وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

زیر خمینه های معین کنتاکت فضا فرم های مختلط

استاد راهنما
دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور
دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر
احد متقی فرد

شهریورماه ۱۳۹۱
تبریز - ایران

بسم الله الرّحمن الرّحیم

تقدیم به

عمویم

و آنهایی که به من جرات زندگی و دانستن دادند

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید. و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است.

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.
اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی سپاس گزاری نمایم همانا اگر راهنمایی های دلسوزانه ایشان نبود هرگز موفق به اتمام این پایان نامه نمی شدم.
از جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر فرضعلی ایزدی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.همچنین بر خود واجب می دانم از آقای دکتر ستاری و آقای دکتر ایلمکچی به خاطر راهنمای هایشان قدردان باشم.
و سلام می فرستم بر روح بزرگوار مادر بزرگم که همواره دعای خیرش را کنار خویش حس می کنم و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر و عموی عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم و از همه دوستان و همکلاسی هایم که همیار من بودند تقدیر و تشکر می کنم.

احد متقی فرد

شهریورماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه به بررسی نظریه هندسه دیفرانسیل زیرخمینه های حقیقی m بعدی M از فضا فرم $\overline{M}$ ، پرداخته ایم که زیر فضای مماس هوامورفیک مماس از بعد ماکزیمال $(n-۱)$ خواهد بود.

در این خمینه ها یک ساختار تقریبا کنتاکت φ به طور طبیعی از فضای زمینه القا می شود. با استفاده از شرط معین روی ساختار تقریبا کنتاکت φ که آن را تبدیل به ساختار کنتاکت می کند و همچنین شرط معین روی فرم اساسی دوم h به یک کلاس بندی جدید از این چنین زیرخمینه ها پرداخته ایم.

در این پایان‌نامه، همچنین یک دسته بندی تازه از فضاهای مدل که به لیست تاکاکی معروف است ،ارائه شده است.

کلمات کلیدی: زیرخمینه های کشی-ریمان، فضافرم مختلط، فرم اساسی دوم، خمینه متری تقریبا کنتاکت، خمینه متری کنتاکت.

پیشگفتار

مطالعه ابررویه های حقیقی خمینه های کاهلری نقش بسیار مهمی در هندسه زیر خمینه ها دارد. بخصوص اگر فضای زمینه یک فضافرم مختلط باشد این اهمیت به مراتب بیشتر می شود.یکی از اولین نتایج این روش که در [۲۷] به تفصیل به آن پرداخته شده است این است که هر ابررویه حقیقی M از یک فضافرم مختلط $\overline{M}(c)$ با خمیدگی هولمورفیک $c \neq 0$ تماما نافی نمی باشد. این یک نتیجه مستقیم از معادله کلاسیک کودازی برای هر ابررویه می باشد.کان در [۱۶] نشان داده است که هیچ ایرروبه انیشتینی در $\overline{M}(c)$ برای $c > 0$ وجود ندارد و منتیل در [۲۵] نشان داده که برای $c < 0$ هیچ ابررویه انیشتینی در $\overline{M}(c)$ وجود ندارد.بنابراین مسئله ای که به وجود می آید در مورد توصیف هندسه دیفرانسیل ابررویه های فضا فرم های مختلط برای $c \neq 0$ می باشد.

این مسئله تا حدودی به پاسخ های رسیده است به عنوان مثال لاوسون در [۷] نظریه تعمیم دوایر عظیمه $M^c_{p,q}$ در فضاتصویر مختلط را ارائه کرده است که تعمیمی از دوایر عظیمه کره ها می باشد. ایده فوق از کلاف دایره ای حول یک ابرروبه حقیقی شکل یافته است که سازگار با تار هاف می باشد. این نظریه به نظریه $M^c_{p,q}$ لاوسون نیز معروف است.همچنین مطالعه ابررویه های فضا فرم های مختلط موجب یافتن شرایط لازم برای تبدیل یک ابررویه به یکی از فضاهای استاندارد می شود.برای مثال تاکاگی در [۲۲] و [۲۳] ابررویه های کنتاکت در فضاتصویر مختلط با ۲ یا ۳ خمیدگی اصلی به طور کامل دسته بندی نموده است و منتیل در ۲۵] کلاسبندی کاملی از ابررویه های حقیقی فضای هیپربولیک مختلط ارائه کرده است. در این پایان نامه در فصل ۳ به برخی از این نوع ابررویه ها اشاره خواهد شد و در فصل ۴ این پایان نامه دسته بندی های جدیدی از مثال های مختلف ارائه خواهد شد.

علاوه بر این سوالی که پیش می آید این است که چه زمانی یک ابررویه حقیقی از یک فضا فرم مختلط کنتاکت می شود؟ هیچ تحقیقی در مورد ابررویه های حقیقی فضای اقلیدسی [۱۴] ،فضای

تصویر مختلط [۱۶] و فضای هیبربولیک مختلط [۱۵] به موفقیت کامل نرسیده است. اوکومورا رابطه جبری $A\varphi + \varphi A = ۲A\rho$ (A عملگر شکل و ρ ثابت) در [۱۸] ارائه کرده است.

یکی از هدف های این پایان نامه تعمیم مسئله با مطالعه زیر خمینه های کشی-ریمان از بعد ماکزیمال CR می باشد.

a

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه هندسه ریمانی

تعریف ۱.۱.۱. یک متر ریمانی روی خمینه هموار M عبارت است از یک$(۲\,,\,۰)$ میدان تانسوری g به طوریکه متقارن $(g(X,Y)=g(Y,X))$ و مثبت معین $(X \neq ۰ \Rightarrow g(X,X) > ۰)$ باشد.

تعریف ۲.۱.۱. خمینه هموار M مجهز به متر ریمانی g را یک خمینه ریمانی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متر g باشد. یک التصاق منحصر به فرد ∇ روی M وجود دارد به طوریکه

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad \text{(متقارن)}$$
$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M)$$

این التصاق را التصاق لوی سیویتا می نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه ریمانی همراه با التصاق لوی سیویتا ∇ باشد. در این صورت تانسور انحنای ریمانی R به صورت زیر تعریف میشود:

$$R : \chi(M)^۳ \to \chi(M)$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

R یک $(۱,۳)$ میدان تانسوری روی M می باشد و اگر $x, y \in T_pM$ باشد عملگر خطی

$$R_{xy} : T_pM \to T_pM$$
$$z \to R_{xy}z$$

را عملگر خمیدگی می نامیم به طوریکه در تقارن های زیر صدق میکند:

۱- $R_{xy} = -R_{yx}$

۲- $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y$ (اتحاد اول بیانچی)

تعریف ۵.۱.۱. یک التصاق ∇ روی خمینه هموار M عبارت است از نگاشت :

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

به طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

۱- نسبت به X ، $C^\infty(M)$ خطی باشد یعنی

$$\forall f \in C^\infty \quad \nabla_{fX_۱+X_۲}Y = f\nabla_{X_۱}Y + \nabla_{X_۲}Y$$

۲- نسبت به Y ، $\mathbb{R}$ خطی باشد یعنی

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \nabla_X \alpha Y_۱ + Y_۲ = \alpha\nabla_X Y_۱ + \nabla_X Y_۲$$

۳- $\forall X, Y \in \chi(M) \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار و π یک زیر فضای دو بعدی از فضای مماس T_pM باشد به طوریکه π توسط میدان های برداری X, Y تولید می شود در این صورت انحنای برشی M نسبت به πدر نقطه p عبارت است از:

$$K(X, Y) = \frac{(g(X,Y)Y, X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^۲}$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی و M یک زیر خمینه آن باشد. در این صورت التصاق قائم M به صورت زیر تعریف میشود :

$$\nabla^\perp : \ \chi(M) \times \chi(M)^\perp \to \chi(M)^\perp$$
$$\nabla^\perp_X Z = nor\overline{\nabla}_X Z \quad X \in \chi(M), Z \in \chi(M)^\perp$$

به طوریکه $\overline{\nabla}$التصاق ریمانی $\overline{M}$ میباشد.

تعریف ۸.۱.۱. انحنای قائم $R^{\perp}$ زیر خمینه M در خمینه $\overline{M}$ عبارت است از :

$$R^{\perp}:\ \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)^{\perp}\to\chi(M)^{\perp}$$
$$R^{\perp}(X,Y)\xi=\nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi-\nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi-\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\overline{M}$ یک خمینه ریمانی با التصاق ریمانی $\overline{\nabla}$ باشد و M یک زیر خمینه $\overline{M}$ باشد. در این صورت نگاشت :

$$h:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)^{\perp}$$
$$h(X,Y)=nor\overline{\nabla}_{X}Y\quad\forall X,Y\in\chi(M)$$

را فرم اساسی دوم M مینامیم به طوریکه h دو خطی و متقارن است.

تعریف ۱۰.۱.۱. عملگر شکل زیر خمینه M متناظر با میدان برداری قائم واحد ξ در خمینه $\overline{M}$ یک (۱, ۱) میدان تانسوری A_{ξ} روی M می باشد به طوریکه : $g(A_{\xi}X,Y)=g(h(X,Y),\xi)$ به وضوح A یک عملگر خطی و متقارن است.

تعریف ۱۱.۱.۱. ژئودزیک یک خمینه ریمانیM خم $\gamma\ :\ I\ \to\ M$ هست بطوریکه میدان γ' موازی باشد و این هم ارز این مطلب هست که ژئودزیک خمی با شتاب صفر هست بعبارت دیگر $\gamma''=0$

تعریف ۱۲.۱.۱. زیر خمینه M در $\overline{M}$ را یک زیر خمینه تماماً ژئودزیک $\overline{M}$ گوئیم هر گاه هر ژئودزیک M یک ژئودزیک $\overline{M}$ نیز باشد.

قضیه ۱.۱.۱. *زیر خمینه M تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر فرم اساسی دوم h متحد با صفر باشد.*

نتیجه ۱.۱.۱. *زیر خمینه M تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر به ازای هر $\xi\in T(M)^{\perp}$ داشته باشیم $A_{\xi}=0$.*

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید M یک زیر خمینه n -بعدی از خمینه $n+p$ بعدی $\overline{M}$ باشد. هرگاه $\xi_1, \cdots, \xi_p$ یک کنج یکه متعامد برای کلاف عمود $TM^{\perp}$ باشد و به ازای هر $X \in TM$ داشته باشیم $A_a X = \rho_a x$ که در آن A_a عملگر شکل مرتبط با ξ_a و ρ_a تابعی روی M است ، آنگاه M را زیر خمینه تماماً نافی گوئیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید R تانسور خمیدگی ریمانی M باشد. تانسور خمیدگی ریچی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

تعریف ۱.۱.۱۵. خمیته ریمانی M با متر ریمانی g را خمیته انیشتینی گویند هرگاه برای مقدار ثابت λ داشته باشیم

$$Ric = \lambda g$$

۱.۲ تعاریف اولیه هندسه مختلط

تعریف ۱.۲.۱. خمینه دیفرانسیل پذیر $2n$-بعدی M را یک خمینه تقریباً مختلط می نامیم هر گاه یک $(1,1)$ میدان تانسوری J روی M موجود باشد به طوریکه $J^2 = -id$. در این صورت J را ساختار تقریباً مختلط گوئیم.

قضیه ۱.۲.۱. *هر خمینه تقریباً مختلط دارای بعد زوج است.*

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید (M,J) یک خمینه تقریباً مختلط باشد. در این صورت میدان تانسوری تاب وابسته به ساختار تقریباً مختلط J به صورت زیر تعریف می شود:

$$N : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$N(X,Y) = J[X,Y] - J[JX,JY] - [JX,Y] - [X,JY]$$

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید (M,J) یک خمینه تقریباً مختلط باشد. متر هرمیتی روی خمینه (M,J) یک متر ریمانی است که نسبت به J ، پایا باشد یعنی برای هر $X,Y \in T(M)$ داریم :

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

لذا نتیجه میشود J پاد متقارن است.

تعریف ۴.۲.۱. خمینه تقریباً مختلط (M,J) را با متر هرمیتی g خمینه تقریباً هرمیتی گوئیم و خمینه تقریباً هرمیتی (M,J,g) را خمینه هرمیتی گوئیم هرگاه J انتگرال پذیر باشد یعنی اگر تانسور تاب متحد با صفر باشد.

قضیه ۲.۲.۱. *ساختار تقریباً هرمیتی J روی خمینه M انتگرال پذیر است اگر وتنها اگر تانسور تاب وابسته به J متحد با صفر باشد.*

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید (M,J,g) یک خمینه تقریباً هرمیتی باشد. میدان تانسوری Ω به صورت $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$ یک ۲-فرم روی M تعریف میکند که آن را ۲-فرم اساسی ساختار تقریباً هرمیتی (M,J,g) یا کاهلر فرم M می نامیم.
Ω یک میدان تانسوری پاد متقارن است:

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY) = g(JX,J^2Y) = -g(JX,Y) = -\Omega(Y,X)$$

و نیز تحت J پایاست:

$$\Omega(JX,JY) = g(JX,J^2Y) = g(J^2X,J^3Y) = g(X,JY) = \Omega(X,Y)$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید M یک زیر خمینه n-بعدی از خمینه $n+p$ بعدی $\overline{M}$ باشد. در این صورت میدان برداری $\mu = \frac{1}{n}(\sum_{a=1}^{p}(traceA_a)\xi_a)$ را میدان برداری خمیدگی متوسط گوئیم

تعریف ۷.۲.۱. نقطه $x \in M$ را نقطه مینیمال M گوئیم هرگاه میدان برداری خمیدگی متوسط μ در نقطه $x \in M$ متحد با صفر باشد. اگر μ روی M برابر با صفر باشد در این صورت M را یک زیر خمینه مینیمال می نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $(\overline{M},J,\overline{g})$ یک خمینه هرمیتی از بعد $2m$ باشد و فرض میکنیم Ω کاهلر فرم متناظر با J باشد. خمینه $\overline{M}$ را یک خمینه کاهلری گوئیم هرگاه $d\Omega = 0$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $(\overline{M},J,\overline{g})$یک خمینه هرمیتی باشد. زیر خمینه ریمانی M به طور ایزومتری غوطه ور در $\overline{M}$ را یک زیر خمینه کشی-ریمان یا به اختصار CR -زیر خمینه می نامیم هرگاه توزیعی دیفرانسیل پذیر مانند D روی M چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم:

$$J_xD_x = D_x \quad , \quad J_xD_x^{\perp} \subset T_x^{\perp}M$$

تعریف ۱۰.۲.۱. زیر خمینه کشی-ریمان Mرا یک زیر خمینه هولومرفیک گوئیم هرگاه $dimD^{\perp} = 0$ و زیر خمینه را تماماً حقیقی گوئیم هرگاه $dimD = 0$.

تعریف ۱۱.۲.۱. خمینه کاهلری M را یک فضا فرم گویند اگر دارای خمیدگی مقطعی هولومرفیک ثابت باشد.

۳.۱ خمینه های کنتاکت

تعریف ۱.۳.۱. یک خمینه دیفرانسیل پذیر M^{2m+1} را دارای یک ساختار تقریباً کنتاکت گوییم ، هر گاه یک میدان برداری ξ و یک $1-$ فرم ηو یک $(1,1)$تانسور میدان φ موجود باشد بطوریکه

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 = -I + (\eta \otimes \xi)$$

خمینه M را تقریبا کنتاکت گویند و به صورت (M, ξ, η, φ) نمایش می دهند.

قضیه ۱.۳.۱. *فرض کنید M^{2n+1} دارای ساختار تقریبا کنتاکت (φ, ξ, η) باشد آنگاه $\varphi\xi = 0$ و $\eta o \varphi = 0$ می باشد همچنین اندومورفیسم φ از مرتبه $2n$ است.*

برهان. با توجه به تعریف ساختار تقریبا کنتاکت و با استفاده از اینکه $\eta(\xi) = 1$ و $\varphi^2 = -I + (\eta \otimes \xi)$ خواهیم داشت:

$$\varphi^2\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = 0$$

لذا $\varphi\xi = 0$ یا $\varphi\xi$ یک بردار ویژه از φ با مقدار ویژه صفر می باشد. با استفاده دوباره از $\varphi^2 = -I + (\eta \otimes \xi)$ داریم:

$$0 = \varphi^2\varphi\xi = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

بعبارت دیگر داریم:

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi$$

حال اگر $\varphi\xi$ یک بردار ویژه غیرتهی با مقدار ویژه صفر باشد در این صورت داریم:

$$\eta(\varphi\xi) \neq ۰$$

بنابر این

$$۰ = \varphi^۲\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi = (\eta(\varphi\xi))^۲\xi \neq ۰$$

که یک تناقض است لذا

$$\varphi\xi = ۰$$

حال چون $\varphi\xi = ۰$ و $\varphi^۲ = -I + (\eta \otimes \xi)$ لذا برای تمام میدانهای برداری Xخواهیم داشت

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^۳ X + \varphi X = -\varphi X + \varphi(\eta(X)\xi) + \varphi X = ۰$$

لذا نتیجه می شود:

$$\eta o \varphi = ۰$$

در نهایت چون $\varphi\xi = ۰$ و $\xi \neq ۰$ لذا $rank\varphi \leq ۲n$. اگر یک میدان برداری $\overline{\xi}$ موجود باشد نتیجه می شود

$$۰ = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi$$

در نتیجه $\overline{\xi}$ متناسب با ξ می باشد لذا $rank(\varphi) = ۲n$ □

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید که $(M^{۲n+۱}, g)$ یک خمینه ریمانی با ساختار تقریبا کنتاکت (φ, ξ, η) باشد. $(M^{۲n+۱}, g, \varphi, \xi, \eta)$ را یک خمینه تقریبا کنتاکت متری گوئیم هرگاه

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

در اینصورت به وضوح داریم:

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

تعریف ۳.۳.۱. اگر $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ یک خمینه متری تقریبا کنتاکت باشد، ۲-فرم ϕ روی M تعریف شده بصورت

$$\phi(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$$

را ۲-فرم اساسی یا فرم ساساکی می نامند.

تعریف ۴.۳.۱. خمینه هموار M^{2m+1} خمینه کنتاکت نامیده می شود هرگاه یک ۱-فرم سرتاسری η روی M چنان موجود باشد که:

$$\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$$

قضیه ۲.۳.۱. [۶] *فرض کنید M^{2n+1} یک خمینه دیفرانسیل پذیر مجهز به یک ۱-فرم سرتاسری η و یک ۲-فرم سرتاسری ϕ باشد که $\eta \wedge \phi^n \neq 0$ آنگاه M^{2n+1} مجهز به یک ساختار تقریبا کنتاکت می باشد. اگر M^{2n+1} یک خمینه کنتاکت با فرم کنتاکت η باشد. آنگاه یک ساختار متری تقریبا کنتاکت (φ, ξ, η, g) با η مشابه موجود است بطوریکه فرم اساسی بصورت $\phi = d\eta$ می باشد.*

فصل ۲

ابر رویه های فضا فرم های مختلط و ساختار تقریبا کنتاکت القایی

چون در این پایان نامه تعدادی از نتایج نظریه ابر رویه های حقیقی فضافرم های مختلط مورد استفاده قرار می گیرد و از آن جایی که ابر رویه حقیقی یک خمینه تقریبا هرمیتی مثال برجسته ای از زیر خمینه های کشی ریمان با بعد ماکزیمال CR است ، در این فصل تعدادی از تعاریف اساسی و نتایج لازم در ابر رویه های حقیقی فضا فرم های مختلط را بیان می کنیم.

۱.۲ ابر رویه های خمینه کاهلری با ساختار تقریبا کنتاکت القایی

فرض کنید $\overline{M}(c)$ یک خمینه کاهلری با خمیدگی هولومرفیک ثابت ۴c و بعد مختلط m و با ساختار تقریبا مختلط J و التصاق لیوی سویتا $\overline{\nabla}$ باشد و $i : M^{2n-1} \to M$ خمینه نشانده شده با التصاق لیوی سویتا ∇ از متر القای g و عملگر شکل A باشد در این صورت:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\xi$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -AX$$

که در آن ξ یک میدان برداری قائم واحد موضعی می باشد.حال یک $(1, 1)$ میدان تانسوری φ به صورت زیر روی M در نظر می گیریم