پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آمار ریاضی

دانشکده علوم

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

آزمون ناپارامتری نیکویی برازش کلاس توزیع NBUL

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر علی شادرخ

نگارش:

فائزه شجاعت

بهمن 1390

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

مجتمع علوم پایه و کشاورزی

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران
اللهم عجل لولیک الفرج والعافیه والنصر

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد خانم فائزه شجاعت

دانشجوی رشته آمار ریاضی به شماره دانشجویی: ۸۸۰۲۷۱۸۰۰

تحت عنوان:

"آزمون نیکویی برازش براي کلاسي از NBUL"

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز چهارشنبه مورخ: ۹۰/۱۱/۵ ساعت : ۱۲/۳۰-۱۱/۳۰ درمحل تهران شرق برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد ۱۹/۷۵

به حروف .... و با درجه ارزشیابی عالی .... مورد قبول واقع شد ☒ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهي	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	دکترپرویز نصیري	استاد راهنما	دانشیار	پیام نور	
۲	دکترعلي شادرخ	استاد مشاور	استادیار	"	
۳	دکترعباس رسولي	استاد داور	استادیار	دانشگاه زنجان	
۴	دکترمسعود یارمحمدي	نماینده علمي گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلي	دانشیار	"	

تهران، خیابان استاد نجات اللهی
خیابان شهید فلاح پور، پلاک ۲۷
تلفن: ۸۸۸۰۰۲۵۲
دورنگار: ۸۸۳۱۹۴۷۵
WWW.TPNU.AC.IR
science.agri@tpnu.ac.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود واجب می دانم که از زحمات و رهنمودهای ارزندۀ استاد فرزانه و بزرگوارم، جناب آقای دکتر پرویز نصیری که با حوصله و صبر فراوان در تمام مراحل نگارش این پایان نامه مرا یاری نمودند کمال تشکر و تقدیر را به عمل آورم، همچنین از استاد عالی قدر جناب آقای دکتر علی شادرخ استاد مشاور به خاطر همکاری و مساعدت هایشان در طول اجرای این تحقیق صمیمانه سپاسگذارم.

تقدیم به

مادر مهربانم شکوفه رستم زاده

چکیده

هدف اصلی در این پایان نامه آزمون ناپارامتری نیکویی برازش برای آزمون فرض نمایی بودن توزیعها در مقابل کلاس توزیع $NBUL$[1] می باشد.که این آزمون ناپارامتری بر اساس آماره U ، که از انحراف فرض H_0ساخته می شودو به آماره$\hat{\delta}(s)$ معروف است وزمان اول از کار افتادگی توزیعهای طول عمر را آزمون می کند پایه ریزی شده است . که در ابتدا ویژگی اولیه توزیعهای طول عمر من جمله توابع نرخ خطر توزیعها بررسی شده است. ودر راستای آن ویژگی کلاس NBU[2] از توزیعهای طول عمر که ارتباط مستقیم با افزایش نرخ خطر توزیعها دارد مورد توجه قرار گرفته است ، وسپس این ویژگی با مرتب سازی تبدیل لاپلاس روی مفهوم بقاء عمر سیستمها گسترش یافته و راهکارهای بقاء سیستم ارائه گردیده است و در ادامه ، کاراییمجانبی پیتمن و توان و جدول مقادیر بحرانی آماره آزمون $\hat{\delta}(s)$ با ارائه برنامه های نرم افزاری مورد بحث و بررسی قرار گرفته است..

کلمات کلیدی:

توزیع طول عمر، کلاس ویژگی اولیه $NBUL$، آماره U، کارایی، قابلیت اعتماد[3]، آزمون طول عمر، توزیع نمایی، توان، روش مونت کارلو

---
[1] *New Better than Used in the Laplace Order*
[2] *New Better than Used*
[3] *Reliability*

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

مقدمه

مفهوم ویژگی اولیه عمر در آنالیز قابلیت اعتماد (بقاء) خیلی با اهمیت است. «بدون ویژگی اولیه» عمر یک مولفه هیچگونه تاثیری روی توزیع باقی مانده طول عمر مولفه ندارد. «ویژگی اولیه مثبت» وضعیتی را توضیح می دهد که طول عمر باقی مانده با افزایش عمر یک مولفه تمایل دارد تا کاهش یابد. این وضعیت «همچون اینکه مولفه ها تمایل دارند با گذشت زمان نسبت به گسستگی و فرسودگی افزایشی، وخیم تر شوند» در طرحهای قابلت اعتماد رایج است. «ویژگی اولیه منفی» تاثیر برعکس روی طول عمر دارد. ویژگی اولیه منفی «ویژگی اولیه سودمند» شناخته شده است، اگر چه این نام کمتر رایج است. بهر حال ما توجه خود را روی «ویژگی اولیه مثبت» متمرکز می کنیم. می توان نتیجه گرفت که یک گستردگی موازی از ویژگی اولیه منفی نیز می تواند انجام داده شود. ویژگی اولیه توزیع های طول عمر این مفهوم را توضیح می دهند که عمر یک مولفه یا سیستم با گذشت زمان، بهبود می پذیرد یا رو به زوال می گذارد. بسیاری از توزیعها بر طبق ویژگی عمر اولیه یا دو گانه شان طبقه بندی یا تعریف شده اند.یک حالت با اهمیت از رده بندی،این است که توزیع نمایی یک عضو از هر کلاس توزیعی است. تابع توزیع طول عمر $F(x)$، برای مقادیر منفی صفر است. یعنی: $F(x) = 0 \qquad \forall x < 0$

متغیر تصادفی نامنفی X را برای زمان از کارافتادگی یا مرگ مولفه الکتریکی یا مکانیکی در نظر می گیریم.

مفهوم نرخ از کارافتادگی افزایشی(کاهشی) یا IFR (DFR)[1]برای توزیعهای تک متغیره،در تئوری بقاء خیلی بااهمیت است. برخی از کلاس توزیعها این ویژگی اولیه را دارند و به طور گسترده‌ای مطالعه شده اند.کلاس توزیعهایی همچون متوسط نرخ افزایش از کار افتادگی $(IFRA)$[2]، کلاس توزیع جدید بهتر از استفاده شده(NBU)و کلاس توزیع جدید بهتر از استفاده شده در امید ریاضی $(NBUE)$[3]و کلاس توزیع میانگین طول عمر باقی کاهشی $(DMRL)$[4]، از مقبولیت زیادی برخوردار است و توسط مولفان زیادی چون پروسچن[5] وبارلو[6] در سال 1981[4]، و در سالهای متمادی بررسی شده اند.کلاس دیگری از توزیعها با لاپلاس - کلاس[7] مطرح شده است؛که ویژگی اولیه آنها روی تبدیل لاپلاس پایه گذاری شده است وتوسط کلفسجو[8] در سال 1983 [8]مورد توجه قرار گرفته است.

کاربردها، ویژگیها، وتفاسیری از تبدیل لاپلاس در تئوری آماری قابلیت اعتماد و اقتصاد در مقاله آلزاید[9] (1991) [2]، دنیوت[10] (2001)[6]، شیک[11]وشانسیکومارو[12] (1994)[15]واحمد (2004)[1] می تواند یافت شود.

1(Decrease) Increase Failure Rate.
2Increase Failure Rate in the Average.
3New Better than Used in Expectation.
4Decrease Mean Residual Life.
5Proschen.
6Barlow
7$\mathcal{L}$ – class
8Clefsejow
9Alzaid
10Deniout
11Shick
12Shunsy koummarrow

به عبارتی، در بررسی توزیعهای طول عمر با ویژگیهای اولیه توابع، از برخی

ترتیبات، $\le_{icx}$ [3]، ...، $\le_{icv}$ [2] $\le_{st}$ [1]

ما این مفهوم را به دست می آوریم که یک سیستم قدیمی طول عمر باقی کوتاهتری نسبت به سیستم جدید دارد.یکی از روشهای خیلی با اهمیت که از ویژگی اولیه کلاس توزیعها مطالعه شده، روی مفهوم عمر باقی اساس شده است.

برخی ویژگیهای کلاس توزیع $NBUL$، شامل برخی خصوصیات و ویژگیهای محصور توسط یائی[4] یائی[4] وگائو[5] در سال 2001 [12]وبلزوانس[6] در سال 2002 [7]بحث شده است.سرانجام واصل[7] در در سال 2006[3]برخی نتایج جدید ویژگیهای اولیه ومحصور کلاس توزیع$NBUL$ را مطرح کرد.آنها آماره آزمون پایه گذاری شده روی آماره U را با استفاده از روش مقدار مورد انتظار بررسی کردند.

در فصل اول پایان نامه ویژگیهای توزیعهای طول عمر و وابستگی توابع و مفاهیم ویژگی اولیه مثبت توزیعها بیان شده است. در فصل دوم ویژگی کلاس توزیع NBU ونیززیرکلاسهایی از این ویژگی اولیه مثبت از توزیعهای طول عمر votRoابط مابین آنها تشریح شده است.

در فصل سوم تعاریف ونتایج و ویژگیهای محفوظ کلاس توزیع $NBUL$ به طور مفصل تشریح شده است، وکاربرد این ویژگی اولیه از توزیعها در مدلهای شوک بیان می شود.ونیز راهکارهای بقاء

[1]Stochastic Ordering
[2]Increase Concave Ordering
[3]Increase Convex Ordering
[4]Yae
[5]Gaow
[6]Belzoance
[7]Wassel

سیستمها ارائه می شود.در فصل چهارم یک آماره آزمون پایه گذاری شده روی آماره U برای آزمون فرض اینکه توزیع دارای ویژگی نمائی است در مقابل توزیع دارای ویژگی $NBUL$است را بیان می کنیم.این آماره آزمون برای زمان اول از کارافتادگی یا طول عمر می باشد، و روی آزمون نیکوئی برازش توزیعهای ویژگی اولیه پایه گذاری شده است.

نمادهای اختصاری

فضا	$\mathcal{X}$
توزیع احتمال در فضای $\boldsymbol{\mathcal{X}}$	p_θ
خانواده توزیع احتمال درفضای $\boldsymbol{\mathcal{X}}$	$\{p_\theta:\ \theta \in\ \Theta\}$
فضای نمونه برای نمونه $X_1\ , \cdots , X_n$	$\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}\ =\ \mathcal{X}^n$
خانواده توزیع احتمال در فضای $\mathcal{X}^n$	$\{\prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) : \theta \in \Theta\}$
افزایشی	I
کاهشی	D
تعداد تجدید یاتعداد خرابی در فاصله زمانی $[0\ , t]$ بدون هیچ راهکار برنامه ریزی شده در یک فرایند تجدید عادی	$N(t)$
تعدادسرویسهائی که در فاصله زمانی $[0\ , t]$از کار می افتند تحتراهکار جایگزین عمر T(تجدید در عمر T)	$N_A(t, T)$
تعدادسرویسهائی که در فاصله زمانی$[0\ , t]$ از کار می افتند تحت راهکار جایگزین بلوک با جایگذاریهای بافاصله$T, 2T, \cdots$	$N_B(t, T)$
فاصله مابین خرابی $(i-1)$ ام و iام برای یک فرایند تجدیدعادی	T_i
فاصله مابین خرابی $(i-1)$ ام و iام تحت یک راهکار جایگزین عمر	T_{iA}
فاصله مابین خرابی $(i-1)$ ام و iام تحت یک راهکارجایگزین بلوک	T_{iB}

فصل اول

توزیعهای طول عمر و

مفاهیم ویژگی اولیه

فصل اول

توزیعهای طول عمر و مفاهیم ویژگی اولیه

1-1- تبدیلات لاپلاس

تبدیلات لاپلاس توسط «پیر سیمون مارس دلاپلاس[1]» بین سالهای 1749 و 1827 مطرح شدهاست.این تبدیلات یک تکنیک نیرومندی است که اعمال محاسبه را به وسیله اعمال جبری جایگزین می کند.

اگر $f(t)$ برای $t \geq 0$ یک تابع باشد، و $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ به ترتیب مشتقات اول و دوم و ... و n ام تابع $f(t)$ باشند، پس تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریفمی شود:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

که عملگر تبدیل لاپلاس، $\mathcal{L}$ می باشد.تابع $f(t)$ روی t وابسته می باشد، تابع جدیدی که به دست می آید تابع مولد نامیده می شود که روی s وابسته است.

مثال1-1-1 اگر $f(t) = k$ باشد پس تبدیل لاپلاس آن است:

$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^\infty k e^{-st}\, dt = k\left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{k}{s}$$

مثال1-1-2 تبدیل لاپلاس $f(t) = t^n$ است:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \frac{s^{n+1}}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-st}\, dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

[1] Pear Simon Mars DLaplace

نکاتی در مورد تابع تبدیل لاپلاس

اگر $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ باشد پس:

نکته1 $(i)\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$(ii)\ \mathcal{L}\ \{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$(iii)\ \mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$

نکته 2 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(s)ds$

نکته 3 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

ویژگیهای تبدیل لاپلاس:تابع تبدیل لاپلاس دارای سه ویژگی می باشد.اگر داشته باشیم:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt = G(s)$

ویژگی اول: تبدیل لاپلاس توابع دارای ویژگی خطی می باشد:

$\mathcal{L}\{c_1f(t) + c_2g(t)\} = c_1F(s) + c_2G(s)$

ویژگی دوم: دارای ویژگی انتقال اول می باشد:

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$

ویژگی سوم : دارای ویژگی تغییر مقیاس می باشد:

$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

1-2- توابع خطر(از کار افتادگی) توزیعهای طول عمروشکلهای این توابع

ما اغلب فکر می کنیم درباره $\bar{F}(x) = p(x > t) = 1 - F(x)$، که به عنوان تابع بقاء یاتابع قابلیت اعتماد معلوم است.بنابر این متغیر تصادفی X،طول عمر یک مولفه یعنی زمان برای اولین از کار افتادگی را معین می کند.مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X با μ معین می شودونیز تابع بقاء متغیر طول عمر باقی $X_t = (X - t|X > t)$بدین صورت مشخص می شود:

$$\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(t)}$$

مقدار مورد انتظار بقاء عمر، بدین صورت خواهد بود:

$$\mu(t) = E(X - t|X > t) = \int_0^x \bar{F}(x|t)\,dx$$

توزیع طول عمر با تابع توزیع بقاء $\bar{F}(t)$یا تابع بقاء شرطی $\bar{F}(X|t)$ یا نرخ خطر $r(t)$ یا میانگین بقاء عمر $\mu(t)$ وبرخی اوقات با گشتاور دوم بقاء عمر $E\{(X - t)^2|X > t\}$ توصیف می شود.

تعریف 1-2-1 تابع خطر :

تابع خطر Rرا روی فاصله $(-\infty, \infty)$بدین صورت تعریف می کنیم:

$R(x) = -\log \bar{F}\,(x)$

برای یک متغیر تصادفی نامنفی X، $R(0) = 0$ می باشد،پس تابع $\forall x > 0$ $R(x)$ افزایشی است و $lim_{x\to\infty} R(x) = \infty$.توابع خطر بعضی اوقات ابزارهای محاسباتی راحتی دارند. اما در برابر نرخ خطر،از مفهوم قابل درک کمتری برخوردارند.

تعریف 1-2-2نرخ خطر:

اگر تابع مطلقا پیوسته $F(x)$ با تابع چگالی $f(x)$ موجود باشد، نرخ خطر $r(x)$روی فاصله $(-\infty,\infty)$تعریف می شود با:

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \qquad \forall \bar{F}(x) > 0$$

و این ویژگیها را خواهد داشت:

ویژگی اول: $r(x) > 0 \quad \forall x > 0$

ویژگی دوم : $\forall x > 0 \quad \int_0^b r(x)\, dx < \infty$

ویژگی سوم : $\int_0^\infty r(x)\, dx = \infty$

1-2-1 شکل یک تابع نرخ خطر

فرض می کنیم نرخ خطر تابعی صحیح باشد و داشته باشیم: $r(t): R^+ \longrightarrow R^+$. گوییم تابع نرخ خطر است:

1- به طور محض صعودی ، اگر $\forall t \quad r'(t) > 0$ و با نماد I نشان داده می شود.

2-به طور محض نزولی، اگر $\forall t \quad r'(t) < 0$ و با نماد D نشان داده می شود.

3-شکل گودالی دارد اگر $\forall t \in (0, t_0) \quad r'(t) < 0$ و $r'(t_0) = 0$ و $\forall t > t_0 \quad r'(t) > 0$ و با نماد BT[1] نشان داده می شود.

[1]Bathtub Shape

4-شکل گودالی وارونه دارد اگر $\forall t \in (0, t_0)$ $r'(t) > 0$ و $r'(t_0) = 0$ و $\forall t > t_0$ $r'(t) > 0$ و با نماد UBT[1] نشان داده می شود.

5-شکل گودالی تعدیل شده دارد اگر $r(t)$ درابتدا افزایش یابدوسپس به صورت گودالی شکل گیرد وبا نماد MBT[2] نشان داده می شود.

تابع گلاسر[3] را بدین صورت تعریف می کنیم:

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)} \qquad (1-1)$$

این تابع نقش مهمی را درمطالعات نرخ خطر $r(t)$ دارد.رابطه مابین توابع $\eta(t)$, $r(t)$ نشان داده می شود با:

$$\frac{d}{dt}\left[log\big(r(t)\big)\right] = r(t) - \eta(t)\ ,\ \left[\frac{1}{r(t)}\right]' = \frac{\eta(t)}{r(t)} - 1 \qquad (2-1)$$

قضیه 1-2-1 قضیه گلاسر

فرض کنید تابع $\eta(t)$ تعریف شده دررابطهٔ (1-1)باشد.

a) اگر تابع $\eta(t) \in I$ باشد پس نرخ خطر $r(t)$ از نوع I است.

b)اگر تابع $\eta(t) \in D$ باشدپس نرخ خطر $r(t)$ از نوع D است.

c) اگر تابع $\eta(t) \in BT$ و

i)اگر y_0 وجود داشته باشد که به ازای آن $r'(y_0) = 0$ پس نرخ خطر $r(t)$ از نوع BT است.

ii) در غیر اینصورت تابع $r(t)$ از نوع I است.

1Up side – Down Baththb Shape
2Modi ied Bathtub Shape
3Glaser Function

d) اگر تابع $\eta(t) \in UBT$ باشد و

i) اگر y_0 وجود داشته باشد که به ازای آن $r'(y_0) = 0$ پس نرخ خطر $r(t)$ از نوع UBT است

ii) در غیر اینصورت تابع $r(t)$ از نوع D است.

برهان

تعریف می کنیم:

$$g(t) = \frac{1}{r(t)} = \frac{\bar{F}(t)}{f(t)} \tag{3-1}$$

رابطه (2-1) رابدین صورت می نویسیم:

$$g'(t) = g(t)\eta(t) - 1$$

که معادل است با:

$$g'(t) = \int_t^{\infty} \left[\frac{f(y)}{f(t)}\right] [\eta(t) - \eta(y)]\, dy = \frac{\eta(t)}{r(t)} - 1 \tag{4-1}$$

حال قضیه را اثبات می کنیم:

a) اگر $\eta'(t) > 0 \quad \forall t > 0$ پس از رابطه (4-1) نتیجه می گیریم که $g'(t) < 0 \quad \forall t > 0$. که ازرابطه (3-1) نتیجه می گیریم $r(t) \in$ İ می باشد.

b) اگر $\eta'(t) < 0 \quad \forall t > 0$ پس $g'(t) > 0 \quad \forall t > 0$ پس از رابطه (3-1) نتیجه می گیریم که $r(t) \in D$