تقدیم

به نام حضرت دوست که نخستین معلم انسان اوست. به نام او که عشق را آفرید تا هستی طفیل آن باشد و علم مزین به آن.

و اکنون به مصداق « لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق »، با زبان الکن واژه‌ها، کسانی را می‌ستایم که به حق شایسته ستودن‌اند و این چکیده‌ای را که بی‌تردید حاصل شکیبایی این خوبان است، پیشکش می‌نمایم به محضر مقدسشان اگر قابل باشد...

به اسوه راستی و درستی که پیوسته از جان به جای نان، برایم مایه گذاشت و به من آموخت که جز به جمال کبریایی حضرت حق سر سجود فرود نیاورم، به

.. پدرم

به فرشته مهربانی که گستره بال‌هایش وسعت هر دو جهان است و از صدایش بوی بهشت می‌شنوم، قامتی که بادهای ناموافق روزگار هرگز پای ایمانش را سست نکرد و اگرچه خمید، ایستادن را به من آموخت، به

.. مادرم

تشکر و قدردانی

سپاس و آفرین خدای کامران و کامگار و آفریننده زمین و آسمان راست. او که همیشه بوده و همیشه هست و چون به خرد نگاه کنی بدانی که آفرینش او بر هستی گواه است. خدای رحیمی که نعمت‌هایش بر بندگان گسترده و لطف و مهربانی‌اش تمام موجودات را دربرگرفته است. خداوندی که یاری‌ام کرد تا در عبور از جاده پرفراز و نشیب زندگی تن به جهل و ظلمت نسپارم و در سایه‌سار علم و اندیشه تنفس کنم.

لازم و شایسته است که از استاد راهنمای بزرگوارم **جناب آقای دکتر فرشید میزرائی** که راهنمایی‌های خردمندانه‌ی ایشان در انجام این پایان‌نامه همواره دریچه تازه‌ای را به رویم گشوده است، قدردانی کنم.

همچنین وظیفه خویش می‌دانم به اساتید بزرگوار **جناب آقای دکتر حمید اسمعیلی** و **جناب آقای دکتر بهمن حیاتی** که ساعاتی از وقت گرانبهای خود را در اختیار این‌جانب قرار داده و این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار دادند مراتب سپاس و تشکر خویش را تقدیم دارم.

همچنین از **جناب آقای دکتر مهدی رضائی صامتی** نماینده‌ی محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه، که قبول زحمت نموده‌اند و در جلسه دفاع بنده شرکت نمودند و **جناب آقای شهرام مهری** سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان از زحمات بی‌دریغ و خالصانه **خانواده عزیزم** کمال تشکر و قدردانی را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: موسوی	نام: صفیه
عنوان پایان نامه: حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش تاو	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر–گروه ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: آذر ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۱۵۴	
کلید واژه: معادلات انتگرال فردهلم، معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم، معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترا، روش تاو، چندجمله‌ای تقریب	

چکیده:

در این پایان نامه روش تاو محاسباتی را برای حل عددی معادلات انتگرال – دیفرانسیل بیان می‌کنیم. در روش تاو محاسباتی در پایه استاندارد $\underline{X} = [1, x, x^2, ...]^T$ به دنبال جوابی به صورت $y_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ هستیم. یعنی روش تاو، جواب مسأله معادله انتگرال – دیفرانسیل را به صورت یک چندجمله‌ای تقریب می‌زند که n درجه چندجمله‌ای تقریب را مشخص می‌کند. فرض می‌شود ضرایب عملگر دیفرانسیل و طرف دوم معادله انتگرال – دیفرانسیل و نیز هسته معادله انتگرال – دیفرانسیل چندجمله‌ای باشند و اگر ضریبی چندجمله‌ای نبود ابتدا آن ضریب را با چندجمله‌ای مناسب از درجه n تقریب می‌زنیم و سپس معادله را حل می‌کنیم.

روش تاو محاسباتی بر این اساس استوار است که معادله انتگرال – دیفرانسیل همراه با شرایط تکمیلی را به یک دستگاه معادلات جبری به صورت $\underline{\underline{a}} G_n = g_n$ تبدیل می‌کند که با حل این دستگاه معادلات، بردار ضرایب مجهول $\underline{\underline{a}} = [a_0, a_1, ..., a_n]$ بدست می‌آید و لذا جواب تقریبی مسأله مشخص می‌شود.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

مقدمه

معادلات انتگرال و معادلات انتگرال $-$ دیفرانسیل در بسیاری از مسائل علوم مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند، بعضی از مسائل در یک روش خیلی طبیعی دارای مدل ریاضی به صورت معادلات انتگرال هستند.

البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل نیز به کار می‌روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله انتگرال حاصل، یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

به عنوان مثال از مسائلی که مستقیماً به صورت معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه بیان می‌شوند، می‌توان جریان سریع و غیر عادی در نرخ رشد جمعیت را نام برد.

از مسائلی که مستقیماً به صورت معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی بیان می‌شوند، می‌توان به جمعیت افراد یک جامعه اشاره کرد، زیرا که جمعیت افراد $u(t)$ در لحظه t از زمان به کسری از جمعیت اولیه که به سن t می‌رسند و به تعداد افراد متولد شده در بازه زمانی $0 < \tau < t$ که به سن $t - \tau$ میرسند بستگی دارد که باید همه آنها با هم جمع شوند، پس جمعیت افراد جامعه را می‌توان در یک معادله انتگرال در زیر علامت انتگرال جمع کرد [۲۹].

در بعضی از مسائل علاوه بر علامت انتگرال، مشتقات تابع مجهول نیز ظاهر می‌شود که این نوع معادله هیبریدی را معادله انتگرال $-$ دیفرانسیل می‌گویند [۳۷].

چون امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات انتگرال وجود ندارد و یا در صورت امکان خیلی مشکل و پیچیده می‌باشد، لذا به حل عددی رو می‌آوریم که همواره با نوعی از خطا همراه می‌باشد. البته از بین روش‌های عددی روشی بهترین جواب را به دست می‌دهد که کمترین مقدار خطا را داشته باشد.

بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسأله‌ای ظاهر شود، تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب آن‌ها به کار برده می‌شود.

در دهه‌های اخیر استفاده از توابع متعامد پیوسته (چندجمله‌ای‌های لژاندر[۱] ، چبیشف [۲] ، لاگور [۳] ، و هرمیت [۴])، توابع متعامد سینوسی و کسینوسی و توابع تکه‌ای پیوسته ثابت (بلاک پالس، والش [۵] و هار [۶]) جهت حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرال – دیفرانسیل توجه خاصی را بین محققان ایجاد نموده است. ویژگی اصلی این تکنیک‌ها، آن است که معادلات انتگرال را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کند. معادلات انتگرال – دیفرانسیل در اوایل سال ۱۹۰۰ به وسیله ولترا [۷] معرفی شد [۳۶]. ولترا در حال بررسی پدیده رشد و تأثیر وراثت بود که با این معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آن‌ها انتخاب نمود. این معادلات در بسیاری از رشته‌های علوم مهندسی و حتی مسائل زیست شناسی ظاهر می‌شوند.

در سال ۱۹۳۸ لانکزوس [۸] [۱۶] روشی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با ضرایب چندجمله‌ای به صورت

$$Dy(x) = 0, \qquad (1.0)$$

بر حسب بسط متناهی معرفی کرد که در آن D عملگر دیفرانسیل خطی است. در این روش از چندجمله‌ای‌های چبیشف در جواب تقریبی استفاده شده بود. وی با معرفی چندجمله‌ای‌های کانونیک، راه را برای یافتن بهترین تقریب هموار نمود و روشی به نام روش تاو را ابداع نمود که آن را روش تاو لانکزوس [۹] نامگذاری کردند. علت این نامگذاری، وجود پارامترهای آزاد τ در عبارت جواب تقریبی بود.

بررسی‌ها و نتایج جالب وی در مورد خواص عملی چندجمله‌ای‌های متعامد به ویژه چبیشف و لژاندر که جایگاه بزرگی در آنالیز عددی دارند، باعث شد تا امروزه او را به عنوان خالق این شاخه از آنالیز عددی بشناسند.

در سال ۱۹۵۲ و به طور وسیع‌تر در سال ۱۹۵۶ [۱۷]، لانکزوس در ارتباط با مسأله (۱.۰) دنباله

$$Q = \{Q_m(x) | m \in N_0, N_0 = N \cup \{0\}\},$$

از چندجمله‌ای‌های کانونی مرتبط با D را معرفی کرد به طوری که روابط زیر برقرار باشند:

$$DQ_m(x) = x^m \quad ; \quad m \in N_0.$$

[۱] Legendre
[۲] Chebyshev
[۳] Laguerre
[۴] Hermit
[۵] Walsh
[۶] Haar
[۷] Volterra
[۸] Lanczos
[۹] Lanczos Tau method

جواب تقریبی معادله (۱.۰) توسط دنباله چندجمله‌ای‌های کانونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y_n(x) = \sum_{m=\circ}^{n-r} C_m^{(n-r)} \sum_{i=\circ}^{r} \tau_i Q_{m+i}(x).$$

در سال ۱۹٦۹ اورتیز [۱] [۲۵] در مقاله‌ای با عنوان $The\ Tau\ Method$ گزارشی منظم از روش تاو لانکزوس را ارائه داد و همچنین ثابت کرد که برای هر عملگر دیفرانسیل D با ضرایب چندجمله‌ای، یک دنباله منحصر بفرد از رده چندجمله‌ای‌های کانونی لانکزوس وجود دارد. همچنین نشان داد که در عمل، چندجمله‌ای‌های کانونی می‌توانند توسط روابط بازگشتی تولید شوند. سپس در نحوه تنظیم حل عددی معادله (۱.۰) همراه با شرایط اولیه بحث کرد و فرمول‌بندی روش تاو را به صورت ساده‌تر از قبل بیان کرد، سپس در سال ۱۹۷۴ تولید تقریب تاو بر حسب پایه‌های دلخواه از چندجمله‌ای‌های متعامد را ارائه نمود [۲۷].

در سال ۱۹۷۸ اورتیز [۲٦] روش تاو بازگشتی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی همراه باشرایط اولیه تعمیم داد و کاربردهای آن را به صورت عددی بیان کرد.

در سال ۱۹۸۱ اورتیز و سمرا [۲] [۱۹] و [۲۰] و [۲۴] و [۲۸] روشی به نام تاو محاسباتی را ارائه دادند که این روش برای بدست آوردن حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیر خطی مورد بحث قرار گرفت.

در سال ۱۹۸۸ روس [۳] و فیفر [۴] به این سؤال که آیا این روش تاو محاسباتی همواره همگراست یا نه؟ پاسخ دادند و در [۳۳] نشان دادند که روش تاو محاسباتی اورتیز و سمرا در پایه‌های چبیشف یک نوع روش پتروف — گالرکین [۵] است و همگرایی آن از قضیه همگرایی وی‌نیکو [٦] پیروی می‌کند [۳٦].

در سال ۱۹۹۳ ال—دو [۷] و اورتیز [۸] و [۹] برای یک رده خاص از معادلات دیفرانسیل ثابت کردند که دقت تقریب‌های عددی روش تاو به درجه تقریب n و طول بازه تقریب h وابسته است. آن‌ها نشان دادند که مقادیر پارامترهای روش تاو τ_i ها با افزایش n کاهش می‌یابند و به ازای هر n ثابت رابطه زیر برقرار است:

$$\tau_{i,h} = O(\frac{h}{۲})^n.$$

در سال ۱۹۹۹ لیو [۸] و پان [۹] [۱۸] روش تاو محاسباتی را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به کار گرفتند. آن‌ها در مقاله‌شان اساس کار را بر ماتریس‌های بینهایتی قرار دادند و روش تاو

---

[۱] Ortiz
[۲] H.Samara
[۳] Roos
[۴] Pfeifer
[۵] Galerkin - Petrov
[٦] Vainikko's convergence theorem
[۷] M.K. EL-Daou
[۸] K.M. Liu
[۹] K.S. Pun

محاسباتی اورتیز و سمرا را به صورتی به کار بردند که الگوریتم روش به صورت قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر شد و دقت نتایج این روش از دقت نتایج روش‌های قبل بیشتر گردید.
تا سال ۱۹۹۷ روش تاو برای حل عددی معادلات انتگرال یا معادلات انتگرال — دیفرانسیل به کار گرفته نشده بود. در همین سال خواجه [1] و ال‌دو [۷] روش تاو را برای حل معادلات با عملگرهای خطی معکوس پذیر و از بالا کران‌دار که در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند، به کار برده و کاربردهای آن را به صورت عددی برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم و ولترا ارائه دادند.
بعد از این سال، کارهای قابل ملاحظه‌ای در توسعه این تکنیک به صورت تحلیل‌های نظری و کاربردهای آن به صورت عددی انجام شد.
از سال ۱۹۹۹ به بعد کسانی مثل حسینی [2] و شهمراد [3] روش تاو محاسباتی را برای حل عددی معادلات انتگرال — دیفرانسیل فرمول‌بندی کردند، [۱۴]—[۱۱] و نتایج بسیار مناسبی برای حل عددی این دسته از معادلات بدست آوردند.
روش تاو علاوه بر این که از دقت کافی برخوردار است، محاسبات پیچیده‌ای ندارد، زیرا در تمامی مراحل از عملیات ساده ماتریسی استفاده می کند.
در این پایان نامه روش تاو محاسباتی، برای انواع مختلف معادلات انتگرال — دیفرانسیل ارائه می‌شود.
سیر مطالب به گونه زیر دنبال می‌شود:
در فصل اول دستگاه‌های متعامد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس چندجمله‌ای‌های متعامد گگنبائر، چبیشف و لژاندر و روابط بین آن‌ها را معرفی می‌کنیم.
در فصل دوم روش تاو محاسباتی را برای حل عددی معادلات انتگرال — دیفرانسیل فردهلم و ولترا و فردهلم — ولترا فرمول‌بندی می‌کنیم. در انتها نتایج عددی مربوط به برخی مسائل که با استفاده از روش تاو حل شده‌اند،گزارش شده است.
در فصل سوم با معرفی توابع پایه‌ای بر مبنای چندجمله‌ای‌های چبیشف و چندجمله‌ای‌های لژاندر، روش تاو برای حل عددی معادلات انتگرال — دیفرانسیل فردهلم و ولترا در این پایه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این فصل با توجه به نتایج عددی می‌بینیم که دقت روش بیشتر می‌شود.
در فصل چهارم روش تاو محاسباتی را برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال — دیفرانسیل فردهلم فرمول‌بندی می‌کنیم و نتایج عددی مربوطه را گزارش می‌نماییم.
در فصل پنجم ابتدا روش تکراری تاو را برای حل عددی معادلات انتگرال — دیفرانسیل غیرخطی ارائه می‌نماییم، در این روش لازم است تا قسمت‌های غیرخطی به خطی تبدیل شوند. در بخش دوم آن، روش تاو را برای حل اینگونه معادلات، طوری فرمول‌بندی می‌کنیم که نیاز به خطی سازی نباشد و

[1] H.G. Khajah
[2] S.M. Hosseini
[3] S. Shahmorad

دقت تقریب‌های تاو را بهبود بخشد.

در فصل ششم توسعه روش تاو را برای حل عددی معادلات انتگرال — دیفرانسیل دو بعدی بیان می‌کنیم. با توجه به اینکه حل عددی این نوع معادلات بسیار مشکل می‌باشد و یا در خیلی از موارد قابل حل نمی‌باشند، این فصل، کاربردی بودن روش تاو را بیش از پیش نشان می‌دهد.

فصل ۱

چندجمله‌ای‌های متعامد

۱.۱ مقدمه

معادلات حاکم بر پدیده‌های مختلف فیزیکی عموماً دارای شکل پیچیده‌ای هستند به طوری که اغلب آن‌ها به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. بدین منظور برای حل چنین معادلاتی سعی می شود جواب تقریبی که به حد کافی به جواب واقعی نزدیک باشد برای آن‌ها در نظر گرفته شود. از این رو مباحث مربوط به تقریب مناسب جواب معادله بسیار دارای اهمیت است. از قضایای بنیادی این مسأله می‌توان به قضیه وایرشتراس اشاره نمود. وایرشتراس در سال ۱۸۸۵ قضیه‌ای را اثبات نمود که این قضیه وجود یک چندجمله‌ای تقریبی را برای یک تابع پیوسته بر بازه $[a, b]$ تضمین می‌نماید.
قضیه وایرشتراس[۱] : اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها مانند $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ موجود است به طوری که به طور یکنواخت روی بازه $[a, b]$ به تابع $f(x)$ همگراست. به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N, \ \ \forall n \geq N \qquad ; \qquad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon, \qquad \forall x \in [a, b].$$

برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه کنید.
چندجمله‌ای‌های متعامد از جمله چندجمله‌ای‌هایی هستند که برای تقریب توابع هموار می‌توانند مفید باشند و از ابزار اولیه و مهمی هستند که در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال به طور مؤثری مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو در ادامه به طور مختصر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم چندجمله‌ای‌های $u(x)$ و $\nu(x)$ روی بازه $[a, b]$ تعریف شده باشند و تابع وزن نامنفی $\omega(x)$ حداقل روی بازه (a, b) تعریف شده باشد. ضرب داخلی پیوسته این دو تابع به صورت زیر نمایش داده می‌شود: (با این فرض که انتگرال وجود داشته باشد)

$$(u(x), \nu(x))_{\omega} = \int_a^b u(x)\nu(x)\omega(x)dx,$$

که تابع وزن نامنفی $\omega(x)$ روی بازه (a, b) باید دارای خواص زیر باشد:

۱) $\int_a^b |x|^n \omega(x)dx < \infty \quad ; \quad n \geq 0,$

۲) $\int_a^b \nu(x)\omega(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in (a, b),$

و $\nu(x)$ تابعی نامنفی و پیوسته است.

تعریف ۲.۱.۱ دو تابع $u(x)$ و $\nu(x)$ را روی بازه $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$(u(x), \nu(x))_{\omega} = \int_a^b u(x)\nu(x)\omega(x)dx = 0.$$

[۱] Weierstrass Theorem

۲.۱ دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد

در این بخش دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد را معرفی نموده و از آن‌ها در تقریب یک تابع مفروض هموار استفاده خواهیم نمود.
فرض کنیم $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های جبری باشد به طوری که درجه $P_k(x)$ برابر k بوده و این چندجمله‌ای‌ها دوبه‌دو نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ روی بازه $[-1,1]$ متعامد یکه نرمال باشند، یعنی

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)\omega(x)dx = \delta_{km} \quad ; \quad \delta_{km} = \begin{cases} 0\,, & m \neq k \\ 1\,, & m = k \end{cases}.$$

چنین دستگاهی یک فضای $\pounds_{\omega}^{2}[-1,1]$ بوده و کامل است، به طوری که نرم هر عنصر $\nu(x)$ متعلق به این فضا همراه با ضرب داخلی متناظر متناهی است، یعنی

$$\|\nu(x)\|_{\omega} = \left(\int_{-1}^{1} |\nu(x)|^{2}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

کامل بودن سیستم $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ نشان می‌دهد که برای هر $u(x) \in \pounds_{\omega}^{2}[-1,1]$ می‌توان نوشت:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k P_k(x), \qquad (1.1)$$

که در آن $\widehat{u}_k$ ها یعنی ضرایب بسط، به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\widehat{u}_k = \int_{-1}^{1} u(x)P_k(x)\omega(x)dx = (u(x), P_k(x))_{\omega}.$$

برای $n > 0$ سری قطع شده (۱.۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathsf{P}_n u(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} (u(x), P_k(x))_{\omega} P_k(x). \qquad (2.1)$$

اگر P_n را فضای چندجمله‌ای‌های با درجه کمتر یا مساوی n بنامیم آنگاه

$$\forall \nu(x) \in \mathsf{P}_n \quad , \quad (\mathsf{P}_n u(x), \nu(x))_{\omega} = (u(x), \nu(x))_{\omega}.$$

زیرا رابطه (۲.۱) نشان می دهد برای هر $P_m \in \mathsf{P}_n$ داریم:

$$(\mathsf{P}_n u, P_m)_{\omega} = \sum_{k=0}^{n} (u, P_k)_{\omega}(P_k, P_m)_{\omega} = (u, P_m),$$

بنابراین می‌توان گفت $\mathsf{P}_n u$ تصویر متعامد u بر P_n است. کامل بودن فضای $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ نشان می‌دهد که اگر $u(x) \in \pounds_{\omega}^{2}[-1,1]$ آنگاه: ([۳۴] را ببینید)

$$\|u(x) - \mathsf{P}_n u(x)\|_{\omega} \;\to\; 0 \quad , \quad n \;\to\; \infty$$

در بخش بعد سه نوع دستگاه چندجمله‌ای متعامد فوق کروی، چبیشف و لژاندر را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس یک دستگاه متعامد را برای چندجمله‌ای‌های d متغیره تعریف می‌کنیم.

۳.۱ چندجمله‌ای‌های فوق کروی

چندجمله‌ای‌های فوق کروی [۱] در حقیقت چندجمله‌ای های ژاکوبی متقارن [۲] به صورت

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+\alpha}{k-\nu}\binom{k+\beta}{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k-\nu} \quad ; \quad \alpha=\beta \,,$$

هستند که به عنوان جواب مسأله استورم – لیوویل [۳] تکین

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{\alpha+1}\frac{dP_n^{(\alpha)}(x)}{dx}\right) + n(n+2\alpha+1)(1-x^2)^{\alpha}P_n^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{۳.۱}$$

روی بازه $[-1,1]$ بدست می آیند ([۱] و [۳۴]) و دارای فرمول بازگشتی زیر هستند:

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad P_1^{(\alpha)}(x) = (2\alpha+1)x \\ xP_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n+2\alpha}{2n+2\alpha+1}P_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \frac{n+1}{2n+2\alpha+1}P_{n+1}^{(\alpha)}(x) \end{cases} . \tag{۴.۱}$$

۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های گگنبائر

در چندجمله‌ای‌های فوق کروی با انتخاب $\alpha = m - \frac{1}{2}$ چندجمله‌ای‌های گگنبائر [۴] بدست می آیند که به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} G_0^{(m-\frac{1}{2})}(x) = 1, \qquad G_1^{(m-\frac{1}{2})}(x) = 2mx \\ xG_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) = \frac{n+2m-1}{2n+2m}G_{n-1}^{(m-\frac{1}{2})}(x) + \frac{n+1}{2n+2m}G_{n+1}^{(m-\frac{1}{2})}(x) \end{cases} .$$

چندجمله‌ای‌های گگنبائر به صورت زیر نیز تعریف می‌شوند:

$$G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-m}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}, \tag{۵.۱}$$

که در آن $-\frac{1}{2} < m < \infty$ و $-1 \le x \le 1$. همچنین داریم:

$$\begin{cases} G_n^{(m-\frac{1}{2})}(\pm 1) = (\pm 1)^n \binom{n+2m-1}{n} \\ \frac{d}{dx}G_n^{(m-\frac{1}{2})}(\pm 1) = 2m(\pm 1)^{n+1}\binom{n+2m}{n-1} \\ (1-x^2)G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) = -nxG_n^{(m-\frac{1}{2})}(x) + (n+2m-1)G_{n-1}^{(m-\frac{1}{2})}(x) \end{cases} .$$

لم زیر را برای مشتق k ام $G_n^{(\nu)}(x)$ داریم: (رجوع کنید به [۴] و [۵])

[۱] Ultraspherical

[۲] Symmetric Jacobi Polynomials

[۳] Sturm-Liouville

[۴] Gegenbauer

لم ۱.۳.۱ برای چندجمله‌ای‌های گگنبائر رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d^k}{dx^k}G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)=2^k\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}G_{n-k}^{(m+k-\frac{1}{2})}(x), \qquad (6.1)$$

که در آن $\frac{d^k}{dx^k}G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)$ مشتق k ام $G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)$ است.
برای اثبات آن به مرجع [۴۲] مراجعه کنید.
چندجمله‌ای‌های گگنبائر نسبت به تابع وزن $\omega(x)=(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$ متعامدند که می‌توان آن را در رابطه زیر نشان داد:

$$(G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x),G_s^{(m-\frac{1}{2})}(x))_\omega=\int_{-1}^{1}\omega(x)G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)G_s^{(m-\frac{1}{2})}(x)dx=\gamma_n^m\delta_{ns},$$

به طوری که عامل نرمال ساز γ_n^m دارای تعریف زیر است:

$$\gamma_n^m=2^{2m}\frac{\Gamma^2(m+\frac{1}{2})\Gamma(n+2m)}{n!(2n+2m)\Gamma^2(2m)}, \qquad (7.1)$$

و $\Gamma(x)$ مبین تابع گاما است و همچنین داریم:

$$\delta_{ns}=\begin{cases}1\,, & n=s\\ 0\,, & n\neq s\end{cases}.$$

چندجمله‌ای‌های نرمال شده گگنبائر را به صورت $g_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)$ نشان می‌دهیم، لذا داریم:

$$g_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)=\frac{1}{\sqrt{\gamma_n^m}}G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x), \quad \|g(x)\|^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}=(g(x),g(x))_\omega\,, \qquad (8.1)$$

که تشکیل یک پایه متعامد در فضای $\pounds^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}([-1,1])$ می‌دهد و

$$\pounds^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}([-1,1])=\{f(x)|f:[-1,1]\to\Re\ \ ,\ \ \|f(x)\|^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}<\infty\},$$

فضای $H^m_{G^{(m-\frac{1}{2})}}$ را فضای سوبولف از همه توابع $u(x)$ روی بازه $[-1,1]$ می‌نامیم که در آن $u(x)$ و همه مشتقات جزئی آن تا مرتبه m در $\pounds^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}([-1,1])$ قرار می‌گیرند. نرم فضای $H^m_{G^{(m-\frac{1}{2})}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u(x)\|^2_{m,G^{(m-\frac{1}{2})}}=\sum_{k=0}^{m}\|\frac{d^k}{dx^k}u(x)\|^2_{G^{(m-\frac{1}{2})}}.$$

رابطه‌ی موجود بین این چندجمله‌ای‌ها و مشتقات مرتبه اول و دومشان را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:

$$\begin{cases} G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)=\frac{-1}{2n+2m}\frac{d}{dx}G_{n-1}^{(m-\frac{1}{2})}(x)+\frac{1}{2n+2m}\frac{d}{dx}G_{n+1}^{(m-\frac{1}{2})}(x)\\[2ex] G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)=C_{n-2}\frac{d^2}{dx^2}G_{n-2}^{(m-\frac{1}{2})}(x)+C_n\frac{d^2}{dx^2}G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x)+C_{n+2}\frac{d^2}{dx^2}G_{n+2}^{(m-\frac{1}{2})}(x)\end{cases},$$