

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الحمد لله الذي جعل القرآن الكريم  
أمة من أمة الأنبياء والمرسلين  
الذين جاءوا بالبينات والهدى  
والرحمة من ربهم العظيم  
الذي هدانا لهذا الذي كنا  
نجهلون

١١٤٩٧



دانشگاه اصفهان  
دانشکده علوم  
گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش اقتصادی - اجتماعی

بر آورد تابع چگالی ریسک - خنثی با برخی از توزیع‌های آماری

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت‌ساز

استاد مشاور:

دکتر سعید صمدی

پژوهشگر:

محمد شریعتمداری

کتابخانه مرکزی  
شماره رک

۱۳۸۸ / ۴ / ۶

اسفندماه ۱۳۸۷

۱۱۴۹۸۷

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات  
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه  
متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شبهه نگارش پایان نامه  
در حیات شاد است  
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش اقتصادی\_اجتماعی

آقای محمد شریعتمداری

تحت عنوان

بر آورده چگالی ریسک خنثی با توزیع گامای تعمیم یافته

در تاریخ ۱۴/۱۲/۸۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی با نمره ۱۸/۷۷ با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه علمی استاد

۲- استاد مشاور دکتر سعید صمدی با مرتبه علمی استادیار

۲- استاد داور داخل گروه دکتر افشین پرورده با مرتبه علمی استادیار

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر غلامرضا محتشمی با مرتبه علمی دانشیار

امضاء

امضاء

امضاء

امضاء

امضای مدیر گروه

## سپاسگزاری

از رحمت و اسعه پروردگار رحمان برای این اثر ناچیز شاکرم که حضورش را در تمامی مراحل کار احساس کردم.

از جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز به دلیل مساعدت فراوان ایشان در انجام تمامی مراحل این پایان نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر سعید صمدی تشکر و قدردانی می‌کنم که راهنمایی‌های ایشان در انجام مراحل نظری مرا یاری داد.

همچنین از تمامی اساتید گروه آمار دانشگاه اصفهان، آقایان دکتر اسدی، دکتر طالبی، دکتر کاظمی و دکتر پرورده که در طی دوره ارشد مرا یاری داده‌اند تشکر می‌نمایم.

در نهایت از خانواده محترم، پدر بزرگ و مادر بزرگ‌های عزیزم به خاطر تمامی زحماتی که برایم کشیده‌اند تشکر می‌کنم و در همین جا مراتب حق شناسی خود را به آنها اعلام می‌دارم.

تقدیم به تمامی دوستانم

## چکیده

امروزه در دنیایی که اقتصاد و سرمایه حرف اول را می‌زنند، یکی از مسائل مهم پیش روی انسان، مسائل مالی است. مسائل مالی همواره با ریسک همراه است، هرچه ریسک بالاتر، بازدهی و سود بالاتری مورد انتظار است. از این رو کارشناسان مالی بر آن شدند تا ریسک را مدیریت کنند. یعنی شرایطی فراهم سازند که علاوه بر حداقل کردن ریسک، سود را حداکثر کنند. یکی از ابزارهایی که کارشناسان مالی برای مدیریت ریسک ابداع کرده اند، اختیار معاملات می‌باشد. هر اختیار معامله‌ای بسته به نوع و سررسیدش دارای قیمتی می‌باشد، که در این تحقیق ابتدا با استفاده از مدل زمان-گسسته و بعد با استفاده از مدل زمان-پیوسته قیمت اختیار خرید را به دست می‌آوریم. در ادامه تحقیق فضایی معرفی می‌شود که در آن سرمایه‌گذاران نسبت به سرمایه‌گذاری در بازار مالی با نرخ بهره بدون ریسک و سرمایه‌گذاری در بازار سهام بی‌تفاوت باشند. به این فضا، فضای ریسک-خنثی گوئیم. سپس با استفاده از این فضا نیز قیمت اختیار خرید را محاسبه می‌کنیم. در اینجا برای این که بتوانیم فرمول محاسبه قیمت اختیار را به دست آوریم باید فرض کنیم که قیمت سهام از فرآیند تصادفی برآونی هندسی تبعیت می‌کند و سررسید اختیار معامله، قیمت توافقی و نوسان قیمت سهام ثابت هستند. اما اگر قیمت سهام از فرآیند فوق تبعیت نکند و سررسید اختیار معامله، قیمت توافقی و نوسان قیمت سهام ثابت نباشند، با برآورد تابع چگالی ریسک-خنثی توسط تابع چگالی‌های وایبل، گامای تعمیم یافته و بتای تعمیم یافته، قیمت اختیار خرید را برآورد می‌کنیم. اما استفاده از تابع چگالی‌های فوق روش‌های پارامتری محسوب می‌شوند. با استفاده از یک روش ناپارامتری به نام تابع موجک، ابتدا تابع مولد گشتاور ریسک-خنثی را تقریب زده سپس قیمت اختیار را برآورد می‌کنیم. در آخر با توجه به داده‌های واقعی در می‌یابیم که گامای تعمیم یافته بین توزیع‌های فوق در برآورد قیمت اختیار خرید عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد و روش تابع موجک از همه آنها بهتر عمل می‌کند.

**کلید واژه:** اختیار معامله، تابع چگالی وایبل، تابع چگالی گامای تعمیم یافته، تابع موجک، فرآیند تصادفی برآونی هندسی، فضای ریسک-خنثی و مارتینگل.

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

### فصل اول: کلیات تحقیق

۱	۱-۱- مقدمه.....	
۳	۲-۱- اختیار معامله.....	
۳	۱-۲-۱- مثالی از اختیار خرید.....	
۴	۲-۲-۱- مثالی از اختیار فروش.....	
۵	۳-۲-۱- بازده اختیار معامله.....	
۵	۴-۲-۱- عوامل تأثیرگذار بر قیمت اختیار معامله.....	
۶	۱-۴-۲-۱- قیمت سهام و قیمت توافقی.....	
۶	۲-۴-۲-۱- زمان باقیمانده تا سررسید.....	
۷	۳-۴-۲-۱- نوسان پذیری قیمت سهام.....	
۷	۴-۴-۲-۱- نرخ بهره بدون ریسک.....	
۷	۳-۱- اهداف تحقیق.....	
۸	۴-۱- پیشینه تحقیق.....	
۹	۵-۱- اصطلاحات مهم در این تحقیق.....	
۹	۱-۵-۱- سرمایه گذاری.....	
۱۰	۲-۵-۱- سید سرمایه گذاری.....	
۱۰	۳-۵-۱- بازارهای مالی.....	
۱۱	۴-۵-۱- فرصت آربیتراژ.....	
۱۲	۵-۵-۱- نرخ بهره بدون ریسک.....	
۱۲	۶-۵-۱- تبدیل لاپلاس.....	
۱۴	۶-۱- فروض تحقیق.....	

### فصل دوم: مدل دو جمله‌ای برای قیمت گذاری

۱۵	۱-۲- مقدمه.....	
۱۵	۲-۲- مدل دو جمله‌ای یک دوره‌ای.....	
۲۱	۳-۲- مدل دو جمله‌ای چند دوره‌ای.....	
۲۶	۴-۲- امید شرطی در حالت گسسته.....	
۳۲	۱-۴-۲- مارتینگل‌ها.....	
۳۷	۵-۲- کاربرد نظریه احتمال در فضای مالی.....	
۴۱	۱-۵-۲- امید شرطی در حالت زمان پیوسته.....	
۴۳	۲-۵-۲- حرکت برآونی.....	



## فصل سوم: کاربرد انتگرال ایتو در فضای مالی

۴۷	۱-۳- مقدمه.....
۴۷	۲-۳- انتگرال ایتو.....
۵۵	۳-۳- فرمول ایتو- دوبلین.....
۶۱	۴-۳- فرمول بلک- شولز.....

## فصل چهارم: قیمت گذاری ریسک- خنثی

۶۶	۱-۴- مقدمه.....
۶۶	۲-۴- اندازه ریسک- خنثی.....
۶۹	۳-۴- سرمایه گذاری تحت اندازه ریسک- خنثی.....
۷۲	۴-۴- به دست آوردن فرمول بلک- شولز.....
۷۵	۱-۴-۴- تعادل اختیار خرید- اختیار فروش.....
۷۶	۵-۴- تابع چگالی ریسک- خنثی.....
۷۸	۱-۵-۴- توزیع وایبل.....
۷۸	۲-۵-۴- توزیع گامای تعمیم یافته.....
۸۰	۳-۵-۴- توزیع بتای تعمیم یافته (GB2).....
۸۱	۴-۵-۴- توزیع لگ نرمال آمیخته.....
۸۵	۶-۴- برآورد تابع مولد گشتاور ریسک- خنثی.....
۸۸	۱-۶-۴- روش موجک.....
۹۰	۲-۶-۴- مدل و روش کار.....

## فصل پنجم: بررسی نتایج با داده های واقعی

۹۵	۱-۵- مقدمه.....
۹۵	۲-۵- توزیع های وایبل، گامای تعمیم یافته.....
۱۰۰	۳-۵- توزیع لگ نرمال آمیخته.....
۱۰۴	۴-۵- شبیه سازی برای روش موجک.....

۱۰۶..... خلاصه تحقیق

۱۰۸..... واژه نامه

۱۱۱..... منابع و مآخذ

## فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۱۶.....	شکل (۱-۲) قیمت سهام مدل دوجمله‌ای یک دوره‌ای.....
۲۱.....	شکل (۲-۲) قیمت سهام مدل دوجمله‌ای چند دوره‌ای.....
۲۹.....	شکل (۳-۲).....
۴۸.....	شکل (۱-۳).....
۵۲.....	شکل (۲-۳).....
۵۳.....	شکل (۳-۳).....
۸۶.....	شکل (۱-۴) تابع چگالی لگ نرمال آمیخته.....
۸۸.....	شکل (۲-۴) موجک هار.....
۸۹.....	شکل (۳-۴) موجک فرانکلین.....
۸۹.....	شکل (۴-۴) موجک شانون.....
۱۰۰.....	شکل (۱-۵) اختلاف بین برآورد های قیمت اختیار خرید توسط دو توزیع.....
۱۰۳.....	شکل (۲-۵) اختلاف بین برآورد های قیمت اختیار خرید توسط سه توزیع.....

## فهرست جدول‌ها

عنوان	صفحه
جدول (۱-۱).....	۶
جدول (۱-۵) قیمت اختیار خرید برای سهام <i>FTSE</i> زمانی که قیمت جاری سهم $S(0) = 5843.32$ باشد، برای قیمت‌های توافقی و سررسیدهای مختلف.....	۹۸
جدول (۲-۵) قیمت خود سهام در پایان سررسید.....	۹۸
جدول (۳-۵) برآورد پارامترهای توزیع وایبل.....	۹۹
جدول (۴-۵) قیمت‌های برآورد شده برای اختیار خرید توسط توزیع وایبل.....	۹۹
جدول (۵-۵) اختلاف قیمت‌های اختیار خرید برآورد شده توسط توزیع وایبل و قیمت‌های واقعی.....	۱۰۰
جدول (۶-۵) برآورد پارامترهای توزیع گامای تعمیم یافته.....	۱۰۰
جدول (۷-۵) قیمت‌های برآورد شده برای اختیار خرید توسط توزیع گامای تعمیم یافته.....	۱۰۱
جدول (۸-۵) اختلاف قیمت‌های اختیار خرید برآورد شده توسط توزیع گامای تعمیم یافته و قیمت‌های واقعی.....	۱۰۱
جدول (۹-۵) برآورد پارامترهای توزیع آمیخته لگ نرمال.....	۱۰۴
جدول (۱۰-۵) اختلاف قیمت‌های اختیار خرید برآورد شده توسط توزیع آمیخته لگ نرمال و قیمت‌های واقعی.....	۱۰۵
جدول (۱۱-۵) اختلاف بین $c^w$ و $c^{bs}$ .....	۱۰۷

## علائم

نماد	تعریف
$S_t$	قیمت سهام در زمان $t$
$K$	قیمت توافقی
$\sigma$	نوسان پذیری قیمت سهام
$r$	نرخ بهره بدون ریسک
$\varphi$	تبدیل لاپلاس
$\varphi^{-1}$	تبدیل لاپلاس معکوس
$V_t$	ارزش معامله در زمان $t$
$X_t$	مقدار سرمایه گذاری شده در زمان $t$
$\Delta_t$	تعداد سهام خریداری شده در زمان $t$
$\tilde{p}, \tilde{q}$	احتمال های ریسک - خنثی
$\tilde{E}$	امید ریاضی تحت اندازه ریسک - خنثی
$\tilde{P}$	اندازه احتمال ریسک - خنثی
$P$	اندازه احتمال معمول
$Z$	مشتق رادون - نیکودیوم
$\Omega$	فضای نمونه
$F$	یک $\sigma$ - میدان از زیر مجموعه $\Omega$
$\omega$	برآمد پرتاب سکه
$G$	زیر $\sigma$ - میدان $F$
$W(t)$	فرآیند حرکت براونی
$\Pi$	افراز بازه $[0, t]$ به $\{t_0, \dots, t_1\}$
$\ \Pi\ $	بیشترین فاصله زمانی
$\alpha(t)$	نرخ میانگین آنی بازدهی در زمان $t$
$c(t, S_t)$	قیمت اختیار خرید
$p(t, S_t)$	قیمت اختیار فروش
$R(t)$	فرآیند نرخ بهره
$D(t)$	نرخ تنزیل
$\tau$	زمان باقیمانده به سر رسید
$\tilde{g}$	تابع چگالی ریسک - خنثی
$c^{\text{mod}}$	قیمت اختیار خرید مدل
$c^{\text{mtk}}$	قیمت اختیار خرید بازار

## فصل اول

### کلیات تحقیق

#### ۱-۱ مقدمه

با نگاه مختصری به اطراف می‌توان تغییرات به وجود آمده در کلیه شقوق زندگی اجتماعی را مشاهده کرد. استفاده از ابزارهای جدید محاسباتی، دانشمندان را قادر ساخته است تا عملیات پیچیده محاسباتی را که در زمانی نه چندان دور غیر ممکن بود، در زمانی کوتاه انجام دهند. نظریات جدید در مورد ساختمان اتم و الکترون، تفکرات قدیم بشر را در این خصوص به کلی متحول ساخته، آسمان‌خراش‌ها با مصالح سبک ساخته می‌شوند تا در هنگام زلزله کمترین خسارت را در برداشته باشند. شهروندان به راحتی می‌توانند از محل کار خود آخرین دستاوردهای علمی و حرفه‌ای را جويا شوند و با هم‌تایان حرفه‌ای خود در آن سوی کره زمین به گفتگو بنشینند. این مثال‌ها و مثال‌های دیگری که خواننده به آن واقف است، خود شاهدی بر تغییرات ژرفی است که هم در نحوه تفکر و هم در فناوری، در دو دهه اخیر به وجود آمده است.

تحولات جدید اقتصادی و بروز نظرات جدید، حوزه مالی را نیز دچار تغییرات عمده‌ای ساخته، و باعث ظهور حوزه‌های جدید علمی گردیده است. آزادسازی نرخ ارز، از بین رفتن قانون طلا به عنوان پشتوانه پول و در نهایت فروپاشی موافقت‌نامه برتون وودز<sup>۱</sup> از یک طرف و جهانی شدن و یکپارچگی بازارها و ظهور سازمان‌های

---

<sup>۱</sup> Berton Woods Agreement

چند ملیتی و نیز به حداقل رسیدن تعرفه‌های بازرگانی از طرف دیگر، همگی در گسترش فعالیت‌های صنعتی بین‌المللی نقش مهمی داشته‌اند. در این بین، راه‌کارهایی نیز در خصوص حل مسائل و مشکلات مالی باید اندیشیده می‌شد. افزایش درآمد سرانه و در نتیجه وجود درآمد مازاد و پس‌اندازهای افراد جامعه و در مقابل به وجود آمدن شرکت‌های بزرگ که برای تأمین منابع مالی خود نیاز به راه‌کارهایی اصولی داشتند، باعث شد انواع اوراق بهادار به وجود آید. ظهور این اوراق بازاریهای مالی را فعال ساخت تا صاحبان اوراق بتوانند در آن صحنه اوراق بهادار خود را مبادله کنند. در این بازارها به علت تغییرات شرایط مالی شرکت‌ها بخصوص تغییر در نرخ ارز که ساختار هزینه‌ای شرکت‌ها را متأثر می‌ساخت و سایر نوسانات، قیمت اوراق بهادار نیز تغییر می‌کرد.

بدیهی است صاحبان اوراق بهاداری که به‌طور محدود در این بازار حضور داشتند، تغییرات شدید قیمت را به راحتی قبول نمی‌کردند. در مقابل، گروهی به عنوان سفته‌باز از این تغییرات شدید منتفع می‌شوند. بدین گونه در بازارهای مالی افرادی تحت عنوان معامله‌گران پرورش یافتند که از اختلاف قیمت‌ها در بازارهای مختلف و تغییرات قیمت در یک بازار بهره‌برداری می‌کردند. البته دیری نپایید که سرعت فزاینده تبادلات اطلاعات و گسترش فناوری اطلاعات این موقعیت را از این گروه گرفت و البته معاملات پیچیده‌تری را جایگزین کرد. بدین سان که امروزه تنها افرادی توان بهره‌برداری از بازارهای مالی را خواهند داشت که اطلاعات بهنگام داشته باشند و همچنین تخصص استفاده از این اطلاعات و توان بهره‌برداری و نتیجه‌گیری از این اطلاعات را داشته باشند. مسأله به همین جا ختم نمی‌شود و شرط سنگین‌تری بر روی این گروه باز می‌شود و آن این است که حتی ورود به این بازارها و فهمیدن القای این بازار نیاز به تخصص ویژه‌ای دارد.

برای ورود به این بازارها که در آنها ده‌ها تحلیل‌گر و آماردان و ... مشغول تهیه و تدارک اطلاعات و گزارش‌ها برای تصمیم‌گیری‌اند و شرکت‌های سرمایه‌گذاری با سبد<sup>۱</sup> سرمایه‌گذاری ریسک خود را به حداقل می‌رسانند، قطعاً داشتن ابزاری مناسب برای مواجهه با هرگونه مشکلی ضروری است. برای وارد شدن به این بازارها ناگزیر با تغییرات نرخ ارز، تغییرات سهام، تغییرات قیمت شاخص‌ها، تغییرات قیمت طلا و نفت و دیگر کالاهای اساسی و از همه اساسی‌تر، دگرگونی در انتظارات و الگوی مصرف کنندگان و هزاران تغییر دیگر مواجه خواهیم شد. هر کدام از این تغییرات برای نظام یک شرکت چنان پرخطرند که می‌توانند آن را به زانو درآورند و به همین علت همه در پی به حداقل رساندن ریسک هستند.

<sup>1</sup> Portfolio

در حوزه مالی نیز روش‌های پوشش ریسک<sup>۱</sup> و ابزارهای نوین تأمین مالی از طریق طراحی قراردادهای مالی به این منظور ارائه گردیده‌اند. یکی از ابزارهایی که کارشناسان مالی برای مدیریت ریسک ابداع کرده‌اند، اختیار معاملات<sup>۲</sup> است که در بخش بعد به شرح آن خواهیم پرداخت.

## ۲-۱ اختیار معامله

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد یکی از ابزارهای مهم مالی برای پوشش ریسک در سرمایه‌گذاری، اختیار معامله است. به طور کلی، می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ اختیار خرید<sup>۳</sup> و اختیار فروش<sup>۴</sup>. اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد<sup>۵</sup> (دارایی تعهد شده) را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بخرد در صورتیکه اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. حال این دارایی موضوع قرارداد می‌تواند ارز، سهام، نفت، طلا و ... باشد. تاریخی که قرارداد معین می‌کند، به تاریخ انقضا، تاریخ اعمال، تاریخ توافقی یا سررسید<sup>۶</sup> معروف است. قیمت تعیین شده در قرارداد، قیمت اعمال یا قیمت توافقی<sup>۷</sup> نامیده می‌شود. هر اختیار معامله می‌تواند آمریکایی یا اروپایی باشد. تفاوت این دو نوع اختیار معامله ربطی به منطقه جغرافیایی ندارد بلکه اختیار معامله آمریکایی در هر زمان از طول دوره قرارداد تا تاریخ انقضای آن در تاریخ سررسید قابل اعمال است، ولی اختیار معامله اروپایی تنها در تاریخ انقضای آن قابل اعمال است. در ادامه دو مثال درباره اختیار معامله خواهیم زد تا با مفاهیم فوق بیشتر آشنا شویم.

### ۱-۲-۱ مثالی از اختیار خرید

سرمایه‌گذاری را در نظر بگیرید که یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی ۱۰۰ دلار برای خرید یک سهم شرکتی در اختیار دارد. فرض کنید قیمت سهم در حال حاضر ۹۸ دلار و سررسید معامله چهار ماهه و قیمت اختیار معامله (بابت خرید یک سهم) ۵ دلار باشد. با این اطلاعات، مبلغ سرمایه‌گذاری اولیه ۵ دلار است. از آنجایی که

<sup>۱</sup> Risk Hedging

<sup>۲</sup> Option Contracts

<sup>۳</sup> Call Option

<sup>۴</sup> Put Option

<sup>۵</sup> Underlying Asset

<sup>۶</sup> Maturity Date

<sup>۷</sup> Exercise Price

اختیار معامله مذکور از نوع اروپایی می‌باشد لذا فقط در سررسید آن قابل اعمال است. اگر در سررسید (چهار ماه) قیمت سهام به کمتر از ۱۰۰ دلار کاهش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا نگذارد (دلیلی وجود ندارد سهامی را که می‌توان با قیمت کمتر از ۱۰۰ دلار در بازار خریداری نمود با استفاده از حق اختیار معامله، به ۱۰۰ دلار بخریم). بنابراین در این حالت، سرمایه‌گذار مبلغ ۵ دلار سرمایه اولیه را از دست می‌دهد. اگر قیمت سهام در تاریخ انقضا، به بالاتر از ۱۰۰ دلار افزایش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا بگذارد. به عنوان مثال فرض کنید که قیمت سهام به ۱۱۵ دلار افزایش یابد. با اعمال اختیار خرید، سرمایه‌گذار می‌تواند یک سهم را به قیمت ۱۰۰ دلار بخرد. اگر سرمایه‌گذار فوق، بلافاصله سهم خریداری شده با استفاده از حق اختیار معامله را در بازار بفروشد، ۱۵ دلار درآمد نصیب سرمایه‌گذار می‌شود. برای محاسبه سود خالص، باید قیمت خرید اختیار معامله (هزینه اولیه) را از درآمد حاصله کسر نماییم که در اینصورت، سود خالص سرمایه‌گذار معادل ۱۰ دلار می‌شود.

حال فرض کنید که در مثال فوق الذکر، قیمت سهم در پایان مدت زمان اختیار معامله به ۱۰۲ دلار برسد. سرمایه‌گذار با اعمال اختیار معامله، درآمدی معادل ۲ دلار نصیب خود می‌سازد (دلار  $2 = 102 - 100$ ). برای محاسبه سود یا زیان خالص، هزینه خرید اختیار معامله را از درآمد فوق کسر می‌کنیم. در این صورت سرمایه‌گذار متحمل زیان خالصی معادل ۳ دلار می‌گردد. در حالیکه عدم اعمال اختیار معامله، باعث ایجاد زیان ۵ دلاری برای سرمایه‌گذار می‌شود و مقایسه این دو نشان می‌دهد که در این حالت، اعمال اختیار معامله حتی با وجود زیان خالص بهتر از عدم اعمال آن است. به طور کلی، در صورتی که قیمت سهام بیشتر از قیمت اعمال باشد، می‌بایستی اختیار خرید را در زمان سررسید آن اجرا نمود.

### ۲-۲-۱ مثالی از اختیار فروش

خریدار اختیار خرید امیدوار است که قیمت سهم افزایش یابد، در حالیکه خریدار اختیار فروش انتظار دارد که قیمت سهام کاهش یابد. قرارداد اختیار فروش را نیز با مثالی توضیح می‌دهیم. فرض کنید سرمایه‌گذاری، یک اختیار فروش اروپایی برای فروش یک سهم را با قیمت توافقی ۷۰ دلار می‌خرد. اگر قیمت جاری سهم را ۶۵ دلار، مهلت انقضای اختیار معامله را سه ماهه و قیمت اختیار معامله برای فروش یک سهم را ۷ دلار فرض کنیم، سرمایه‌گذاری اولیه این شخص، بابت خرید اختیار فروش سهم مذکور ۷ دلار می‌شود. از آنجا که اختیار معامله مزبور از نوع اروپایی است، لذا فقط در صورتی اعمال می‌شود که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام



کمتر از ۷۰ دلار باشد. فرض نماییم که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام به ۵۵ دلار کاهش یابد در آن صورت با اعمال اختیار معامله، سرمایه گذار می تواند هر سهم را به قیمت ۵۵ دلار از بازار خریداری نموده و تحت اختیار معامله به قیمت ۷۰ دلار بفروشد و عایدی معادل ۱۵ دلار نصیب خود سازد. با کسر ۷ دلار هزینه اولیه بابت خرید اختیار فروش سهم، سود خالص این سرمایه گذار، معادل ۸ دلار می شود. اما در صورتی که قیمت سهام به بالاتر از ۷۰ دلار افزایش یابد، اختیار معامله خریداری شده فاقد ارزش می شود و سرمایه گذار مبلغ ۷ دلار سرمایه گذاری اولیه را از دست می دهد.

### ۳-۲-۱ بازده<sup>۱</sup> اختیار معامله

اگر  $K$  را قیمت توافقی و  $S_T$  را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید بدانیم، بازده حاصل از خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از:

$$\text{Max}(S_T - K, 0),$$

رابطه فوق، این واقعیت را نشان می دهد که اگر  $K < S_T$  باشد، اختیار معامله اعمال خواهد شد و در غیر این صورت یعنی اگر  $S_T \leq K$  باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد.

بازده سرمایه گذاری که موقعیت فروش در قرارداد اختیار اروپایی را اتخاذ کرده است به ترتیب زیر خواهد

بود:

$$-\text{Max}(S_T - K, 0) = \text{Max}(K - S_T, 0),$$

بنابراین اختیار فروش زمانی اعمال خواهد شد که  $K > S_T$ .

### ۴-۲-۱ عوامل تأثیرگذار بر قیمت اختیار معامله

پنج عامل مهمی که قیمت اختیار معامله را تحت تأثیر قرار می دهند عبارتند از:

۱. قیمت جاری سهم،  $S_0$

۲. قیمت توافقی،  $K$

<sup>1</sup> Return

۳. مدت زمان باقیمانده تا سررسید،  $T$

۴. نوسان پذیری قیمت سهام،  $\sigma$

۵. نرخ بهره بدون ریسک،  $r$

نتایج مبحث این قسمت در جدول (۱-۱) خلاصه شده است که تأثیر افزایش میزان هر یک از متغیرهای فوق بر قیمت یک اختیار معامله با فرض اینکه سایر عوامل ثابت در نظر گرفته شود، را نشان می‌دهد.

جدول (۱-۱)

متغیر	اختیار خرید اروپایی	اختیار فروش اروپایی	اختیار خرید آمریکایی	اختیار فروش آمریکایی
قیمت فعلی سهام	+	-	+	-
قیمت توافقی	-	+	-	+
زمان تا سررسید	?	?	-	+
نوسان‌پذیری	+	+	+	+
نرخ بهره بدون ریسک	+	-	+	-

#### ۱-۴-۲-۱ قیمت سهام و قیمت توافقی

هرگاه اختیار خریدی به اجرا گذاشته شود، عایدی یا ارزش آن بستگی به مقدار افزایش قیمت سهام، نسبت به قیمت توافقی دارد. بنابراین ارزش اختیار خرید به موازات افزایش قیمت سهام، افزایش و به موازات افزایش قیمت توافقی، کاهش می‌یابد. برعکس دربارهٔ اختیار فروش نیز می‌توان گفت که عایدی آنها تابع میزان افزایش قیمت توافقی نسبت به قیمت سهام است یعنی به ازای افزایش قیمت سهام، کاهش و به ازای افزایش قیمت توافقی، افزایش می‌یابد.

#### ۲-۴-۲-۱ زمان باقیمانده تا سررسید

ارزش هر دو اختیار معامله آمریکایی و اروپایی، با افزایش زمان باقیمانده تا سررسید، افزایش می‌یابد. دو اختیار معامله را در نظر بگیرید که فقط از لحاظ زمان سررسید متفاوتند. دارندهٔ اختیار معامله‌ای که مدت زمان بیشتری دارد، نه تنها دارای فرصت‌های اعمالی است که دارندهٔ اختیار دیگر دارد، بلکه از امتیاز بیشتری در استفاده از فرصت اعمال بیشتر برخوردار است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که اختیاری که مدت زمان بیشتری دارد، همواره ارزش آن حداقل به اندازهٔ اختیار معاملهٔ دیگری است که عمر کوتاه‌تری دارد.

### ۳-۴-۲-۱ نوسان‌پذیری قیمت سهام

به طور ساده، نوسان‌پذیری قیمت سهام، ابزاری برای نشان دادن درجه عدم اطمینان نسبت به تغییرات آتی بازده سهام می‌باشد. هرگاه درجه نوسان‌پذیری افزایش یابد، احتمال کاهش یا افزایش قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد. پس قیمت اختیارهای خرید و فروش به ازای افزایش درجه نوسان‌پذیری قیمت دارایی، افزایش می‌یابد.

### ۴-۴-۲-۱ نرخ بهره بدون ریسک

اگرچه نحوه تأثیر نرخ بهره بدون ریسک، بر قیمت قرارداد اختیار معامله چندان روشن نیست، اما می‌توان گفت با افزایش نرخ بهره در اقتصاد، نرخ رشد مورد انتظار قیمت سهام نیز افزایش می‌یابد. لذا باعث می‌شود که قیمت اختیار معامله فروش با افزایش نرخ بهره کاهش یابد. و همچنین باعث می‌شود قیمت اختیار خرید افزایش یابد.

### ۳-۱ اهداف تحقیق

همان‌طور که در قسمت‌های قبل ذکر شد، یکی از مهم‌ترین ابزارهای مالی، اختیار معامله می‌باشد. این ابزار به دلیل پیچیدگی آن، بیشتر مورد توجه دانشمندان مالی قرار گرفته است و نسبت به سایر ابزارهای مالی از لحاظ نظری، پیشرفت قابل توجهی به خود دیده است. مهم‌ترین بخش در اختیار معامله، تعیین قیمت آن می‌باشد زیرا از طرفی شرکت‌های واگذارکننده برگ‌های اختیار معامله، طوری قیمت آن را تعیین می‌کنند که واگذاری برگ‌های اختیار به سودشان باشد. از طرف دیگر خریداران برگ‌های اختیار با در نظر گرفتن قیمت آن، طوری تصمیم‌گیری می‌کنند که در این معامله سودی عاید خود نمایند. لذا باید قیمت هر برگ اختیار معامله طوری تعیین شود که هر دو طرف (شرکت و خریدار) راضی به انجام معامله شوند و ارزش<sup>۱</sup> نهایی معامله (سود) برای یکی از آنها مثبت باشد.

به همین دلیل در این تحقیق سعی شده است که عوامل مؤثر بر قیمت ابزارهای مالی (اختیار معامله) را بررسی کرده، و معادله‌ای که ارزش نهایی یک معامله را به دست می‌دهد استخراج شود. این معادله به شکل زیر است:

$$V(T) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \rho(S(t)) g(S(t), K) dS(t), \quad (1-3-1)$$

<sup>1</sup> Value

که در آن  $r$  نرخ بهره،  $S(t)$  قیمت سهام در زمان  $t$ ،  $K$  قیمت توافقی،  $\rho(\cdot)$  تابع سود یا بازدهی،  $g(\cdot)$  تابع چگالی احتمال ریسک-خنثی<sup>۱</sup> و  $V(T)$  ارزش نهایی معامله است.

در فصل دوم برای فهم بیشتر مطالب ابتدا زمان را به صورت گسسته در نظر گرفته و به شرح نتایج آن خواهیم پرداخت. در فصل سوم، کاربرد انتگرال ایتو<sup>۲</sup> در مباحث مالی گفته خواهد شد و از آن برای رسیدن به ارزش نهایی یک معامله استفاده می‌کنیم. در فصل چهارم، با توجه به این که ارزش نهایی یک معامله، به فضای احتمال و اندازه<sup>۳</sup> تعریف شده در آن فضا بستگی دارد، به شرح آن می‌پردازیم. به این اندازه، اندازه ریسک-خنثی گفته می‌شود که تحت این اندازه، سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک معامله بی‌تفاوتند. در همان فصل، تابع چگالی احتمال ریسک-خنثی را با استفاده از تابع چگالی وایبل و لاگ نرمال آمیخته و بویژه چگالی گامای تعمیم یافته برآورد کرده و خصوصیات آن را بررسی می‌کنیم. استفاده از تابع چگالی برای برآورد قیمت اختیار یک روش پارامتری محسوب می‌شود. در ادامه فصل چهارم با استفاده از تابع موجک<sup>۴</sup>، تابع مولد گشتاور ریسک-خنثی را تقریب زده و به وسیله آن قیمت اختیار را برآورد می‌کنیم. این روش یک روش ناپارامتری به حساب می‌آید. سرانجام در فصل پنجم با استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده، نتایج حاصل را بررسی خواهیم کرد.

#### ۴-۱ پیشینه تحقیق

برآورد تابع چگالی ریسک-خنثی ( $RND$ )<sup>۵</sup> در حوزه مالی سود زیادی را عاید سرمایه‌گذاران کرده است. بلک و شولز<sup>۶</sup> (۱۹۷۳) تحت فضای ریسک-خنثی فرمولی بسیار مهم برای به دست آوردن قیمت اختیار خرید ارائه کردند. کامپا<sup>۷</sup> و همکارانش (۱۹۹۷ و ۱۹۹۸)، ملیک و توماس<sup>۸</sup> (۱۹۹۷)، مارکوس و آلتورن<sup>۹</sup> (۲۰۰۵ و ۲۰۰۶) تغییرات در  $RND$  را برای برآورد تغییرات بازار، و به کارگیری روش‌های سیاسی و اقتصادی مناسب، بررسی کرده‌اند. برانر و هافنر<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۳) با استفاده از تابع چگالی ریسک-خنثی، قیمت اختیار معامله را به دست آوردند.

<sup>1</sup> Risk-Neutral

<sup>2</sup> Ito's Integral

<sup>3</sup> Measure

<sup>4</sup> Wavelet

<sup>5</sup> Risk-Neutral density

<sup>6</sup> Black and Scholes

<sup>7</sup> Campa

<sup>8</sup> Melick and Thomas

<sup>9</sup> Markose and Alentorn

<sup>10</sup> Brunner and Hafner