بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش جبر

عنوان پایان‌نامه:

عمل‌های توپولوژیکی آزاد روی تکواره توپولوژیکی

استاد راهنما:

دکتر لیلا شهباز

استاد مشاور:

دکتر فیروز پاشایی

پژوهشگر:

لیلا حسین‌زاده

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همسر مهربانم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم.

نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، تنهایی در انبوه جمعیت، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از سرکار خانم دکتر لیلا شهباز که زحمت مطالعه و راهنمائی این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر فیروز پاشایی و کلیه اساتید گرامی دوران تحصیلم که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر نمایم. و از جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی که زحمت قضاوت و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.

و در پایان بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که مرا پروراندند، و نیز از زحمات زیادی که در این مسیر همسرم متحمل شد، سپاسگزاری می‌کنم.

ومن الله التوفیق...

لیلا حسین زاده

مهر ۱۳۹۲

نام خانوادگی: حسین‌زاده　　　　نام: لیلا

عنوان پایان‌نامه: عمل‌های توپولوژیکی آزاد روی تکواره توپولوژیکی

استاد راهنما: دکتر لیلا شهباز　　　　استاد مشاور: دکتر فیروز پاشایی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض　　　　گرایش: جبر

دانشگاه: مراغه　　　　دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۹۲　　　　تعداد صفحه: ۹۲

کلیدواژه‌ها: $S-$عمل، $S-$عمل توپولوژیک آزاد، نیمگروه توپولوژیک.

چکیده. به دلیل اهمیت زیاد ساختارهای جامع، به ویژه ساختار آزاد در این پایان‌نامه مفهوم آزاد بودن را که در مطالعه رسته‌های مختلف یک مفهوم مفید است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین، $S-$عمل‌های توپولوژیک آزاد روی مجموعه‌ها، فضاهای توپولوژیک و $S-$عمل‌ها بیان و بررسی می‌شوند.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه، نیمگروه‌های توپولوژیک و S–عمل‌های توپولوژیک آزاد روی فضاهای توپولوژیک، همچنین S– عمل‌های توپولوژیک آزاد روی مجموعه‌ها و S–عمل ها مطالعه می‌شوند.

عمل نیمگروه‌های توپولوژیک روی ساختارهای گوناگون و نمایش آنها، کاربرد وسیعی در شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند هندسه، آنالیز، گروه های لی و سیستم‌های دینامیکی دارد و توسط متخصصین مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است [۳] ،[۶] ،[۲۰]،[۲۳]، [۲۴] علاوه بر آن، برخی مفاهیم در واقع S–عمل‌های توپولوژیک با بعضی ویژگی‌های اضافی هستند. به عنوان مثال، در آنالیز S–شار [۱] یک S–عمل توپولوژیک فشرده است [۱۹]،[۴] در نظریه نمایش گروهها، نمایش گروه گسسته G یک G–عمل توپولوژیک است [۱]،[۱۲]،[۱۷] همچنین در هندسه، شار موضعی یک S–عمل توپولوژیک روی یک خمینه هموار است که در آن $S = (\mathbb{R}, +)$ گروه توپولوژیک (گروه لی) با توپولوژی معمولی است [۶] . فضاهایی که نیمگروه‌های توپولوژیک روی آنها عمل می کنند در شاخه های مختلف ریاضیات نام های متفاوتی دارند. در بعضی متون آنها را G–فضا می نامند که G یک گروه توپولوژیک است، برخی دیگر آن را S–عمل توپولوژیک می نامند. ما از عنوان دوم در این پایان نامه استفاده می کنیم.

این پایان‌نامه در چهار فصل به صورت زیر تنظیم شده است:

[۱] S-flow

در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را می‌آوریم. در فصل دوم، رسته S−عمل های توپولوژیک بررسی می‌شوند. فصل سوم به S−عمل های توپولوژیک آزاد روی فضای توپولوژیک و روی مجموعه ها اختصاص دارد. در فصل چهارم، S−عمل توپولوژیک آزاد روی S−عمل‌ها را مطالعه می کنیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله

B. Khosravi, *Free topological acts over a topological monoid,* Quasigroups and Related Systems *18* **(2010)**, 25-42.

تنظیم شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مربوط به نیمگروه ها ، تکواره ها و S–عمل ها را بیان می کنیم. سپس مفاهیم مربوط به فضاهای توپولوژیک وتوابع پیوسته را که در فصل های بعدی مورد نیاز هستند می‌آوریم.

۱.۱ نیمگروه‌ها و تکواره‌ها

در این بخش، مفاهیمی از نیمگروه‌ها و تکواره‌ها که در فصل‌های بعدی به آن نیاز داریم، آورده می‌شود. مفاهیم این بخش برگرفته از مرجع [۱۸] است.

تعریف ۱.۱.۱. عمل دوتایی $\cdot$ روی مجموعه A *شرکت پذیر* [۱] گفته می‌شود، اگر به ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. در ادامه برای راحتی کار از نوشتن $(\cdot)$ صرف نظر خواهد شد.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه ناتهی S با عمل دوتایی شرکت پذیر، نیمگروه [۲] گفته می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه باشد. عضو $e \in S$ را:

۱) *همانی* چپ در S گوییم اگر برای هر $s \in S$، $es = s$،

[۱] Associative
[۲] Semigroup

۲) *همانی راست* در S گوییم اگر برای هر S ،$s \in S$، $se = s$،

۳) *همانی* در S گوییم اگر برای هر S ،$s \in S$، $es = s = se$.

تعریف ۴.۱.۱. نیمگروه S که دارای عضو همانی باشد، *تکواره* [۱] نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱. ۱) $(N, +)$ یک نیمگروه است. $(N, \cdot)$ و $(N_\circ, +)$ تکواره هستند.

۲) فرض کنیم G یک گروه، A و B دو مجموعه ناتهی و $P : B \times A \to G$ یک نگاشت باشد. قرار دهید:

$$\mathcal{M}(G, A, B, P) = \Big\{(a, g, b) | a \in A, g \in G, b \in B\Big\}.$$

ضرب روی $\mathcal{M}(G, A, B, P)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a, g, b)(c, h, d) = \Big(a, gP(b, c)h, d\Big)$$

در این صورت $\mathcal{M}(G, A, B, P)$ با ضرب مذکور، یک نیمگروه است. زیرا اگر فرض کنیم (a, g, b)، (c, h, d) و (e, f, m) متعلق به $\mathcal{M}(G, A, B, P)$ باشند آنگاه:

(۱)

$$\Big((a, g, b)(c, d, h)\Big)(e, f, m) = \Big(a, gP(b, c)h, d\Big)(e, f, m) = \Big(a, gP(b, c)hP(d, e)f, m\Big)$$

(۲)

$$(a, g, b)\Big((c, d, h)(e, f, m)\Big) = (a, g, b)\Big(c, hP(d, e)f, m\Big) = \Big(a, gP(b, c)hP(d, e)f, m\Big)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲)، $\mathcal{M}(G, A, B, P)$ یک نیمگروه است. نیمگروه مذکور نیمگروه ماتریس ریس بدون صفر [۲] نامیده می‌شود.

[۱] Monoid
[۲] Rees matrix semigroup without zero

تعریف ۶.۱.۱. زیر مجموعه ناتهی T از نیمگروه S، *زیرنیمگروه* از S نامیده می‌شود اگر $T^2 \subseteq T$. در حالتی که S یک تکواره با همانی ۱ باشد، زیرنیمگروه T از S، *زیرتکواره* از S گفته می‌شود اگر $1 \in T$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم S و T دو نیمگروه باشند. نگاشت $\varphi : S \to T$ را *همریختی* [1] نیمگروهی گوییم، اگر به ازای هر $s, s' \in S$ داشته باشیم $\varphi(ss') = \varphi(s)\varphi(s')$.

هرگاه S و T دوتکواره باشند، همریختی نیمگروهی $\varphi : S \to T$ را همریختی تکواره‌ای گوییم، اگر

$\varphi(1_S) = 1_T$.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر زیرمجموعه ناتهی A از نیمگروه S، $\langle A \rangle = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$ کوچکترین زیرنیمگروه از S شامل A است که زیرنیمگروه تولید شده توسط A نامیده می‌شود.

اگر $\langle A \rangle = S$ آنگاه A *مجموعه مولد* S گفته می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی K از نیمگروه S،

۱) *ایده‌آل چپ* از S نامیده می‌شود اگر $SK \subseteq K$،

۲) *ایده‌آل راست* از S نامیده می‌شود اگر $KS \subseteq K$،

۳) *ایده‌آل دوطرفه* از S نامیده می‌شود اگر $SK \subseteq K$ و $KS \subseteq K$.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرمجموعه M از عناصر مولد نیمگروه S، یک *پایه* [2] برای S گفته می‌شود اگر هر عضو S را بتوان به طور یکتا به صورت حاصل ضرب متناهی از اعضای M نوشت.

تعریف ۱۱.۱.۱. نیمگروه S *آزاد* گفته می‌شود اگر دارای پایه باشد.

[1] Homomorphism
[2] Basis

۲.۱ نظریه رسته ها

نظریه رسته‌ها، شاخه‌ای از ریاضیات است که تمام ساختارهای ریاضی را در یک زبان واحد مورد مطالعه قرار می‌دهد و آنچه را که در تمام ساختارهای ریاضی مشترک است، بیان می کند. مطالب این بخش از مرجع [۱۸] تهیه شده است.

تعریف ۱.۲.۱. رسته‌ای [۱] مانند $\mathcal{C}$، خانواده‌ای است متشکل از شی هایی [۲] که معمولا آنها را با A، B و ... نمایش می‌دهیم با این ویژگی که:

۱) برای هر دو شی A و B یک مجموعه به نمایش $hom(A, B)$، که هر عضو f از آن را یک ریختی [۳] از A (دامنه) به B (هم‌دامنه) می‌نامیم و با $f : A \to B$ نمایش می‌دهیم،

۲) قانون ترکیب $\circ$ که به هر دوریختی $f : A \to B$ و $g : B \to C$ یک ریختی $g \circ f : A \to C$ را نسبت دهد و آن را ترکیب f و g می‌نامیم که در شرایط زیر صدق می کند:

الف) شرکت‌پذیری: یعنی برای ریختی‌های $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$ داشته باشیم $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$،

ب) همانی: یعنی برای هر شی A، ریختی $id_A : A \to A$ چنان موجود باشد که برای هر ریختی $f : A \to B$ داشته باشیم $f \circ id_A = id_B \circ f = f$،

ج) مجموعه‌های $hom(A, B)$ دو به دو مجزا از هم باشند.

[۱] Category
[۲] Object
[۳] Morphism

مثال ۲.۲.۱. رسته مجموعه‌ها که اشیا آن تمام مجموعه‌ها است و با Set نمایش داده می شود، برای هر دو شی A و B، $hom(A,B)$ مجموعه تمام نگاشت‌ها از A به B، id_A نگاشت همانی روی A و $\circ$ عمل ترکیب معمولی نگاشت‌ها می‌باشد. به طور مشابه، رسته گروه‌ها را با Grp و رسته تکواره‌ها را با Mon نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. رسته‌ای مانند $\mathcal{C}$ را *رسته ملموس*[1] می‌نامیم هرگاه نگاشتی مانند σ موجود باشد به طوری که به هر شی A، مجموعه‌ی $\sigma(A)$ را متناظر کند با این ویژگی که:

۱) هر ریختی $f : A \to B$ نگاشتی از مجموعه $\sigma(A)$ به مجموعه $\sigma(B)$ است،

۲) به ازای هر شی A، ریختی id_A نگاشت همانی روی مجموعه $\sigma(A)$ است،

۳) ترکیب دو ریختی دلخواه $f : A \to B$ و $g : B \to C$ همان ترکیب آنها به عنوان نگاشت‌هایی از $\sigma(A)$ به $\sigma(B)$ و $\sigma(B)$ به $\sigma(C)$ است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس و F شی از آن و X مجموعه ناتهی دلخواه باشد. F را آزاد[2] روی مجموعه X می‌نامیم هرگاه نگاشتی مانند $i : X \to F$ موجود باشد با این ویژگی که به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مانند A و هر نگاشت $f : X \to A$ ریختی یکتا از $\mathcal{C}$ مانند $\overline{f} : F \to A$ القا شود که نمودار زیر را جابه جایی کند.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & F \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[1] Concrete category
[2] Free

تعریف ۵.۲.۱. ریختی $f : A \to B$ در رسته $\mathcal{C}$ را تکریختی [۱] می‌نامیم در صورتی که برای هر دو ریختی $h, k : C \to A$ اگر $f \circ h = f \circ k$ آنگاه $h = k$. یعنی f در ترکیب، از چپ حذف‌پذیر باشد.

به طور دوگان می‌توان مفهوم *بروریختی* [۲] را تعریف کرد.

۱.۲.۱ تابعگون ها

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک *تابعگون همورد* [۳] از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ نگاشتی مانند F است که به هر شی C از $\mathcal{C}$، شی $F(C)$ در $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و به هر ریختی $f : C \to C'$ در $\mathcal{C}$، یک ریختی $F(f) : F(C) \to F(C')$ را در $\mathcal{D}$ نسبت می‌دهد به طوری که:

۱) F همانی را حفظ می کند، یعنی برای هر شی $A \in \mathcal{C}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$،

۲) F ترکیب را حفظ می کند، یعنی اگر $f \circ g$ تعریف شده باشد آنگاه داشته باشیم

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

همچنین اگر F به هرریختی $f : C \to C'$ در $\mathcal{C}$، یک ریختی $F(f) : F(C) \to F(C')$ را در $\mathcal{D}$ نسبت دهد که به جای شرط دوم، شرط $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ برقرار باشد آنگاه تابعگون F را *تابعگون پادورد* [۴] می‌نامیم.

مثال ۷.۲.۱. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس باشد. برای $A \in \mathcal{C}$ مجموعه زمینه A را با نماد $|A| \in Set$ نشان می‌دهیم. $|-| : \mathcal{C} \to Set$ یک تابعگون همورد است که تابعگون فراموشکار [۵] از $\mathcal{C}$ به Set می‌نامیم.*

[۱] Monomorphism
[۲] Epimorphism
[۳] Convariant functor
[۴] Contravariant functor
[۵] Forgetful functor

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته ملموس باشند. تابعگون $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$، آزاد گفته می‌شود اگر به ازای هر شی $C\in\mathcal{C}$، $F(C)$ یک شی آزاد در رسته $\mathcal{D}$ باشد.

۲.۲.۱ ساختارهای رسته‌ای

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته، I یک مجموعه و $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در رسته $\mathcal{C}$ باشد.

در این صورت جفت $\Big((u_i)_{i\in I}, C\Big)$ را هم ضرب [۱] خانواده $(X_i)_{i\in I}$ می‌نامیم، هرگاه:

۱) $C\in\mathcal{C}$ و به ازای هر $i\in I$، $u_i\in hom(X_i, C)$،

۲) برای هر $A\in\mathcal{C}$ و خانواده $\Big(k_i\in hom(X_i, A)\Big)_{i\in I}$، دقیقا یک $k\in hom(C, A)$ موجود باشد که به ازای هر $i\in I$، نمودار زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "k_i"] \arrow[dr, "u_i"'] & & A \\ & C \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

در تعریف بالا، C را با نماد $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ و یا برای تاکید روی رسته‌ای که هم ضرب شکل گرفته، با نماد $\coprod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ نشان می‌دهیم و u_i را $i-$ *امین نگاشت تزریق* [۲] می‌نامیم.

مثال ۱۰.۲.۱. *در رسته Set، هم ضرب همان اجتماع مجزا است.*

گزاره ۱۱.۲.۱. *اگر هم ضرب خانواده‌ای از اشیا وجود داشته باشد آنگاه در حد یکریختی یکتاست.*

[۱] Coproduct
[۲] i-Thinjection

۳.۱ رسته S–عمل ها

در این بخش، به مطالعه رسته S عمل‌ها می‌پردازیم که اشیا آن (S–عمل‌ها) یکی از مهم‌ترین ساختارهای جبری است. مطالب این بخش از مرجع [۱۸] گرفته شده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم S یک تکواره و A یک مجموعه باشد. گوییم A یک S– *عمل راست* [۱] است، هرگاه نگاشت $\mu : A \times S \to A$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و $s, t \in S$،

۱) $\mu(a, ۱) = a$،

۲) $\mu(a, st) = \mu\Big(\mu(a, s), t\Big)$.

در اینجا $\mu(a, s)$ را با as نشان می‌دهیم. S–عمل راست را با نماد A_S نمایش می‌دهیم. S–عمل چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود و با $_SA$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۳.۱. ۱) هر تکواره مانند S، هم S–عمل راست و هم S–عمل چپ است.

۲) فرض کنیم S یک نیمگروه و A یک S–عمل چپ باشد. در این صورت مجموعه

$P(A) = \{X : X \subseteq A\}$ با نگاشت

$$\begin{cases} \mu : S \times P(A) \to P(A) \\ (s, X) \mapsto sX = \{sx | x \in X\} \end{cases}$$

S– عمل چپ است.

[۱] Right S-act

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم S یک تکواره و Z یک مجموعه باشد. مجموعه $|F(Z)| = S \times Z$ با نگاشت

$$\begin{cases} \mu : S \times (S \times Z) \to S \times Z \\ \Big(s, (t, z)\Big) \mapsto (st, z) \end{cases}$$

یک S–عمل چپ است. زیرا به ازای هر $s, s' \in S$ و $(t, z) \in S \times \mathbb{Z}$ داریم:

(۱) $\mu\Big(1, (t, z)\Big) = (t, z)$،

(۲) $\mu\Big(ss', (t, z)\Big) = \Big((ss')t, z\Big) = \Big(s(s't), z\Big) = \mu\Big(s, \mu(s', (t, z))\Big)$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم A_S یک S–عمل راست و A' زیر مجموعه ای از A باشد. A' *زیرعمل* [۱] A_S گفته می‌شود اگر برای هر $s \in S$ و $a' \in A'$ داشته باشیم $a's \in A'$.

مثال ۵.۳.۱. هر ایده‌آل راست از نیمگروه S، زیرعمل S_S است.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم A_S و B_S دو S–عمل راست (چپ) باشند. نگاشت $f : A_S \to B_S$ ($f : {}_SA \to {}_SB$) را یک S– همریختی [۲] گوییم اگر به ازای هر $a \in A$ و $s \in S$، $f(as) = f(a)s$. ($f(sa) = sf(a)$).

خانواده تمام S–عمل‌های راست (چپ) به همراه S–همریختی‌های بین آنها و با در نظر گرفتن ترکیب بین دو S–همریختی به عنوان ترکیب نگاشت‌ها، تشکیل یک رسته می‌دهند که آن را با نماد $\mathbf{Act}$–S (S–$\mathbf{Act}$) نمایش می‌دهیم.

تذکر ۷.۳.۱. در رسته S–عمل‌ها تکریختی‌ها و بروریختی‌ها به ترتیب معادل با ریختی‌های یک‌به‌یک و ریختی‌های پوشا هستند. اما باید توجه داشت که این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

[۱] Subact
[۲] Homomorphism

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم A یک $S-$عمل باشد. A را *تجزیه‌پذیر*[۱] گوییم هرگاه زیرعمل‌هایی از آن مانند A_1 و A_2 چنان موجود باشند که $A = A_1 \cup A_2$ و $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. در غیر این صورت آن را *تجزیه‌ناپذیر*[۲] می‌نامیم.

۱.۳.۱ $S-$عمل های آزاد

تعریف ۹.۳.۱. زیرمجموعه $U \neq \emptyset$ از $S-$عمل راست A_S را مجموعه مولد A_S گوییم اگر هر عضو $a \in A_S$ به صورت $a = us$ که $u \in U$ و $s \in S$ نوشته شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. مجموعه U از عناصر مولد $S-$عمل راست A_S یک پایه برای آن گفته می شود اگر هر عضو $a \in A_S$ به طور یکتا به صورت $a = us$ که $u \in U$ و $s \in S$ نوشته شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. $S-$عمل راست A_S آزاد گفته می شود اگر پایه داشته باشد.

مثال ۱۲.۳.۱. فرض کنیم S یک تکواره باشد. در این صورت S_S، $S-$عمل آزاد با پایه $\{1\}$ است.

قضیه ۱۳.۳.۱. *$S-$عمل A_S آزاد است اگر و فقط اگر $A_S \cong \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} S_i$ که I یک مجموعه ناتهی است و برای هر $i \in I$، $S_i \cong S_S$.*

لم ۱۴.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه و $Z \neq \emptyset$ یک مجموعه باشد. در این صورت، $|F(Z)| = S \times Z$ یک $S-$عمل آزاد روی مجموعه Z است.

[۱] Decomposable
[۲] Indecomposable