بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

نامساوی هاردی و نامساوی استولارسکی برای انتگرال‌های فازی

استاد راهنما:

دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور:

دکتر اصغر رحیمی

پـژوهشگر:

فاطمه رستم پور

تیر ۱۳۹۰

شماره ۱۲

تقدیم به

معلمان و اساتید عزیزم...

خدایا...

به من توفیقی بده که فقط یک روز بنده مخلص تو باشم که میدانم حتی ساعتی چنین بودن دشوار است،
به من صبری ده تا کسانی را که دوستم ندارند دوست داشته باشم.
ذره ای از رحمت بیکرانت را به من ببخش تا بتوانم آنانرا که دوستشان داشتم و دشمنم داشتند و آنانرا که در حقم ظلم کردند ببخشم.
مرا همواره، آگاه و هوشیار دار، تا پیش از شناختن درست و کامل کسی یا فکری، -مثبت یا منفی- قضاوت نکنم.
مرا به ابتذال آرامش و خوشبختی مکشان، اضطرابهای بزرگ، غمهای ارجمند، و حیرتهای عظیم را به روحم عطا کن، لذتها را به بندگان حقیرت بخش و دردهای عزیز بر جانم ریز.
دستانم خالی است و دلم غرق در آمال، یا به قدرت بیکرانت دستانم را توانا گردان یا دلم را از آرزوهای دست نیافتنی خالی کن.
میدانم که نادانم به ذره ای از علم بیکرانت دانایم کن، زبانم در ستایش تو قاصر است به من زبانی عطا کن تا گوشه ای اندک از رحمت بی پایانت را سپاس گویم، راه گم کرده ام هدایتم کن، قلبم را از تمام کینه ها پاک کن که غیر از تو کسی بر این کار قادر نیست.
تردیدم را به باور، باورم را به ایمان و ایمانم را به یقین مبدل فرما.
پروردگارا با من چنان کن که در خور مقام پادشاهیت باشد نه درخور مقام پست دنیایی من...

خدایا هرگز نگویمت دست مرا بگیر

عمریست گرفته ای مبادا رها کنی...

سپاس گزاری...

حمد و ثناء، سپاس و ستایش ویژه رب رحمن و رحیم –نه ارباب جبار لئیم- است، ملک و مالک راستین اوست و ما تنها و تنها در برابر اوست که سر به عبادت و عبودیت فرود می آوریم و تنها و تنها از اوست که کمک می طلبیم آنهم نه کمک های حقیر و خواسته های خود خواهانه و دنی که هدایت یافتن و رفتن بر راهی راست و حق، راه انسان های نابی که پروردگان نعمت های ناب خدائی اند نه بد اندیشان پلید و نه گمراهان پوچ.[1]

در آغاز وظیفه خود می دانم از کلیه اساتید گرامی دوران تحصیلم که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر نمایم. از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر بیاض دارابی که زحمت مطالعه این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که زحمت مشاوره این رساله را بر عهده داشتند و ایرادات آنرا متذکر شدند، تشکر و قدردانی می کنم. همچنین از جناب آقای دکتر شهرام نجف زاده نیز که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور یافتند تشکر می کنم. از جناب آقای دکتر کریم ایواز که زحمت داوری رساله را قبول کردند و کم وکاست آنرا یادآور شدند، نهایت تشکر و قدردانی می کنم.

و در پایان بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و سر تعظیم فرود می آورم به پاس عاطفه سرشار و محبت بی دریغ شان که هیچ وقت قادر به جبران آن نخواهم بود.

فاطمه رستم پور

تیر ۱۳۹۰

---

[1] مضمون سوره حمد

نام خانوادگی: رستم پور
نام: فاطمه

عنوان پایان‌نامه: نامساوی هاردی و نامساوی استولارسکی برای انتگرال‌های فازی

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی
استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه
دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۰
تعداد صفحه:۷۸

کلیدواژه‌ها: اندازه فازی، انتگرال سوگینو، توابع یکنوا، نامساوی هاردی، نامساوی استولارسکی.

چکیده

در این پایان نامه دو نامساوی برای انتگرال‌های فازی به اثبات رسیده است.
یکی از آنها نامساوی هاردی است که بصورت زیر به اثبات رسیده است:

$$\left(⨍_{۰}^{۱} f^{p}(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{۱}{p+۱}} \geq ⨍_{۰}^{۱} \left(\frac{F}{x} \right)^{p} \mathrm{d}x.$$

که $p \geq ۱$ ، $f : [۰, ۱] \to [۰, \infty)$ تابعی انتگرال‌پذیر و

$$F(x) = ⨍_{۰}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

همچنین این نامساوی روی بازه $[۰, \infty)$ نیز برقرار است.
و نامساوی دوم، نامساوی استولارسکی است که به صورت:

$$⨍_{۰}^{۱} f(x^{\frac{۱}{a+b}})\mathrm{d}\mu \geq \left(⨍_{۰}^{۱} f(x^{\frac{۱}{a}})\mathrm{d}\mu \right) \left(⨍_{۰}^{۱} f(x^{\frac{۱}{b}})\mathrm{d}\mu \right)$$

به اثبات رسیده است که $a, b \geq ۰$ ، $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ تابعی پیوسته و اکیدا یکنوا و μ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است.

فهرست مطالب

پیشگفتار

منطق فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی زاده از دانشگاه کالفرنیا در برکلی ارایه شد. در سال ۱۹۷۲ میشو سوگینو از انستیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارایه ی مفهوم اندازه ی فازی و انتگرال فازی تعقیب کرد. سوگینو اندازه ی فازی را مانند توابع مجموعه ای پیوسته و یکنوا با هدف ارزیابی کردن کمیّت غیر جمعی در دستگاه های مهندسی معرفی کرد. اندازه ها و انتگرال های فازی می توانند برای مدل سازی مسایل در محیط های غیر قطعی مورد استفاده واقع شوند.

کارهای این پایان نامه براساس دو مقاله منتشر شده زیر تنظیم شده است:

مقاله اول توسط آقایان رومن-فلورس و همکارانش با عنوان "نامساوی هاردی برای انتگرال های فازی" در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است.

مقاله دوم توسط آقایان فلورس-فرانیولیک و همکارانش با عنوان "یادداشتی بر نامساوی استولارسکی برای انتگرال های فازی" در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

اندازه‌های فازی تعمیمی از مفهوم اندازه در آنالیز ریاضی‌اند، که فقط ویژگی یکنوایی را دارند و در کل به اندازه‌های غیرجمعی[۱] معروف‌اند. اندازه احتمال[۲]، اندازه امکان[۳]، اندازه گمان[۴]و... حالت های خاصی از اندازه‌های فازی هستند. یک اندازه فازی روی مجموعه‌ای مانند X ، یک تابع تعریف شده روی برخی از زیر مجموعه‌های X است. در کل دامنه اندازه‌های فازی می‌تواند یک خانواده یکنوا از زیر مجمو عه‌های X باشد که شامل X و $\emptyset$ است و تحت حد گیری دنباله‌های یکنوا از زیر مجمو عه‌های X بسته است .

دو مفهوم اصلی در این متن اندازه‌های فازی[۵]و انتگرال‌های فازی[۶] هستند. این مفهوم‌ها توسط سوگینو [۷]برای اولین بار در ۱۹۷۴ بیان شده‌اند[۲۵]. طبق نظر سوگینو اندازه‌های فازی بوسیله جاگذاری شرط جمع پذیری از اندازه‌های کلاسیک با شرط ضعیف تری از یکنوایی و پیوستگی فراهم شد و پیوستگی بعدا با شرط ضعیف تر نیم پیوستگی[۸]جاگذاری شد .

جزئیات انتگرال سوگینو توسط ریاضیدانان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله رالسکو [۹] و آدامز [۱۰] به مطالعه چندین تعریف معادل از انتگرال‌های فازی پرداخته‌اند [۱۴] . رومن-فلورس [۱۱] و چندی

[۱] Non-additive
[۲] Probability measure
[۳] Possibility measure
[۴] Belief measure
[۵] Fuzzy measures
[۶] Fuzzy integrals
[۷] Sugeno
[۸] Semicontinuous
[۹] Ralecscu
[۱۰] Adams

دیگر از ریاضیدانان به بررسی پیوستگی لایه‌ای از انتگرال‌های فازی، H -پیوستگی از اندازه‌های فازی، نامساوی‌های هندسی برای اندازه‌های فازی و انتگرال‌های فازی پرداخته‌اند. و همچنین چندین نامساوی از انتگرال‌های فازی را برای توابع یکنوا، که ابزاری قدرتمند برای حل انتگرال‌های فازی است بیان و اثبات کرده‌اند ([۱۵]، [۱۶]، [۱۷]) . همچنین ونگ [۱۲] و کلیر [۱۳] جزئیات اندازه فازی و انتگرال فازی را به طور مفصل مورد بحث قرار داده‌اند [۲۹] .

ریاضیدانان در مطالعات خود نشان داده‌اند که چندی از نامساوی‌ها علاوه بر حالت کلاسیک در حالت فازی نیز برقرارند. از جمله این نامساوی‌ها میتوان به نامساوی پرکوپا-لیندلر [۱۴] [۱۷] ، نامساوی ینسن [۱۵] [۱۸] ، نامساوی یانق [۱۶] [۱۹] ، نامساوی چی‌بی‌شف [۱۷] [۴] ، نامساوی هاردی [۱۸] [۲۰] ، نامساوی استولارسکی [۱۹] [۵] و ... اشاره کرد.

این پایان نامه در چهار فصل به صورت زیر تنظیم شده است:

فصل اول شامل تعاریف اولیه و پیش زمینه‌هایی از مجموعه‌هاست.

فصل دوم شامل توضیحی بر اندازه‌های فازی و توابع اندازه‌پذیر روی فضاهای اندازه‌پذیر است.

فصل سوم توضیحات مربوط به انتگرال فازی و جزئیات مهم آن است که کاربرد زیادی در اثبات قضایای اصلی دارد.

فصل چهارم که فصل اصلی پایان نامه است به اثبات نامساوی فازی هاردی و نامساوی فازی استولارسکی (روی کلاس خاصی از توابع اکیدا یکنوا) می‌پردازد.

---

[۱۱] H. Román-Flores
[۱۲] Wang
[۱۳] Klier
[۱۴] Prekopa-Leindler
[۱۵] Jensen
[۱۶] Young
[۱۷] Chebyshev
[۱۸] Hardy
[۱۹] Stolarsky

۲.۱ شمول مجموعه‌ها و تابع مشخصه

فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد مگر در مواردی که بیان شود، همه مجموعه‌هایی که بررسی می‌کنیم زیر مجموعه‌هایی از X هستند.

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه از مجموعه‌ها یک کلاس[۲۰] نامیده می‌شود.

اگر E یک مجموعه و φ یک کلاس باشد آنگاه $E \in \varphi$ یعنی مجموعه E متعلق به کلاس φ است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $E_۱, E_۲, ..., E_n$ مجموعه‌های غیر تهی باشند آنگاه

$$E = \{(x_۱, x_۲, ..., x_n) | x_i \in E_i, i = ۱, ۲, ..., n\}$$

مجموعه حاصلضرب n -بعدی نامیده می‌شود و با نماد

$$E = E_۱ \times E_۲ \times ... \times E_n$$

نشان داده می‌شود.

بطور مشابه اگر $\{E_t | t \in T\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد که T مجموعه اندیس نامتناهی است آنگاه

$$E = \{x_t | x_t \in E_t \quad \forall t \in T\}$$

مجموعه حاصلضرب از بعد نامتناهی نامیده می‌شود .

مثال ۱.۲.۱. فرض کنیم $X_۲, X_۱$ فضای اقلیدسی یک بعدی باشند. آنگاه:

$$X = X_۱ \times X_۲ = \{(x_۱, x_۲) : x_۱ \in (-\infty, \infty), x_۲ \in (-\infty, \infty)\}$$

فضای اقلیدسی دو-بعدی است. مجموعه $\{(x_۱, x_۲) | x_۱ > x_۲\}$ یک رویه هموار نیم باز تحت خط $x_۱ = x_۲$ است، در حالیکه مجموعه

$$\{(x_۱, x_۲) | x_۱^۲ + x_۲^۲ < r^۲\}$$

دایره ای باز به مرکز مبدا و شعاع r است که $r > ۰$.

[۲۰] Class

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $X_t = \{۰, ۱\}$ و $t \in \{۱, ۲, ...\}$. فضای:

$$X = X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n \times ... = \{(x_۱, x_۲, ..., x_n, ...) | x_t \in \{۰, ۱\}, \quad \forall t \in \{۱, ۲, ...\}\}$$

فضای حاصلضرب با بعد نامتناهی است.

تعریف ۳.۲.۱. اگر E یک مجموعه باشد تابع χ_E برای هر $x \in X$ که به صورت

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x \in E \\ ۰ & \text{اگر} \quad x \notin E \end{cases}$$

تعریف می‌شود تابع مشخصه[۲۱] مجموعه E نامیده می‌شود و براحتی می‌توان دید:

(الف) $E = F \Longleftrightarrow \chi_E(x) = \chi_F(x) \quad \forall x \in X$؛

(ب) $E \subset F \Longleftrightarrow \chi_E(x) \leq \chi_F(x) \quad \forall x \in X$؛

(پ) $\chi_X \equiv ۱, \quad \chi_\emptyset = ۰$.

۳.۱ کلاس‌هایی از مجموعه‌ها

تعریف ۱.۳.۱. کلاس همه زیر مجموعه‌های X ، مجموعه توانی[۲۲]از X نامیده می‌شود و با نماد $\mathcal{P}(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. کلاس غیرتهی R ، حلقه[۲۳] نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر $E, F \in R$:

(الف) $E \cup F \in R$؛

(ب) $E - F \in R$.

بعبارت دیگر یک حلقه، کلاس غیرتهی‌ای است که تحت عملگرهای اجتماع و تفاضل بسته است. بنا به شرکت پذیری اجتماع مجموعه‌ها، یک حلقه تحت عملگر اجتماع متناهی نیز بسته است .

گزاره ۱.۳.۱. مجموعه‌ی تهی، متعلق به هر حلقه است .

[۲۱] Characteristic function
[۲۲] Power set
[۲۳] Ring

قضیه ۱.۳.۱. هر حلقه، تحت عملگرهای تفاضل متقارن و اشتراک، بسته است و برعکس هر کلاس غیر تهی که تحت عملگرهای تفاضل متقارن و اشتراک بسته باشد یک حلقه است.

برهان. از $E\Delta F = (E - F) \cup (F - E)$ و $E \cap F = (E \cup F) - (E\Delta F)$ نتیجه ی اول بدست می‌آید و طرف عکس آن از $E \cup F = (E\Delta F)\Delta(E \cap F)$ و $E - F = (E\Delta F) \cap E$ بدست می‌آید.

■

قضیه ۲.۳.۱. هر کلاس غیرتهی که تحت عملگرهای اشتراک، تفاضل‌های سره و اجتماع‌های جدا شده، بسته باشد یک حلقه است.

برهان. نتیجه از $E\Delta F = \left[E - (E \cap F)\right] \cup \left[F - (E \cap F)\right]$ و قضیه‌ی ۱.۳.۱ بدست می‌آید.

■

تعریف ۳.۳.۱. کلاس غیرتهی R ، جبر[۲۴] نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

(الف) $\forall E, F \in R \Longrightarrow E \cup F \in R$;

(ب) $\forall E \in R \Longrightarrow \overline{E} \in R$.

بعبارت دیگر، یک جبر کلاسی غیرتهی است که تحت عملگرهای اجتماع و متمم بسته است .

قضیه ۳.۳.۱. یک جبر ، حلقه‌ی شامل X است و برعکس هر حلقه‌ی شامل X یک جبر است.

برهان. رجوع شود به [۲۹].

■

مثال ۱.۳.۱. کلاس همه مجموعه‌های متناهی و متمم آنها، یک جبر است .

گزاره ۱.۳.۱. اگر R یک حلقه باشد، آنگاه $R \bigcup \{E | \overline{E} \in R\}$ یک جبر است .

تعریف ۴.۳.۱. کلاس غیر تهی φ نیم حلقه [۲۵] است اگر و تنها اگر:

(الف) $\forall E, F \in \varphi \Longrightarrow E \cap F \in \varphi$;

[۲۴] Algebra
[۲۵] Semiring

(ب) به ازای $E, F \in \varphi$ که $E \subset F$ کلاس متناهی $\{C_0, C_1, ..., C_n\}$ از مجموعه‌ها در φ موجود باشد بطوریکه

$$E = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n = F,$$

و

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \varphi \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

هر حلقه یک نیم حلقه است و مجموعه $\emptyset$ متعلق به هر نیم حلقه‌ای است .

مثال ۲.۳.۱. کلاس شامل همه تک نقطه‌ای‌ها [۲۶] X و مجموعه $\emptyset$ یک نیم حلقه است .

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم X محور حقیقی باشد. کلاس همه‌ی بازه‌های کراندار ، از چپ بسته و از راست باز، یک نیم حلقه است.

تعریف ۵.۳.۱. کلاس غیرتهی $\mathfrak{F}$ ، σ -حلقه[۲۷] است اگر و فقط اگر :

(الف) $\forall E, F \in \mathfrak{F} \Longrightarrow E - F \in \mathfrak{F}$;

(ب) $\forall E_i \in \mathfrak{F}, i = 1, 2, ... \Longrightarrow \cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{F}$.

یک σ -حلقه، حلقه‌ای است که تحت عملگر اجتماع شمارا بسته است .

مثال ۴.۳.۱. کلاس همه مجموعه‌های شمارا، σ -حلقه است.

تعریف ۶.۳.۱. σ -حلقه‌ی شامل X ، σ -جبر نامیده می‌شود .

گزاره ۲.۳.۱. فرض کنیم X مجموعه غیرتهی باشد. دو σ -جبر خاص

$$B_1 = \{X, \emptyset\}, \qquad B_2 = \mathcal{P}(X)$$

در X وجود دارند که به ترتیب کوچکترین و بزرگترین جبر هستند و اگر F ، σ -جبری دلخواه در X باشد آنگاه داریم :

$$B_1 \subseteq F \subseteq B_2.$$

[۲۶] Singleton
[۲۷] Ring

مثال۱.۳.۵. فرض کنیم X مجموعه ناشمارا و C مجموعه‌ای باشد که به ازای $A \in \mathcal{P}(X)$ ، A یا A^c شمارا باشد در اینصورت C ، σ -جبر است.

تعریف ۱.۳.۷. اگر S مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد اشتراک همه σ -جبرهای شامل S ، کوچکترین σ -جبر شامل S است که آنرا با نماد $\sigma(s)$ نمایش می دهند و σ -جبر تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۸. کوچکترین σ -جبر شامل همه زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ ، σ -جبر بورل از $\mathbb{R}$ نامیده می شود که با نماد $B(\mathbb{R})$ نمایش می دهیم و اعضای این σ -جبر مجموعه‌های بورل نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۹. فرض کنیم X یک مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک میدان بورل روی X زیرمجموعه‌ای مانند B از $\mathcal{P}(X)$ است که در شرایط زیر صدق می‌شود:

(الف) $\emptyset \in B$;

(ب) اگر $E \in B$ آنگاه $X - E \in B$;

(ج) اگر $E_n \in B$ برای $1 \leq n \leq \infty$ آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in B$.

مثال ۱.۳.۶. یک مثال برای میدان بورل روی یک مجموعه ناتهی X ، مجموعه توانی $\mathcal{P}(X)$ از X است.

تعریف ۱.۳.۱۰. مجموعه S متشکل از n بردار ، مجموعه محدب [۲۸]نامیده می‌شود زمانی که برای هر $x, y \in S$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in S.$$

[۲۸] Convex

فصل ۲

توابع اندازه‌پذیر روی فضاهای اندازه‌پذیر

۱.۲ اندازه‌های فازی

فرض کنیم $\sum$ ، σ -جبری از زیرمجموعه‌های X و $\mu : \sum \longrightarrow [\circ, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای نامنفی حقیقی مقدار توسعه یافته باشد. در کل این متن از قراردادهای زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sup_{x \in \emptyset} \{x | x \in [\circ, \infty]\} = \circ,$$

$$\inf_{x \in \emptyset} \{x | x \in [\circ, ۱]\} = ۱,$$

$$\circ \times \infty = \infty \times \circ = \circ,$$

$$\frac{۱}{\infty} = \circ,$$

$$\infty - \infty = \circ,$$

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = \circ.$$

که $\{a_i\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی است.

تعریف ۱.۱.۲. اگر $\sum$ یک σ -جبر روی X باشد آنگاه $(X, \sum)$ یک فضای اندازه‌پذیر و عناصر $\sum$ ، مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم $(X, \sum)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه روی $(X, \sum)$ تابع $\mu : \sum \longrightarrow [\circ, \infty]$ است به طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ب) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \sum$ دنباله‌ای مجزا از مجموعه‌ها باشد آنگاه:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

تعریف ۳.۱.۲. سه تائی $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه نامیده می‌شود که در آن X یک مجموعه، $\sum$ یک σ -جبر در X و μ یک اندازه روی $\sum$ است.

تعریف ۴.۱.۲. μ اندازه‌ی فازی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر :

(الف) اگر $\emptyset \in \sum$ در این صورت $\mu(\emptyset) = 0$ (میل کردن به صفر در $\emptyset$[1]) ؛

(ب) اگر $E \in \sum$ ، $F \in \sum$ و $E \subseteq F$ در این صورت $\mu(E) \leq \mu(F)$ (یکنوایی) ؛

(پ) $\{E_n\} \subseteq \sum$، ... $E_1 \subseteq E_2 \subseteq$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \sum$ در این صورت $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ (پیوستگی پایین) ؛

(ت) $\{E_n\} \subseteq \sum$ ، ... $E_1 \supseteq E_2 \supseteq$، $\mu(E_1) \leq \infty$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \sum$ در این صورت $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n).$ (پیوستگی بالا) .

تعریف ۵.۱.۲. μ اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی [2] پایین یا بالا (روی $(X, \sum)$) نامیده می‌شود اگر و تنها اگر μ به ترتیب در شرایط (الف) و (ب) و (پ) یا (الف) و (ب) و (ت) صدق کند. برای سادگی هر دوی آنها را اندازه‌ی فازی نیم پیوسته می‌گوییم.

تعریف ۶.۱.۲. اندازه‌ی فازی یا اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی، μ منظم [3]است اگر و تنها اگر $X \in \sum$ و $\mu(X) = 1$ باشد.

تعریف ۷.۱.۲. فضای $(X،\sum،\mu)$ را فضای اندازه‌ی فازی [4] (یا فضای اندازه‌ی فازی نیم پیوسته) روی فضای اندازه‌پذیر $(X،\sum)$ گوییم، اگر μ اندازه‌ی فازی (یا اندازه‌ی فازی نیم پیوسته) روی فضای اندازه‌پذیر

[1] Vanishing at $\emptyset$
[2] Semicontinuous
[3] Regular
[4] Fuzzy measure spase

$(X،\sum)$ و $X \in \sum$ باشد.

اندازه‌ی فازی (اندازه‌ی فازی نیم پیوسته) روی نیم حلقه، در مقایسه با یک اندازه‌ی معمولی، خاصیت جمعی ندارد، امّا روی مجموعه‌ی تهی خاصیت یکنوایی، پیوستگی و به صفر گرائیدن را حفظ می‌کند .

مثال ۱.۱.۲. اگر μ یک اندازه‌ی مستقیم[5] روی $(X،\sum)$ باشد، یعنی برای هر $E \in \sum$:

$$\mu(E) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x_{\circ} \in E; \\ \circ & \text{اگر} \quad x_{\circ} \notin E; \end{cases}$$

که در آن $x_{\circ}$ یک نقطه ی ثابت در X است. این تابع مجموعه‌ای، یک اندازه‌ی احتمال است که اندازه‌ی فازی منظم نیز می‌باشد.

به طور کلی روی یک نیم حلقه، هر اندازه‌ی معمولی یک اندازه‌ی فازی است. .

مثال ۲.۱.۲. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ..., n\}$ ، $\sum = \mathcal{P}(X)$ و $\mu(E) = (\frac{|E|}{n})^{۲}$ که در آن $|E|$ تعداد نقاطی است که متعلق به E است، باشد.

در این صورت μ اندازه‌ی فازی منظم است، $\mu(\emptyset) = \circ$ و $\mu(X) = ۱$.

و چون X فضای متناهی است، پیوستگی (از بالا و پایین) به طور طبیعی برقرار است .

لم ۱.۱.۲. اگر $\mu_{۱}$ و $\mu_{۲}$ دو تابع مجموعه‌ای حقیقی مقدار توسعه یافته، نامنفی و پیوسته روی $(X،\sum)$ باشد و $\mu_{۱} + \mu_{۲}$ و $\mu_{۱} \times \mu_{۲}$ به صورت زیر برای هر $E \in \sum$ تعریف شده باشند :

$$(\mu_{۱} + \mu_{۲})(E) = \mu_{۱}(E) + \mu_{۲}(E),$$

$$(\mu_{۱} \times \mu_{۲}) = \mu_{۱}(E) \times \mu_{۲}(E),$$

در این صورت $\mu_{۱} + \mu_{۲}$ و $\mu_{۱} \times \mu_{۲}$ نیز پیوسته می‌باشند. اگر $\mu_{۱}$ و $\mu_{۲}$ متناهی (یا اندازه‌ی فازی نیم پیوسته) باشند آنگاه $\mu_{۱} + \mu_{۲}$ و $\mu_{۱} \times \mu_{۲}$ نیز چنین هستند .

مثال ۳.۱.۲. فرض می‌کنیم $X_{\circ} = \{۱, ۲, ...\}$ ، $X = X_{\circ} \times X_{\circ}$ و$\sum = \mathcal{P}(X)$.

برای هر $E \in \mathcal{P}(X)$ تعریف می‌کنیم،

$$\mu(E) = |ProjE|$$

[5] Direct measure

$$ProjE = \{x|(x,y) \in E\}$$

μ در شرایط (الف) ، (ب) و (پ) اندازه‌ی فازی صدق می‌کند، امّا از بالا پیوسته نیست. در واقع اگر برای هر $n = ۱, ۲, ...$ ،

$$E_n = \{۱\} \times \{n, n+۱, ...\},$$

آنگاه $E_۱ \supset E_۲ \supset ...$ و $\mu(E_n) = ۱$ امّا $\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n = \emptyset$ و $\mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n) = ۰$.

پس تابع مجموعه‌ای μ یک اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی پایینی می‌باشد .

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید $f(x)$ تابعی نامنفی و حقیقی مقدار توسعه یافته باشد که روی $X = (-\infty, \infty)$ تعریف شده است. اگر

$$\mu(E) = \sup_{x \in E} f(x), \quad \forall E \in \mathcal{P}(X)$$

آنگاه μ در شرایط (الف)، (ب) و (پ) تعریف اندازه‌ی فازی صدق می‌کند، امّا شرط (ت) را ندارد. پس μ یک اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی پایینی روی $(X, \mathcal{P}(X))$ می‌باشد .

مثال ۵.۱.۲. فرض کنید فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{P}(X))$ همان فضای داده شده در مثال قبل باشد. اگر $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ برای هر $E \in \mathcal{P}(X)$ طوری تعریف شود که

$$\inf_{x \in X} f(x) = ۰, \qquad \mu(E) = \inf_{x \notin E} f(x);$$

در این صورت μ ، اندازه‌ی فازی نیم پیوسته‌ی بالایی و منظم است.

۲.۲ توابع اندازه‌پذیر

در این بخش فرض می‌کنیم $(X ،\mathfrak{F})$ فضای اندازه‌پذیر، $X \in \mathfrak{F}$ ، $\mu : \mathfrak{F} \longrightarrow [۰, \infty]$ اندازه فازی (یا اندازه فازی نیم پیوسته) و $\mathcal{B}$ میدان بورل روی $(-\infty, \infty)$ باشد.

تعریف ۱.۲.۲. تابعی با مقدار حقیقی $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ روی X ، $\mathfrak{F}$ -اندازه‌پذیر (یا بطور خلاصه اندازه‌پذیر) است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه بورل $B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم:

$$f^{-۱}(B) = \{x|f(x) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$