنه صحیح R عبارات زیر معادل هستند:

۱) $I(B\cap C)=IB\cap IC$، برای ایده‌ال‌های B و C از R.

۲) $I(B_1\cap\cdots\cap B_n)=IB_1\cap\cdots IB_n$، برای ایده‌ال‌های کسری B_1 و...و B_n از R.

۳) I یک ایده‌ال هموار R است.

اثبات: طبق قضیه۲ از [۷] برقرار است. ■

تعریف ۱-۲-۲۴: حلقه R را یک حلقه ارزیاب‌گوئیم هرگاه برای هر $a,b\in R$ که حداقل یکی ازآنها منظم است، $Rb\subseteq Ra$ یا $Ra\subseteq Rb$. به طورمعادل، برای هردوایده‌ال I و J از R که‌حداقل یکی ازآنها منظم باشد، داشته باشیم $I\subseteq J$ یا $J\subseteq I$. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌ال را منظم گوییم، اگر حداقل شامل یک عنصر منظم باشد.

تعریف۱-۲-۲۵: مدول M روی دامنه صحیح R رایک مدول ارزیاب گوئیم، هرگاه برای‌هر

$n,m \in M$ داشته باشیم $Rm \subseteq Rn$ یا $Rn \subseteq Rm$ که معادل این است که برای زیرمدول های L و N از M داشته باشیم $L \subseteq N$ یا $N \subseteq L$.

نتیجه۱-۲-۲۶: اگر R یک حلقه ارزیاب باشد، آنگاه هرایده‌الش هموار است.

اثبات: دریک حلقه ارزیاب، ایده‌الها قابل مقایسه هستند. پس برای ایده‌ال های A و B از R، $A \bigcap B = A$ یا $A \bigcap B = B$، پس بنابر لم ۱-۲-۲۳، حکم برقرار می‌شود. ■

لم ۱-۲-۲۷: فرض‌کنید R یک حلقه و M یک R –مدول ضربی وفادارباتولید متناهی و N زیر مدولی ازآن باشد، آنگاه:

۱) N همواراست اگروفقط اگر $[N:M]$ یک ایده‌ال هموار از R باشد. به علاوه اگر N با تولید متناهی باشد، آنگاه N ضربی است.

۲) اگر N تصویری باشد، آنگاه N ضربی است.

۳) اگر $[N:M]$ تصویری باشد، آنگاه N تصویری است وعکس آن وقتی برقراراست که N با تولید متناهی باشد.

اثبات : طبق قضیه۳-۷ از[۴] برقرار است. ■

لم۱-۲-۲۸: فرض‌کنید R یک حلقه جابجایی یکدارو M یک R –مدول ضربی وفادار باتولیدمتناهی و N زیرمدولی ازآن باشد، آنگاه N ضربی است اگروفقط اگر $[N:M]$ یک ایده‌ال ضربی از R باشد.

اثبات : طبق قضیه ۱۰ از[۲۴] برقرار است. ■

تعریف ۱-۲-۲۹: R –مدول M را یک R –مدول پروفر(به تناظر D_1) گوئیم هرگاه هر زیرمدول متناهیا تولیدشده (به تناظر دوری) غیرصفرآن وارون پذیرباشد.

لم ۱-۲-۳۰: مدول ضربی وفادار Mروی حلقه R، یک مدول پروفر(به تناظر D_1) است اگر وفقط اگر R یک دامنه پروفر(به تناظر دامنه صحیح) باشد.

اثبات : طبق قضیه۳-۶ از [۲۲] برقرار است. ■

لـم۱-۲-۳۱: اگر M یک R -مـدول ارزیاب ضربـــی وفادار متناهیا تولیدشده باشد، آنگاه M یک R -مدول پروفراست.

اثبات : طبق قضیه۲-۳ از [۳] برقرار است. ■

لم۱-۲-۳۲: اگر N یک زیرمدول از R -مدول ضربی وفادار باتولیدمتناهی Mباشد، آنگاه N با تولید متناهی است اگروفقط اگر $[N:M]$باتولیدمتناهی باشد.

اثبات : طبق قضیه۲-۲ از [۴] برقرار است. ■

لم۱-۲-۳۳: اگر R یک دامنه صحیح و M یک R -مدول ضربی‌وفادارباشد،آنگاه M یک‌مدول‌ارزیاب است اگروفقط اگر R یک دامنه ارزیاب باشد.

اثبات : طبق قضیه۲-۲ از[۳] برقرار است. ■

تعریف۱-۲-۳۴: یک زیرمـــدول محض Nاز R -مـــدول Mرا اول گوئیم، هرگاه برای $m \in M$ و $r \in R$ اگر $rm \in N$، آنگاه $m \in N$ یا $r \in [N:M]$. لازم به ذکراست که اگر M شامل حداقل یک زیر مدول اول باشد دراین‌صورت سوپریمم طول تمام زنجیره‌ها از زیرمدول‌های اول Mرا با $D(M)$ نشان می‌دهیم. درحالت خاص $D(R)$همان بعد(کرول) حلقه Rاست.

تعـــریف۱-۲-۳۵: فـرض‌کنید M یک R -مـدول و $\mathscr{M}$ یک ایـده‌ال ماکسیمال از R باشد تعـریف می‌کنیم

$$T_{\mathscr{M}}(M) = \{m \in M : (1-x)m = 0,\ x \in \mathscr{M} \text{ برای برخی}\}.$$

لازم به ذکراست که در[۱۳]ثابت شده‌که M یک R –مدول ضربی است اگروفقط اگربرای هرایده‌ال ماکسیمال $\mathcal{M}$از R، $M = T_{\mathcal{M}}(M)$ یا M، $\mathcal{M}$-دوری باشد(برای $x \in \mathcal{M}$ ، $m \in M$وجودداشته باشد طوری که $(1-x)M \subseteq Rm$).

لم۱-۲-۳۶: فرض‌کنید P یک ایده‌ال اول ازحلقه Rو M یک R –مدول ضربی وفادارباشد. برای هر $a \in R$ و $m \in M$ به طوری‌که $am \in PM$، آنگاه $a \in P$ یا $m \in PM$.

اثبات : فــرض‌کنیم $a \notin P$ ثابت می‌کنیم $m \in PM$. قرارمی‌دهیم $K = \{r \in R : rm \in PM\}$. فرض کنید $K \neq R$. پس ایده‌ال ماکسیمال $\mathcal{M}$از Rوجوددارد طوری‌که $K \subseteq \mathcal{M}$. داریم $m \notin T_{\mathcal{M}}(M)$ زیرا درغیر این‌صورت $(1-x)m = \circ$ جای‌که $x \in \mathcal{M}$. ولی‌چون Mوفاداراست. پس $x = 1$ که با ماکسیمال بودن $\mathcal{M}$ تناقــــض دارد. درنتیـــجه طبق توضیـــح قبل، M، $\mathcal{M}$-دوری است. پس بنا به تعریـف $y \in \mathcal{M}$ و $m' \in M$ وجـــوددارد به گونـه‌ای‌کـه $(1-y)M \subseteq Rm'$. یعنــــی $(1-y)m = sm'$ و $sam' = (1-y)am = pm'$ بـرای $s \in R$و $p \in P$. پــس $asm' = pm'$. درنتیجـــه $(as-p)m' = \circ$ یعنــــی $(as-p) \in ann(m')$. چــــون $(1-y)M \subseteq Rm'$، لـــــذا $ann(m')(1-y)M \subseteq ann(m')Rm' = \circ$. پس. $ann(m')(1-y)M = \circ$. ولی‌چون M وفادار است در نتیجـــه $ann(m')(1-y) = \circ$. ازطرفی $(as-p) \in ann(m')$. درنتیجـــه $(1-y)(as-p) = \circ$. بنابراین $(1-y)as = (1-y)p \in P$. همچنین $(1-y) \notin P \subseteq \mathcal{M}$ و طبق فـرض $a \notin P$ پس $s \in P$. در نتیجه $(1-y)m = sm' \in PM$. یعنی $(1-y) \in K \subseteq \mathcal{M}$. درنتیجه $1 \in \mathcal{M}$ که تناقض است.
پس $K = R$ در نتیجه $m \in PM$. ■

نتیجه۱-۲-۳۷: اگر M یک R –مـدول ضربـــی وفادارو P یک ایـــده‌ال اول از Rباشد طـــوری که $M \neq PM$ ، آنگاه PM یک زیرمدول اول از Mاست.

اثبات: فرض‌کنید $a \in R$ و $m \in M$ طوری‌که $am \in PM$. طبق لم۱-۲-۳۶، $a \in P \subseteq [PM : M]$ یا $m \in PM$. پس PM یک زیرمدول اول از Mاست. ■

لم۱-۲-۳۸: فرض‌کنید M یک R −مدول ضربی و N یک زیرمدول محض از M باشد، دراین‌صورت عبارات زیر معادلند :

الف) N یک زیرمدول اول است.

ب) $[N:M]=ann\left(\frac{M}{N}\right)$ یک ایده‌ال اول از R است.

ج) برای ایده‌ال اول P از R که $ann(M)\subseteq P$ ، $N=PM$.

اثبات: طبق نتیجه۲-۱۱ از [۱۳] برقرار است. ■

لم۱-۲-۳۹: فرض‌کنید M یک R −مدول ضربی باشد، دراین‌صورت $\mathcal{M}$ یک زیرمدول ماکسیمال از M است اگروفقط اگریک ایده ال ماکسیمال مانند P از R موجود باشد، طوری‌که $\mathcal{M}=PM\neq M$.

اثبات: طبق قضیه۲-۵ از [۱۳] برقرار است. ■

تعریف ۱-۲-۴۰: فــرض‌کنید R یک دامنه صحیــح باشد، در این صورت ایده‌ال اول P از R رایک ایده‌ال شاخه‌ای گوئیم هرگاه ایده‌ال P - اولیه Q از R وجود داشته باشد به گونه‌ای که $P\neq Q$.

لــم۱-۲-۴۱: اگر M یک R −مـدول و I یک ایده‌ال وارون پذیـر ازحلقه R باشد، آنگاه IM یک زیر مدول وارون پذیراز M است. به علاوه اگر M یک R −مدول ضربی وفاداروباتولیدمتناهی باشد، طرف برعکس نیزبرقراراست.

اثبات : طبق قضیه۲-۳ از[۲۲] برقرار است. ■

نتیجه۱-۲-۴۲: هرمدول ضربی وفادار M روی دامنه صحیح R یک D_1 −مدول است.

اثبات: بنابرلم ۱-۲-۳، M باتولید متناهــی است. فرض‌کنید Rm یک زیرمدول غیرصفردوری از M

باشد. حال بنابرتذکر ۱-۲-۷، چون Rm دوری، پس ضربی است. درنتیجه طبق لم ۱-۲-۲۸، $[Rm:M]$ یک ایده‌ال ضربی و همچنین طبق لم ۱-۲-۳۲، $[Rm:M]$ یک ایده‌ال متناهیا تولیدشده است. حال بنا برلم ۱-۲-۱۰، $[Rm:M]$ یک ایده‌ال وارون پذیر است. درنتیجه طبق لم ۱-۲-۴۱، $Rm=[Rm:M]M$ یک زیرمدول وارون پذیراز M است. ■

لم۱-۲-۴۳: فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

الف) R یک حلقه پروفراست.

ب) اگر A و B دو R -مدول بی‌تاب باشند، $A\otimes_R B$ نیز بی‌تاب است.

ج) برای ایده‌ال‌های I و J در R، $I\otimes_R J$ یک R -مدول بی‌تاب است.

د) هر R -مدول بی‌تاب، هموار است.

اثبات : طبق قضیه ۴-۲ از[۱۱] برقرار است. ■

لم ۱-۲-۴۴: فرض‌کنید (R,P) یک حلقه موضعی و M یک R -مدول ضربی وفادار با تولیدمتناهی و N یک زیرمدول هموار و غیرصفراز M باشد. دراین صورت $N=PM$ یا $N=aM$، جایی‌که a یک عنصر منظم از R است.

اثبات: طبق قضیه۱ از[۱] برقرار است. ■

لم۱-۲-۴۵: اگر R یک حلقه ، M یک R-مدول ضربی وفادار و N زیرمدول وارون‌پذیری از M باشد، آنگاه N ضربی وفادار و با تولید متناهی است.

اثبات: طبق قضیه ۱-۲ از[۳] برقرار است. ■

لم۱-۲-۴۶: فرض کنید R یک دامنه صحیح باشد، دراین‌صورت عبارات زیرمعادلند:

الف) R یک دامنه پروفر است.

ب) R به طور صحیح بسته است و عدد مثبت $n>۱$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $a,b\in R$، $<a,b>^n=<a^n,b^n>$.

اثبات: طبق قضیه۲۴-۳ از [۱۵] برقرار است. ■

لـــم ۱-۲-۴۷: فـرض‌کنید M یک R-مدول متناهیاً تولیـــد شده باشد و I یک ایـده‌ال از R باشد طوری که $IM=M$. دراین صورت $x-1\in I$ وجوددارد طوری‌که $xM=\circ$.

اثبات: بنا برنتیجه ۲-۵ از[۱۰] برقرار است. ■

لم ۱-۲-۴۸: فرض‌کنید R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای $\mathcal{K}$ و M یک R-مدول بی‌تاب متناهیاً تولید شده باشد. اگر $x\in\mathcal{K}$ موجود باشد به طوری که $xM\subseteq M$، آنگاه $x\in\overline{R}$(جای‌که $\overline{R}$، بستارصحیح R در $\mathcal{K}$است).

اثبات: فـــرض‌کنید $\{m_۱,\dots,m_n\}$ یک مجموعـــه مـولد برای M باشد. دراین صـــورت به ازای هر $i=۱,\dots,n$، $xm_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}m_j$ وقتی که $a_{ij}\in R$. پس دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&(x-a_{11})m_1-a_{12}m_2-\cdots-a_{1n}m_n=\circ.\\
&-a_{21}m_1+(x-a_{22})m_2-\cdots-a_{2n}m_n=\circ.\\
&\vdots\\
&-a_{n1}m_1-a_{n2}m_2-\cdots+(x-a_{nn})m_n=\circ.
\end{aligned}$$

بنابـــراین اگر I ماتـریس همانی $n\times n$ و $A=[a_{ij}]_{n\times n}$، در این صورت $(xI-A)\begin{bmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_n\end{bmatrix}=\circ$. پس به ازای هر $i=۱,\dots,n$، $\det(xI-A)m_i=\circ$ و چون M بی تاب است داریم $\det(xI-A)=\circ$. دراین صورت $x^n+x^{n-1}y_1+\dots+y_n=\circ$ جایی که y_iها عنصرهایی از R هستند. پس $x\in\overline{R}$. ■