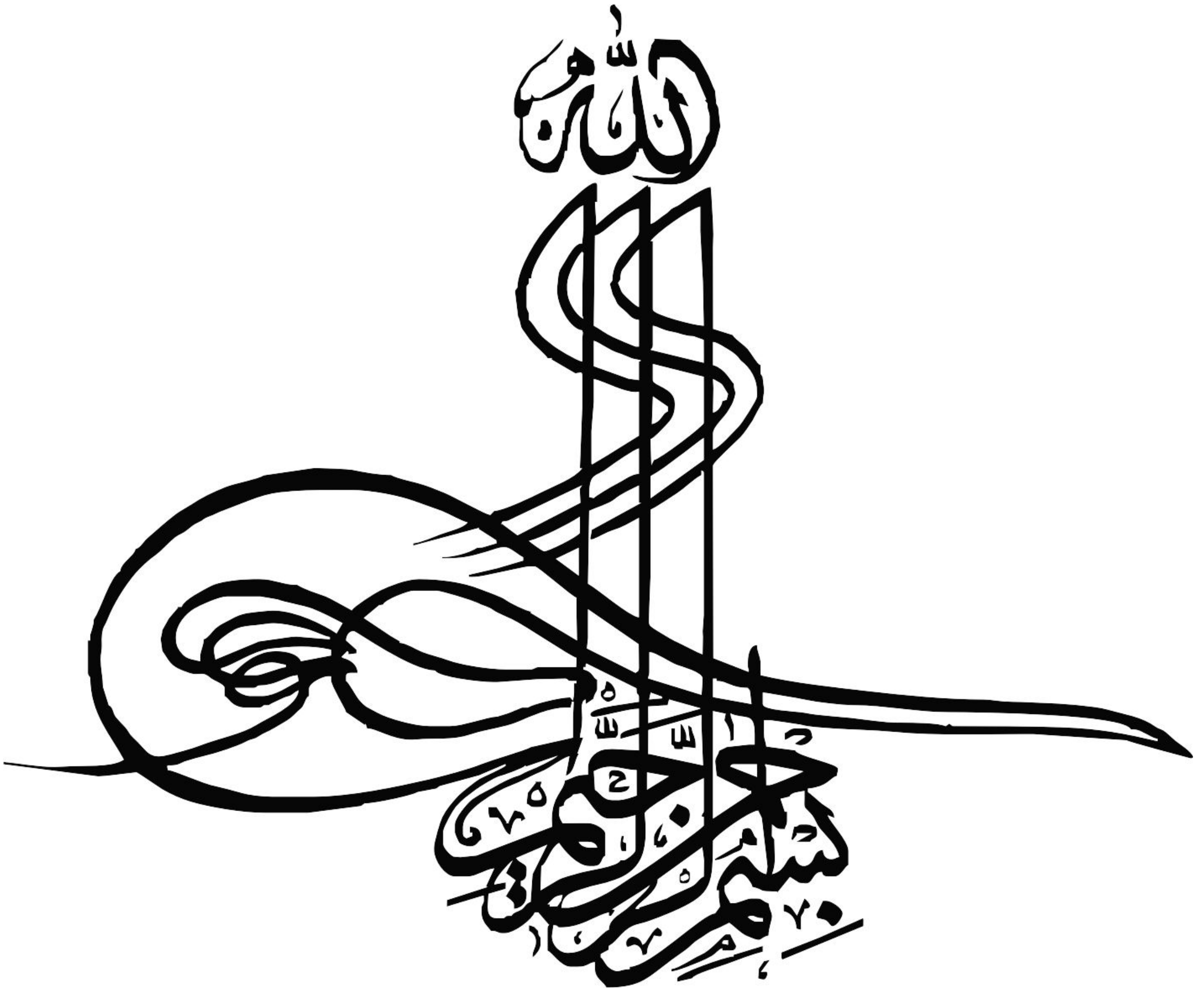
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

توپولوژی زاریسکی بر روی زیر مدول های ثانی و هم اول

از:

مریم عدالت جو

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

به پدر و مادرم که هر لحظه وجودم را از چشمه سار پر از عشق چشمانشان سیراب می کنند.

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند، و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم انان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل ".

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را به عهده گرفتند؛

از اساتید فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی و جناب آقای دکتر منصور هاشمی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم؛

و زیبایی حضور خواهر و برادران در کنارم، که خستگی های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده و امیدوارم بتوانم در آینده ی نزدیک جوابگوی این همه محبت آن ها باشم..

فهرست مطالب

چکیده:

توپولوژی زاریسکی بر روی زیر مدول های ثانی و هم اول

مریم عدالت جو

فرض کنید M یک مدول غیر صفر بریک حلقه شرکت پذیر (نه لزوما جابجایی) باشد.
در این پایان نامه ما طیف $Spec^s(M)$ از زیرمدول های ثانی M و طیف $Spec^c(M)$ از زیر مدول های هم اول M را مطالعه می کنیم.

کلید واژه:

توپولوژی زاریسکی، مدول ضربی، مدول هم ضربی، مدول هم اول، مدول ثانی

Abstract:

Zariski Topologies For Coprime And Second Submodules

Maryam Edalatjou

Let M be a non- zero module over an associative (not neccessarily commutative) ring.
In this dissertation we study a topology for the spectrum $Spec^s(M)$ of second submodules of M and the spectrum $Spec^c(M)$ of coprime submodules of M.

Key words:
Zariski topology, Multiplication module, Comultiplication module, Coprime module, Second module.

پیشگفتار:

در سال ۱۹۷۳، $Macdonald$ مفهوم مدول های ثانویه را برای اولین بار در مقاله [۱۲]، معرفی کرد. سپس در سال ۲۰۰۱ دکتر سیامک یاسمی بعنوان دوگان زیر مدول های هم اول، مفهوم زیر مدول های ثانی از مدول M بر روی حلقه جابجایی R را معرفی نمود. این مفهوم توسط $Annin$ برای مدول هایی بر روی حلقه شرکت پذیر دلخواه تعمیم داده شد. در این پایان نامه ما طیف زیر مدول های ثانی و طیف زیرمدول های هم اول را مورد بررسی قرار می دهیم.

این پایان نامه شامل ۴ فصل می باشد. فصل اول از دو بخش تشکیل شده است که در بخش اول به تعاریف و قضایای مقدماتی مدول ها می پردازیم و در بخش دوم برخی از تعاریف و ویژگی هایی از یک فضای توپولوژی را که در فصل های بعدی مورد نیاز است را بیان میکنیم.

در فصل دوم زیر مدول های ثانی و هم اول را معرفی کرده و برخی از قضایای مربوطه را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصول سوم و چهارم به ترتیب توپولوژی طیف $Spec^s(M)$ از زیر مدول های ثانی و طیف $Spec^c(M)$ از زیر مدول های هم اول را مورد بررسی قرار می دهیم.

در تهیه این پایان نامه از مقالات [۳]، [۲] و [۱] استفاده گردیده است.

فصل ۱
پیش نیاز

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی و مفاهیمی که برای درک بهتر فصل های دیگر مورد نیاز است می پردازیم.

در این پایان نامه R، حلقه ای یکدار ($1_R \neq 0$) است که لزوما جابجایی نیست. همچنین منظور از یک R- مدول همواره یک R- مدول چپ است مگر خلاف آن بیان گردد. بعلاوه برای R- مدول M حلقه $End(M)$ را با S نمایش می دهیم. می توان دید که M به همراه عمل

$$mf = f(m) \quad \forall m \in M \,, \forall f \in End(M)$$

یک S- مدول راست است. از این پس نماد $L \leq_R M$ نشان دهنده این خواهد بود که L یک زیر مدول از R- مدول M است.

تعریف ۱-۰-۱. زیر مدول L از M را کاملا پایا گوییم هرگاه L یک زیر مدول از S- مدول M باشد. از این پس $L \lneq_R^{f.i} M$ نشان دهنده این است که L یک زیر مدول سره کاملا پایا از M است.

تعریف ۱-۰-۲. R- مدول Mرا پایا یا دوو گوییم هرگاه هر R-زیر مدول M کاملا پایا باشد.

تعریف ۱-۰-۳. حلقه ی R را پایا چپ (راست) می گوییم هرگاه هر ایده آل چپ (راست) آن دو جانبه باشد و حلقه R را شبه پایا چپ (راست) می گوییم هرگاه هرایده آل ماکسیمال چپ (راست) آن دو جانبه باشد. همچنین حلقه R را (شبه) پایا گوییم هرگاه حلقه R (شبه) پایا راست و چپ باشد.

مثال ۱-۰-۴. فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد. اگر M یک R- مدول آرتینی و یونی سریال باشد آن گاه M یک R- مدول پایا است.

برهان. ر.ک ([۱۴], ۲-۱) □

قرارداد ۱-۰-۵. *فرض کنید M یک R- مدول باشد. با $L(M)$، خانواده ی تمام زیر مدول های M را نشان می دهیم. با $L^{f.i}(M)$، خانواده ی تمام زیر مدول های کاملا پایا M را نشان می دهیم. همچنین با $I(R)$، $I_l(R)$ و $I_r(R)$ به ترتیب خانواده ای از ایده آل های دو جانبه، چپ و راست را مشخص می کنیم.*

قرارداد ۱-۰-۶. *فرض کنیم که M یک R مدول و X، Y زیر مجموعه هایی از M و Z زیر مجموعه ای از R باشند. در این صورت قرار می دهیم :*

$$(X :_Z Y) := \{r \in Z | ry \in X \quad \forall y \in Y\}$$

$$(X :_Y Z) := \{m \in Y | zm \in X \quad \forall z \in Z\}$$

همچنین

$$ann_R(Y) := (\circ :_R Y), ann_M(Z) := (\circ :_M Z)$$

از جهت دیگر برای زیر مجموعه های غیر تهی $M \supseteq K$ و $S \supseteq I$ قرار می دهیم:

$$An(K) := (\circ :_S K), Ke(I) := (\circ :_M I)$$

بعلاوه

$$L_m(M) := \{IM | I \in I(R)\}\ ,\ L_c(M) := \{L \leq_R M | L = (\circ :_M (\circ :_R L))\}$$

تعریف ۱-۰-۷. آ) R- مدول M را خود انژکتیو گوییم هرگاه برای هر $K \leq_R M$ و هر $f \in Hom_R(K, M)$ یک R- هومورفیسم مانند $g : M \to M$ چنان موجود باشد که $g|_K = f$.

ب) R- مدول M را انژکتیو ذاتی گوییم هرگاه برای هر ایده آل راست متناهیا تولید شده I از S داشته باشیم

$$An(ke(I)) = I.$$

ج) فرض کنید U کلاسی از R- مدول ها باشد. R- مدول M را هم تولید شده توسط U گوییم هرگاه برای خانواده ای از مدول های مشمول در U مانند $\{N_i\}_{i\in I}$ مونومورفیسم

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$$

وجود داشته باشد.

د) R- مدول M را خود- هم مولد گوییم هرگاه R- مدول خارج قسمتی از M توسط M هم تولید شود.

قرارداد ۱-۰-۸. *فرض کنید M یک R- مدول باشد. با $Max(M)$ خانواده تمام زیر مدول های ماکسیمال $_RM$ را نشان می دهیم. با $Max^{f.i}(M)$ خانواده تمام (R,S)- دو زیر مدول های $_RM_S$ را نشان می دهیم. همچنین برای هر $L \leq_R M$، قرار می دهیم :*

$$M(L) := \{K \in Max(M) | L \subseteq K)\} \qquad M^{f.i}(L) := \{K \in Max^{f.i}(M) | L \subseteq K\}.$$

مثال ۱-۰-۹. فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت R-مدول های خود- هم تولید شده و خود- انژکتیو با حلقه اندومورفیسم ها مدول های پایا هستند.

برهان. ر.ک ([۱۷], ۱۶ − ۴۸) □

تعریف ۱-۰-۱۰. آ) R- زیر مدول L از M را کوچک یا غیر ضروری در M گوییم و می نویسیم $L \ll M$، هرگاه برای R- زیر مدول سره K از M، $M \neq (L + K)$.

ب) برای هر R- مدول M، $Rad(M)$ را بصورت

$$Rad(M) := \bigcap_{L \in Max(M)} L.$$

و در صورتی که $Max(M) = \varnothing$ آن را برابر با M تعریف می کنیم.

تبصره ۱-۰-۱۱. فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت

$$Rad(M) = \bigcap_{L \in Max(M)} L = \sum_{L \ll M} L.$$

برهان. ر.ک ([۸] ,۱۳ − ۹) □

تعریف ۱-۰-۱۲. R- مدول M را موضعی می گوییم هرگاه Mدارای زیر مدول سره ای باشد که هر زیر مدول سره از M را شامل شود، یا به عبارت دیگر

$$\sum_{L \lneqq M} L \neq M$$

تعریف ۱-۰-۱۳. R- مدول M را میان تهی یا هم یکنواخت گوییم هرگاه هر زیر مدول سره از M یک زیر مدول کوچک باشد، یعنی برای هر دو R- زیر مدول دلخواه $L_۱$ و $L_۲$ از M داشته باشیم $L_۱ + L_۲ \lneqq_R M$.

تعریف ۱-۰-۱۴. آ) R- مدول M را هم اتمی گوییم هرگاه هر زیر مدول سره از M در یک زیر مدول ماکسیمالی از M قرار بگیرد، به عبارت دیگر برای هر زیر مدول L از M داشته باشیم:

$$Rad(\frac{M}{L}) \neq \frac{M}{L}.$$

ب) R- مدول M را $f.i$- هم اتمی گوییم هرگاه برای هر $L \lneqq_R^{f.i} M$، داشته باشیم $M^{f.i}(L) \neq \varnothing$. یا به عبارت دیگر ${}_RM_S$ هم اتمی باشد.

تعریف ۱-۰-۱۵. فرض کنید M یک R- مدول باشد. خانواده ی تمام زیر مدول های ساده M را با $S(M)$ و خانواده ی احتمالا تهی از (R,S)- دو زیرمدول های ساده از ${}_RM_S$ را با $S_{f.i}(M)$ نشان می دهیم. همچنین برای $L \leq_R M$ قرار می دهیم:

$$S(L) := \{K \in S(M) | K \subseteq L\} \qquad \widehat{S}(L) := \{K \in S_{f.i}(M) | K \subseteq L\}$$

تعریف ۱-۰-۱۶. آ) زیر مدول L را اساسی یا بزرگ در M می نامیم و می نویسیم $L \trianglelefteq M$، هرگاه برای هر R- زیر مدول از M مانند K داشته باشیم $L \cap K \neq \varnothing$.

ب) سوکل R- مدول M را با $Soc(M)$ نشان داده و آن را به صورت

$$Soc(M) := \sum_{L \in S(M)} L.$$

تعریف می کنیم.

تبصره ۱-۰-۱۷. فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت

$$Soc(M) = \sum_{L \in S(M)} L = \bigcap_{L \trianglelefteq M} L.$$

برهان. ر.ک ([۸] ,۷ − ۹) $\square$

تعریف ۱-۰-۱۸. R- مدول M را هم موضعی گوییم هرگاه M شامل یک $R-$ زیر مدول کوچک ساده نا تهی باشد که در هر R- زیر مدول نا تهی از M قرار بگیرد یا به عبارت دیگر $\bigcap_{\circ \neq L \leq_R M} L \neq \circ$.

تعریف ۱-۰-۱۹. آ) R- مدول M را یکنواخت گوییم هرگاه برای هر دو R- زیر مدول غیر صفر از M مانند $L_۱$ و $L_۲$ داشته باشیم $L_۱ \cap L_۲ \neq \circ$، به عبارت دیگر هر R زیر مدول غیر صفر M، یک زیر مدول اساسی باشد.

ب) R-مدول M را اتمی گوییم هرگاه هر زیر مدول غیر صفر از M شامل یک زیر مدول ساده باشد. یا به عبارت دیگر برای هر $M \geq_R L \neq \circ$ داشته باشیم، $Soc(L) \neq \circ$.

تعریف ۱-۰-۲۰. آ) R- مدول M را نیم ساده گوییم هرگاه به ازای هر زیر مدول از M مانند K، زیر مدولی از M مانند L وجود داشته باشد که $M = K \oplus L$.

ب) R- مدول M را نیم ساده همگن گوییم هرگاه M برابر با جمع مستقیم زیر مدول های ساده یکریخت باشد.

مثال ۱-۰-۲۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. می دانیم که

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(\frac{۱}{p^n} + \mathbb{Z}) \subseteq \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

یک گروه آبلی و در نتیجه یک $\mathbb{Z}$- مدول است و هر زیر مدول سره از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به شکل $\mathbb{Z}(\frac{۱}{p^n} + \mathbb{Z})$ برای $n \in \mathbb{N}$ می باشد. به وضوح $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ آرتینی است اما نوتری نیست. به علاوه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یونی سریال می باشد که از آن نتیجه می شود میان تهی و یکنواخت است. در اینجا به این نکته دقت می کنیم که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ موضعی نیست ولی در عین حال هم موضعی می باشد.

تبصره ۱-۰-۲۲. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$- مدول پایا است.

برهان. هر زیر مدول سره از $\mathbb{Z}_p^\infty$ به صورت $G_n = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ برای یک $n \in \mathbb{N}$ است. برای اینکه نشان دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$- مدول پایا است کافی است نشان دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $f \in S = End_R(M)$، $f(G_n) \subseteq G_n$. برای این منظور فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f \in End_R(M)$ دلخواه باشند و

$$f(\frac{۱}{p^n} + \mathbb{Z}) = \frac{t}{p^m} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

می توان فرض کرد $(t,p)=1$. اکنون از $p^n f(\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z})=0$ نتیجه می گیریم که $\frac{tp^n}{p^m}+\mathbb{Z}=0$ پس $p^m|tp^n$.
چون $(t,p)=1$ لذا $p^m|p^n$ و بنابراین $m\leqslant n$. از این رو $G_m\subseteq G_n$. اما

$$f(\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z})=\frac{t}{p^m}+\mathbb{Z}\in G_m\subseteq G_n$$

□

نکته ۱-۰-۲۳. *مدول های میان تهی لزوما هم اتمی نیستند. (به عنوان مثال $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ مدولی میان تهی است که هم اتمی نمی باشد.)*

مثال ۱-۰-۲۴. فرض کنید M یک R- مدول یونی سریال باشد. در این صورت به وضوح M یک R- مدول میان تهی و یکنواخت است. بعلاوه مدول M موضعی (هم موضعی) است اگر وتنها اگر $Rad(M)\neq M$ ($Soc(_RM)\neq 0$).

برهان. فرض کنیم M موضعی است، در این صورت بدیهی است $Rad(M)\neq M$.
برعکس، فرض کنید $Rad(M)\neq M$. پس $Max(M)\neq\varnothing$. حال اگر $Max(M)$ دارای دو عضو N_1 و N_2 باشد، آن گاه با توجه به یونی سریال بودن M نتیجه می گیریم که، $N_1=N_2$. از این رو $Max(M)$ دارای یک عضو است. از طرفی اگر $Max(M)=\{N\}$ و $L\leq M$، در این صورت چون M یونی سریال است، پس $N\leq L$ یا $L\leq N$. اگر $N\leq L$، آن گاه $Mxa(M)=\{N\}$، نتیجه می دهد که $N=L$. پس $L\leq N$.
بنابراین R- مدول M موضعی است.

□

مثال ۱-۰-۲۵. آ) $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}$ یکنواخت است ولی اتمی نمی باشد. همچنین $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}$ هم اتمی است ولی میان تهی نیست.

ب) اگر $M=S_1\oplus S_2$ که در آن S_1 و S_2 مدول های ساده هستند، آن گاه $_RM$ هم اتمی است ولی میان تهی نمی باشد. چون S_1 و S_2 مدول های ساده هستند از این رو مجموعه زیر مدول های M برابر با $\{\{0\},S_1,S_2,S_1\oplus S_2\}$ می باشد. در این صورت بدیهی است که $_RM$ هم اتمی است اما میان تهی نیست.

تعریف ۱-۰-۲۶. آ) حلقه R را یک حلقه لوی چپ (راست) یا نیم آرتینی چپ (راست) گوییم هرگاه هر R -مدول چپ (راست) غیر صفر، شامل یک زیر مدول ساده باشد.

ب) حلقه R را یک حلقه بس چپ (راست) گوییم هرگاه هر R- مدول چپ (راست) غیر صفر، دارای یک زیر مدول ماکسیمال باشد.

نکته ۱-۰-۲۷. *برای هرحلقه R به طور مستقیم از تعریف می توان نتیجه گرفت که:*

آ) *حلقه R یک حلقه لوی چپ است اگر و تنها اگر هر R- مدول چپ غیر صفر، دارای سوکل اساسی باشد و این نیز برقرار است اگر وتنها اگر هر R - مدول چپ غیر صفر آن اتمی باشد.*

ب) *حلقه R یک حلقه بس چپ است اگر و تنها اگر هر R- مدول چپ غیر صفر، دارای رادیکال کوچک باشد و این نیز برقرار است اگر و تنها اگر هر R - مدول چپ غیر صفر آن هم اتمی باشد.*

برهان. آ) $(\Rightarrow)$ فرض کنید R یک حلقه لوی چپ باشد. همچنین فرض کنید M یک R- مدول و $0 \neq N \leq_R M$. بنا به تعریف حلقه لوی، N دارای یک زیر مدول ساده مانند N' است. از طرفی

$$N' \leq Soc(M) = \sum_{K \in S(M)} K$$

پس $Soc(M) \cap N \neq 0$. این نشان می دهد که $Soc(M)$ یک زیرمدول اساسی از M است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید که $Soc(M)$ یک زیر مدول اساسی از M باشد. فرض کنید $0 \neq N \leq M$، چون $Soc(M)$ اساسی است پس $N \cap Soc(M)$ شامل یک زیر مدول ساده است. از طرفی $N \cap Soc(M) \leq N$ پس N دارای یک زیر مدول ساده است. حال از تعریف حلقه لوی نتیجه می شود که حلقه R حلقه لوی است.

ب) $(\Rightarrow)$ فرض کنید حلقه R یک حلقه بس باشد. فرض کنید که M یک R مدول و $0 \neq N \leq M$، بنا به تعریف حلقه بس N دارای زیرمدول ماکسیمال مانند N' است. از طرفی

$$\bigcap_{K \in Max(M)} K = Rad(M) \leq N'$$

پس $Rad(M) + N \neq M$ و این نشان می دهد که $Rad(M)$ یک زیر مدول کوچک از M است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید که $Rad(M)$ یک زیرمدول کوچک از M باشد. فرض کنید $0 \neq N \leq M$، چون $Rad(M)$ کوچک است پس $N + Rad(M) \neq M$. از طرفی $N \leq N + Rad(M)$، پس N در یک زیر مدول ماکسیمال قرار دارد. حال از تعریف حلقه بس نتیجه می شود که حلقه R یک حلقه بس است.

□

تعریف ۱-۰-۲۸. آ) فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت R- مدول M را ضربی گوییم هرگاه برای هر زیر مدول آن مانند L ایده آل I متعلق به $I(R)$ وجود داشته باشد، به طوری که $L = IM$. به وضوح هر R- مدول ضربی یک مدول پایا می باشد.

ب) ایده آل I از R را ضربی گوییم هرگاه برای هر ایده آل مشمول در I مانند J، ایده آلی چون C از R وجود داشته باشد به طوری که $J = IC$

ج) حلقه R را حسابی گوییم هرگاه برای هر ایده آل ماکسیمال m از R حلقه کسری R_m با رابطه زیر مجموعه ای یک مجموعه مرتب کلی باشد.

تبصره ۱-۰-۲۹. R- مدول M ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول L از M داشته باشیم

$$L = (L :_R M)M.$$

برهان. فرض کنید M مدولی ضربی باشد، پس به ازای هر زیر مدول L از M ایده آل I از $I(R)$ وجود دارد به طوری که $L = IM$. از تساوی اخیر نتیجه می گیریم که $I \subseteq (L :_R M)$. ازاین رو

$$L = IM \subseteq (L :_R M)M \subseteq L$$

و در نتیجه $L = (L :_R M)M$.

اکنون فرض کنیم برای زیر مدول L از M داشته باشیم $L = (L :_R M)M$، آن گاه به وضوح R- مدول M ضربی است. □

لم ۱-۰-۳۰. *یک حلقه جابجایی R حسابی است اگر و تنها اگر هر ایده آل متناهیا تولید شده از R ضربی باشد.*

برهان. ر.ک ([۱۱]) □

تعریف ۱-۰-۳۱. آ) R- مدول M را هم ضربی گوییم هرگاه برای هر $L \leq_R M$ ایده آل I متعلق به $I(R)$ وجود داشته باشد به طوریکه $L = (\circ :_M I)$. (به عبارتی $L(M) = L_c(M)$)

ب) حلقه R را در صورتی که $(R_R)_R R$ یک مدول هم ضربی باشد حلقه دوگان چپ (دوگان راست) می گوییم. یک حلقه دوگان چپ و راست را یک حلقه دوگان گوییم.

تبصره ۱-۰-۳۲. فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت مدول M هم ضربی است اگر وتنها اگر برای هر زیر مدول L از M داشته باشیم: $L = (\circ :_M (\circ :_R L))$

برهان. فرض کنیم که M یک R- مدولی هم ضربی باشد، پس به ازای هر زیر مدول L از M وجود دارد ایده آل I از $I(R)$ به طوریکه $L = (\circ :_M I)$. از تساوی اخیر نتیجه می گیریم $I \subseteq ann_R(L)$. از این رو

$$(\circ :_M ann_R(L)) \subseteq (\circ :_M I) = L$$

از طرفی $L \subseteq (\circ :_M (\circ :_R L))$، لذا $L = (\circ :_M (\circ :_R L))$

حال اگر فرض کنیم که $L = (\circ :_M (\circ :_R L))$، آن گاه به وضوح M مدولی هم ضربی است. □

مثال ۱-۰-۳۳. فرض کنید حلقه R یک حلقه شبه پایا چپ باشد به طوریکه برای هر P از $Max(R)$ و هر I از $I(R)$ داشته باشیم $IP = PI$.

آ) فرض کنید M یک R- مدول هم ضربی باشد. در این صورت هر زیر مدول غیر صفر از M شامل یک زیر مدول مینیمال از M می باشد.

ب) هر R مدول چپ ضربی مدول هم اتمی است.

ج) هر R- مدول چپ هم ضربی مدول اتمی است.

برهان. آ) ر. ک ([۱۹]) .

ب) ر. ک ([۶]) . $\square$

قرارداد ۱-۰-۳۴. *آ) برای هر $L \in Max(M)$ تعریف می کنیم:*

$$L^e := \bigcap_{K\in Max(M)\setminus\{L\}} K$$

و در صورتی که $Max(M) = \{L\}$ آن را برابر با M تعریف می کنیم.

ب) برای هر $L \in S(M)$ تعریف می کنیم :

$$L_e := \sum_{K\in S(M)\setminus\{L\}} K$$

و در صورتی که $S(M) = \{L\}$ آن را برابر با صفر تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۰-۳۵. گوییم R- مدول M دارای خاصیت ماکسیمال کامل است اگر برای هر $L \in Max(M)$ داشته باشیم $L^e \nsubseteq L$. همچنین گوییم R- مدول M دارای خاصیت ماکسیمال است هرگاه برای هر L متعلق به $Max(M)$ و هر زیر مجموعه متناهی مانند A از $Max(M) \setminus \{L\}$ داشته باشیم $\bigcap_{K\in A} K \nsubseteq L$.

لم ۱-۰-۳۶. *اگر M یک R- مدول خود پروژکتیو و پایا باشد، آن گاه M دارای خاصیت ماکسیمال کامل است.*

برهان. ر.ک ([۱],۱۵ − ۳). $\square$

تعریف ۱-۰-۳۷. گوییم R- مدول M دارای خاصیت مینیمال است اگر برای هر R- زیرمدول ساده از M مانند L داشته باشیم $L \nsubseteq L_e$. از آنجا که مدول های ساده دوری هستند M دارای خاصیت مینیمال است هرگاه برای هر زیر مدول L از M و هر زیر مجموعه متناهی $\{L_1, L_2, \dots L_n\} \subseteq S(M) \setminus \{L\}$ داشته باشیم، $L \nsubseteq \sum_{i=1}^{n} L_i$.

لم ۱-۰-۳۸. *اگر R- مدول M خود انژکتیو و پایا باشد، آن گاه مدول M دارای خاصیت مینیمال است.*

برهان. ر.ک ([۲] ,۱۷ − ۳). □

قضیه ۱-۰-۳۹ (*قانون مدولی*). *فرض کنید که H و L و K زیر مدول های R- مدول M باشند به طوریکه $H \leq K$، در این صورت داریم:*

$$K + (H \cap L) = H \cap (K + L)$$

برهان. چون $K \leq H$ و $K \leq (K + L)$ پس $K \leq H \cap (K + L)$. از طرفی $H \cap L \leq H \cap (K + L)$ لذا $K + (H \cap L) \leq H \cap (K + L)$.

اکنون فرض کنید x متعلق به $H \cap (K + L)$ دلخواه باشد، آن گاه a و b به ترتیب متعلق به K و L چنان موجودند که $x = a + b$. چون x, a متعلق به H می باشند و $x - a = b \in L$ است پس $x - a \in H \cap L$ است اما $x = a + (x - a)$ که $a \in K$ و $x - a \in H \cap L$ است پس $x \in K + (H)$. بنابراین $H \cap (K + L) \leq K + (H \cap L)$ این نیز نشان می دهد که حکم برقرار است. □

تعریف ۱-۰-۴۰. آ) ایده آل I از حلقه R را اول گوییم هرگاه $I \neq R$ و برای هر دو ایده آل J و J' از R از $JJ' \subseteq I$ نتیجه شود که $J \subseteq I$ یا $J' \subseteq I$.

ب) ایده آل I از حلقه R را به طور کامل اول گوییم هرگاه $I \neq R$ و برای هر a, b متعلق به R که $ab \in I$ باشد داشته باشیم $a \in I$ یا $b \in I$.

ج) حلقه R را اول گوییم هرگاه ایده آل صفر آن یک ایده آل اول باشد.

لم ۱-۰-۴۱. *برای هر زیر مدول K از M داریم:*

$$Ann_R(K)Ann_R(\frac{M}{K}) \subseteq Ann_R(M) \qquad (۱-۱)$$

برهان. فرض کنید$x \in Ann_R(K)$ و $y \in Ann_R(\frac{M}{K})$. از این رو $yM \subseteq K$ و در نتیجه

$$x(yM) \subseteq xK = ۰$$

پس $xy \in Ann_R(M)$.

□

تعریف ۱-۰-۴۲. R- مدول M را اول گوییم هرگاه برای هر زیر مدول کاملا پایا از M مانند K داشته باشیم $Ann_R(M) = Ann_R(K)$.

لم ۱-۰-۴۳. *برای R - مدول M گزاره های زیر معادلند:*

آ) M یک R - مدول اول است.

ب) برای هر زیر مدول سره K از M داریم: $Ann_R(K) = Ann_R(M)$

ج) برای هر زیر مدول سره K از M، $\frac{R}{Ann_R(M)}$ هم تولید شده بوسیله K است.

د) برای هر زیر مدول کاملا پایا K از M، $\frac{R}{Ann_R(M)}$ هم تولید شده بوسیله K است.

برهان. ر.ک ([۱۶]). □

تعریف ۱-۰-۴۴. آ) R مدول M را هموار گوییم هرگاه به ازای هر همریختی یک به یک $f : N' \longrightarrow N$ همریختی

$$f \otimes 1_M : N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M$$

نیز یک همریختی یک به یک باشد.

ب) R- مدول M را با وفا گوییم هرگاه $ann_R(M) = 0$

۱-۱ فضاهای توپولوژیکی

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم که X مجموعه ای ناتهی و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد به طوری که

آ) $X, \phi \in \tau$

ب) اجتماع اعضای هر زیر گردایه ی τ متعلق به τ است.

ج) اشتراک هر زیر گردایه متناهی τ متعلق به τ است.

در این صورت τ را یک توپولوژی برX و (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می گوییم. هر عضو $A \in \tau$ را نیز یک مجموعه باز از این فضای توپولوژی می گوییم.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنیم که (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد، منظور از یک پایه برای توپولوژی τ یک زیر مجموعه ای مثل B از τ است به طوری که هر مجموعه ناتهی باز از X اجتماعی از اعضای آن باشد. به عبارت دیگر برای هر مجموعه باز و ناتهی G از X داشته باشیم

$$\forall x \in G \quad \exists B_1 \in B \ : \ x \in B_1 \subseteq G$$

لم ۱-۱-۳. *فرض کنید X فضای توپولوژی و B زیر مجموعه ای از مجموعه توانی X باشد، در این صورت B را یک پایه برای توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:*

آ) $\bigcup_{A\in B} = X$

ب) برای هر $B_۱$ و $B_۲$ از B و هر $x \in B_۱ \cap B_۲$

$$\exists B_۳ \in B; x \in B_۳ \subseteq B_۱ \cap B_۲$$

برهان. فرض کنید B یک پایه برای فضای توپولوژی X باشد. در این صورت به وضوح شرایط (آ) و (ب) بوضوح برقرار است.

برعکس: فرض کنید زیر مجموعه ای از مجموعه توانی X مانند B در شرط های (آ) و (ب) صدق کند. قرار دهید

$$\tau = \{G \subseteq X; G = \bigcup_{i\in I} B_i, \{B_i; i \in I\} \subseteq B\} \cup \{\varnothing\}$$

۱) نشان می دهیم τ یک توپولوژی روی X است.

۲) B یک پایه برای τ است.

اثبات ۱): بنابر فرض و تعریف τ، $\varnothing, \tau \in \tau$. از آنجا که هر عضو τ به صورت اجتماعی از اعضای B است، لذا اجتماع هر تعداد از اعضای τ دوباره به صورت اجتماعی از اعضای B است. برای اثبات شرط سوم در تعریف توپولوژی، کافیست ثابت کنیم که اشتراک هر دو عضو τ عنصری در τ است. فرض کنیم $\{B_i; i \in I\}$ و $\{B_j; j \in I\}$ دو خانواده از اعضای B باشد و

$$x \in \bigcup_{i\in I} B_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j.$$

عناصر i و j به ترتیب از I و J وجود دارند که $x \in B_i \cap B_j$. بنابه فرض $B_۳ \in B$ وجود دارد که

$$x \in B_۳ \subseteq B_i \cap B_j.$$

به سادگی دیده می شود که $\bigcup_{i\in I} B_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j$ به صورت اجتماعی از اعضای B است.

اثبات ۲): B یک پایه برای τ است، زیرا بدیهی است که

$$\forall A \in B; A \in \tau$$

و همچنین

$$\forall G \in \tau\, \exists\{B_i\}_{i\in I} \in B\,; G = \bigcup_{i\in I} B_i$$

$\square$

تعریف ۱-۱-۴. یک فضای توپولوژیکی را فشرده (به طور شمارافشرده) گوییم هرگاه هر پوشش باز X شامل یک زیر پوشش متناهی (شمارا) باشد.

فضای (X, τ) را یک فضای لیندلف گوییم هرگاه هر پوشش باز برای X یک زیر پوشش شمارا داشته باشد.