۶۵

بسم الله الرحمن الرحیم

۲۷۶۳۹

به نام خدا

دانشکده ریاضی

مقایسه برخی از روشهای حل دستگاههای معادلات خطی بازه‌ای

بیژن رحیمی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما: دکتر خسرو مالک نژاد

شهریور ماه ۱۳۷۸

تقدیم به:

روح مرحوم پدرم و مادر دلسوزم و همسر مهربانم.

چکیده

از آنجا که در حساب بازه‌ها یافتن جواب دقیق برای دستگاههای معادلات خطی کاری دشوار می‌باشد و نتیجه حاصل هم کاربردی ندارد تقریبی از آن بعنوان جواب دستگاه تعریف می‌شود که یافتن همین شکل خاص از جواب نیز با دشواریهائی همراه است.

بهترین تقریب از جواب دستگاه را جواب پوسته می‌نامند که در این پایان نامه روشهای مختلف برای بدست آوردن پوسته معرفی شده است و حالات خاصی که در آنها جواب پوسته را از هر یک از این روشها می‌توان بدست آورد در طی قضایای بیان و اثبات شده است.

« تشکر و قدردانی »

سپاس بیکران خداوند متعال را که بار دیگر اجازه داد تا این حقیر در راه کسب علم قدمی دیگر بر دارد.

و سپاس و تشکر خود را نثار عزیزان زیر می‌نمایم.

دکتر خسرو مالک‌نژاد، که راهنمای من در تدوین متن حاضر بوده است و همچنین در طول تحصیل همواره دیدهٔ محبت خود را به این حقیر مبذول داشته است.

لازم به ذکر است که ایشان علاوه بر آموزش ریاضیات درس معرفت را نیز به من آموخته‌اند و از خداوند می‌خواهم تا در جایی موقعیتی بیآفرینند که در آن بتوانم ذره‌ای از محبتهای ایشان را جبران نمایم.

و همچنین از سرکار خانم یوسفی نیز بخاطر زحمات زیادی که برای همهٔ دانشجویان متحمل می‌شوند متشکرم و به خصوص از طرف خودم نیز مراتب قدردانی را نثار ایشان می‌نمایم.

همچنین از تمام اساتید محترم دانشکده ریاضیات داشگاه علم و صنعت ایران دکتر امامزاده ممنون می‌باشم.

از مادرم و پدرم در اینجا و در تمام طول زندگیم ممنون می‌باشم.

از همسرم که بار زندگی را مردانه بر دوش می‌کشد سپاسگزارم.

بیژن رحیمی

تابستان ۷۸

فهرست

فصل یک

حساب بازه‌ها

۱-۱- اعداد بازه‌ای

۱-۱-۱-تعریف :بازه بسته [a و b]=X را در نظر بگیرید :

به X یک عدد بازه‌ای می‌گوئیم.

در این تعریف نکته مهم این است که عدد بازه‌ای X شامل نقاط انتهایی خود می‌باشد و عبارتست از مجموعه $\{x : a \leq x \leq b\}$.

۲-۱-۱-تعریف :عدد حقیقی x را می‌توان هم ارز بازه [x و x] در نظر گرفت .به چنین بازه‌ای یک بازهٔ تباهیده می‌گوییم در نگارش برای سادگی به جای بازه تباهیده از خود عدد استفاده می‌کنیم مثلاً به جای [2 و 2] می‌نویسیم 2.در عمل خواهیم دید که برای محاسبه نیز استفاده از عدد حقیقی به جای بازه تباهیده ساده‌تر است.

ممکن است اعداد انتهایی a و b را نتوان در ماشین نشان داد در چنین حالتی باید بازه را بنوعی گرد نماییم تا بتوان آن را در حافظه ماشین نگهداری نمود.

۳-۱-۱-تعریف :اگر در بازهٔ [a و b] به جای a بزرگترین عدد قابل نمایش در ماشین که کوچکتر یا مساوی a باشد قرار دهیم و به جای b کوچکترین عدد قابل نمایش در ماشین که بزرگتر یا مساوی b باشد قرار دهیم ، بازهٔ جدید را گرد شده خارجی بازه [a و b] می نامیم.

معمولاً از حروف بزرگ برای نشان دادن بازه‌ها استفاده می‌کنیم اما بطور

استاندارد از یک رونویس I برای نشان دادن یک بازه استفاده می‌کنیم مثلاً اگر F یک مقدار حقیقی باشد آنگاه F^I بازه متناظر با آن را نشان می‌دهد.

از رونویس L و R بترتیب برای معرفی نقاط انتهایی سمت چپ و سمت راست بازه استفاده می‌شود.

مثلاً اگر $X=[a\ \text{و}\ b]$ آنگاه $X^L=a$ و $X^R=b$

۴-۱-۱-تعریف: بازه $X=[a,b]$ را مثبت (یا نامنفی) می‌گوییم اگر $a\geq 0$ و آنرا مثبت اکید گوییم اگر $a>0$ باشد و به آن منفی (یا نامثبت) می‌گوییم اگر $b\leq 0$ باشد و منفی اکید گوییم اگر $b<0$ باشد.

۵-۱-۱-تعریف: دو بازهٔ $[a,b]$ و $[c,d]$ را مساوی گوییم اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$ باشد.

۶-۱-۱-تعریف :می‌گوییم $[a,b]<[c,d]$ اگر و فقط اگر $b<c$ باشد.

اعداد بازه‌ای با تعریف فوق یک مجموعهٔ مرتب جزئی را تشکیل می‌دهند.

۲-۱- حساب بازه‌ها

فرض کنیم علائم +،-،* و / بترتیب عملکردهای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم باشند اگر OP نمایش هریک از این عملگرها بر روی اعداد حقیقی y,x باشد آنگاه برای دو عدد بازه‌ای Y,X داریم :

$X.oP.y=\{x.op.y:x\in X\ \text{و}\ y\in Y\}$

به این ترتیب بازهٔ xopy شامل تمام مقادیر ممکن x.op.y است به قسمی که

$x \in X$ و $y \in Y$.تعریف فوق نتایج زیر را برای نقاط انتهایی بازه‌ها بدست می‌دهد که حاصل عمل هریک از عملگرهاست. اگر $X=[a\ و\ b]$ و $Y=[c\ و\ d]$ آنگاه:

۱-۲-۱ $X\text{-}Y = [a+c, b+d]$

۱-۲-۲ $x\text{-}y = [a\text{-}d, b\text{-}c]$

۱-۲-۳

$X*Y$	$[ac,bd]$	$a \geq 0$	$c \geq 0$
	$[bc,bd]$	$a \geq 0$	$c < 0 < d$
	$[bc,ad]$	$a \geq 0$	$d \leq 0$
	$[ad,bc]$	$a < 0 < b$	$c \geq 0$
	$[bd,ad]$	$a < 0 < b$	$d \geq 0$
	$[ad,bc]$	$b \leq 0$	$c \geq 0$
	$[ad,ac]$	$b \leq 0$	$c < 0 < d$
	$[bd,ac]$	$b \leq 0$	$d \leq 0$
	$[\min(bc,ad)], \max(ac,bd)]$	$a < 0 < b$	$c < 0 < d$

۱-۲-۴ $1/Y = [\frac{1}{d}, \frac{1}{c}]$ $(0 \notin Y)$

۱-۲-۵ $\frac{X}{Y} = X*(\frac{1}{Y})$ $(0 \notin Y)$

علاوه بر تعاریف فوق داریم

۶-۲-۱ علت آنکه عملگرتوان را مستقل از عملگر ضرب تعریف نمودیم در بخش بعد مطرح خواهد شد.

$$\begin{cases} [1,1] & n=0 \\ [a^n,b^n] & a\geq 0 \quad \text{یا}\ (a\leq 0\leq b \quad n=2k+1) \\ [b^n,a^n] & b\leq 0 \\ [0,\max(a^n,b^n)] & a\leq 0\leq b \quad n=2k \end{cases}$$

۳-۱مسئله وابستگی DEPENDENCY PROBLEM

فرض کنیم می‌خواهیم بازه $X=[a,b]$ را با قانون تفریق گفته شده از خودش کم کنیم. انتظار داریم که حاصل این عمل بازه [۰و۰]باشد اما مقداری که بدست می‌آوریم [a-bوb-a]است یعنی به جای مجموعه $\{x-x : x\in X\}$ جواب

$\{x-y : x\in X \ \&\ y\in X\}$

را بدست می‌آوریم.

بطور کلی زمانی که در طی یک محاسبه متغییری بیش از یک بار ظاهر شود عملگر در هر بار با آن به صورت یک متغییر جدید برخورد می‌کند که با مقدار قبلی برابر است اما وابسته نیست.

این مسئله باعث میشود تا جواب بدست آمده وسیعتر گردد و بازه‌ای با خطایی بیشتر از آنچه که باید، بدست آید برای جلوگیری از چنین وضعیتی باید برای محاسبات، الگوریتمهایی را در پیش گرفت که در آنها چنین وضعیتی کمتر پیش

می‌آید.

آنچه که در بالا توضیح داده شد به مسئله وابستگی (Dependency) معروف است.

علت آنکه عملگر توان را مستقل از عملگر ضرب تعریف نمودیم نیز همین مسئله وابستگی می‌باشد. زیرا برای مثال اگر توان دوم یک بازه را بخواهیم بیابیم تعریف توان ما را به مجموعه زیر می‌رساند :

$$X^2=\{x^2:x\in X\}$$

اما تعریف ضرب جواب زیر را بدست می‌دهد:

$$X*X = \{x*y : x \in X , y \in X\}$$

۱-۳-۱- مثال: $[-1,2]^2 = [0,4]$ ولی $[-1,2] * [-1,2] = [-2,4]$

توجه داشته باشید که اگر یک متغیر بازه‌ای در شکل یک تابع فقط یکبار ظاهر شود مسئله وابستگی نخواهیم داشت .

۲-۳-۱- مثال در $f(x,y)= (x-y)/(x+y)$ مسئله وابستگی وجود دارد اما اگر همین تابع را به شکل $f(x,y)= 1-2/(1+x/y)$ بنویسیم مسئله وابستگی از بین خواهد رفت.

۴-۱-عملگر حذف Cancellation

در این قسمت عملگر دیگری را تعریف می‌کنیم که در محاسبات بازه‌ای مفید می‌باشد و آن را حذف یا Cancellation می نامیم.

ابتدا مسئله زیر را مطرح می‌کنیم فرض کنید که n بازهٔ X_i موجود است و می‌خواهیم مجموع همهٔ آنها بجز یکی را حساب کنیم مثلاً فرض کنید در یک مرحله

می‌خواهیم مقدار زیر را بدست آوریم: $S_1=X_2+X_3...+X_n$

و سپس مقدار زیر را حساب کنیم: $S_2=X_1+X_3...+X_n$

اگر بخواهیم S_2 را با استفاده از S_1 بدست آوریم انتظار داریم که به صورت $S_2=S_1+X_1-X_2$ عمل کنیم و نتیجه درست را بیابیم ،اما لازم است به این نکته توجه شود که [a_2-b و b_2-a_2]=X_2-X_2 یعنی آنچه که توقع داریم یعنی [۰و۰]نمی شود یعنی X_2 با عمل تفریق حذف نمی‌شود برای رفع این مشکل عملگر حذف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

۱-۴-۱- x\y=[a-c وb-d]

۲-۴-۱-تعریف: این عملگر را می‌توان با استفاده از عملگر تفریق تعریف نمود یعنی به جایی بازه [dوc]=Y از عبارت [cوd]استفاده نمود و آنگاه با تفریق نتیجه زیر را بدست آورد:

X/Y=[a-c وb-d]=[a وb]-[d وc]

توجه داشته باشید که [cوd]یک بازه نیست بلکه یک نماد است.

۱-۵ حساب بازه‌های گسترش یافته

در عملگرهایی که تا کنون تعریف نمودیم در مورد تقسیم قید نمودیم که مقسوم علیه فاقد صفر باشد اما با حساب بازه‌های گسترش یافته می‌توانیم از این قید آزاد شویم این حساب توسط هنسن و کاهن به طور مستقل در ۱۹۹۸ مطرح شدآزادی از این قید دیگر عملگرها را تحت اثر قرار داد.

فرض کنیم a,b,c,d مقادیر متناهی باشند با این خاصیت که $C \leq 0 \leq d$ آنگاه

$$
X/Y=\begin{cases}
[b/c,\infty] & b\leq 0 \quad d=0 \\
[-\infty,b/d]\cup[b/c,\infty] & b\leq 0 \quad c<0<d \\
[-\infty,b/d] & b\leq 0 \quad c=0 \\
[-\infty,\infty] & a<0<b \\
[-\infty,a/c] & a\geq 0 \quad d=0 \\
[-\infty,a/c]\cup[a/d,a] & a\geq 0 \quad c<0<d \\
[a/d,\infty] & a\geq 0 \quad c=0
\end{cases}
\qquad ۱-۵-۱
$$

قوانین مربوط به جمع و تفریق بازه‌های نامتناهی به صورت زیر است

۲-۵-۱-الف $[a,b] + [-\infty,d] = [-\infty و b+d]$

۲-۵-۱- ب $[a,b] + [c,\infty] = [a+c,\infty]$

۲-۵-۱-ج $[a,b] \pm [-\infty,\infty]= [-\infty و \infty]$

۲-۵-۱-د $[a,b] - [-\infty,d]= [a-d,\infty]$

۲-۵-۱-هـ $[a,b]- [c,\infty] = [-\infty,b-c]$

از آنجا که $x/_y$ در بعضی حالات برابر اجتماع در مجموعه مانند V و W می‌شود

تعریف زیر نیز مورد نیاز است

۱-۵-۳ $(V\cup W) \pm Z = (V\pm Z) \cup (W\pm Z)$

۶-۱تیزی جواب:

در انجام محاسبات بازه‌ای معمولاً نتایجی که بدست می‌آید کاملاً برابر جواب دقیق نیست بلکه حاصل محاسبات، بازه‌ای است که شامل جواب دقیق می‌باشد .این امر بخاطر خطاهای ناشی از گرد کردن خارجی ،مسئله وابستگی ،توان ماشین محاسب در نگهداری اعداد با دقت زیاد و...می‌باشد اما در عمل می‌توان با استفاده از تدابیری خاص از این خطاها تا حدودی اجتناب نمود .مثلاً با انتخاب روش خاص می‌توان از پیش آمدن مسئله وابستگی جلوگیری کرد. در این حالت نتیجه محاسبات از دقت بیشتری برخوردار خواهد بود و بازه حاصل طولی کوچکتر یا مساوی حالت پیشین بدست می‌آورد .در اصطلاح می‌گوییم نتیجه این روش تیزتر از حالت قبل می‌باشد.

۱-۶-۱- تعریف در حل یک مسئله تیزترین جواب ممکن (جواب دقیق)را جواب پوسته می‌نامیم .

۲-۶-۱- مثال: در محاسبه X°استفاده از کسر x/x جوابی بدست می‌دهد و استفاده از تعریف توان جواب [۱و۱] را حاصل خواهد کرد برای مثال اگر[۲و۱]=Xباشد

$$\text{۱}/X = [\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{و}\ \text{۱}]$$

$$X/X = X*\frac{\text{۱}}{X} = [\text{۱}\ \text{و}\ \text{۲}] * [\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{و}\ \text{۱}] = [\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{و}\ \text{۲}]$$

$$X^{\circ} = [\text{۱}\ \text{و}\ \text{۱}]$$

همانطور که دیده می‌شود $X^{\circ} \in X/X$ است و این بدان معناست که بازهٔ تباهیده[۱و۱]جواب تیزتری است . در واقع این بازه جواب پوسته یا تیزترین جواب ممکن است .

فصل دوم

توابع بازه‌ای

۱-۲- توابع بازه‌ای با مقادیر حقیقی

توابع بازه‌ای با مقادیر حقیقی وجود دارند که در این قسمت برخی از آنها را که لازم است معرفی می‌کنیم

۱-۱-۲- تعریف: تابع مرکز یا midpoint در واقع مرکز بازه را محاسبه می‌کند مثلاً اگر $X=[a \text{ و } b]$ باشد آنگاه :

$$m(X)=\frac{a+b}{2}$$

۲-۱-۲- تعریف :تابع وسعت یا Width تابعیست که بصورت زیر تعریف می شود :

$$w(X)=b-a$$

۳-۱-۲- تعریف: تابع قدر مطلق برای بازه‌ها بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$|X|=\max\{|a| \text{ و } |b|\}$$

به این تابع magnitude یا سطح بالای X هم می‌گوییم و در مقابل آن تابع mignitude یا سطح پائین X را داریم که بصورت زیر تعریف می‌شود.

۴-۱-۲- تعریف:

$$mig(X)=\begin{cases} a & a>0 \\ -b & b<0 \\ 0 & \text{سایر حالات} \end{cases}$$

تابع mig(X) را به صورت <X> نیز نشان می‌دهند.این تابع را بصورت زیر نیز