دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

(شاخه آنالیز عددی)

عنوان:

یک روش عددی پایدار برای حل معادلات انتگرال ولترا با هسته ناپیوسته

استاد راهنما:

آقای دکتر اسماعیل بابلیان

آقای دکتر شهنام جوادی

تدوین:

بهاره اختری

تابستان ۱۳۸۷

چکیده

در بسیاری از معادلات انتگرال، هسته دارای ناپیوستگی است و لازم است روش‌های عددی انتخابی برای چنین معادلات انتگرالی، متناسب با شکل ویژه آن‌ها در نظر گرفته شود.

در این پایان‌نامه، با گونه‌ای از معادلات انتگرال مواجهیم که هستهٔ آن به شکل پیچشی[1] از نوع همرشتاین[2] است و در دو نقطه τ_1 و τ_2 دارای ناپیوستگی است.

ابتدا با مطرح کردن مفهوم پایداری، لزوم و اهمیت این بحث، توجه خود را به یک معادله تست (اساسی) معطوف می‌کنیم. سپس گونه‌ای از یک روش انتگرالگیری مستقیم ذوزنقه‌ای (TDQ) برای این معادلات پیشنهاد می‌شود و تحت فرض‌هایی درمی‌یابیم، این روش شرایطی را فراهم می‌آورد که جواب عددی ویژگی‌های مسئله پیوسته را داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: پایداری، مجانباً پایدار، معادله تست، روش انتگرالگیری مستقیم ذوزنقه‌ای.

1) Convolution 2) Hammerstein

پیش‌گفتار

اگر فرض کنیم $y(t_n)$ مقدار واقعی جواب در نقطهٔ t_n و y_n جواب تقریبی حاصل از روش عددی باشد، $\varepsilon_n = y_n - y(t_n)$ را خطای گسسته‌سازی در نقطهٔ t_n گوییم. اگر جواب واقعی به کندی نسبت به خطا رشد کند، یعنی اگر خطا به سرعت نسبت به t افزایش یابد در حالی که جواب واقعی نسبت به t خیلی سریع افزایش نمی‌یابد، در این صورت روش عددی دقت ضعیفی دارد. هر چند ممکن است از مرتبهٔ همگرایی بالایی برخوردار باشد. این پدیده را ناپایداری عددی گوییم.

در این پایان‌نامه، پایداری عددی را مشابه آنچه که در بالا ذکر شد در نظر می‌گیریم، یعنی روش عددی پایدار است هرگاه معادله حاصل از گسسته سازی، رفتارهایی مشابه با مسئله پیوسته داشته باشد.

هدف این پایان‌نامه، معرفی نوعی روش انتگرالگیری، برای یک معادله انتگرال با هسته ناپیوسته است، که ویژگی‌های پایداری را داراست. بدین منظور در فصل اول، مروری بر مفاهیم آنالیز و توابع مختلط می‌شود. در فصل دوم به صورت اساسی بحث پایداری، همگرایی و مفاهیم مربوط به آن بررسی می‌شود، همچنین معادلات دیفرانسیل تأخیری مطرح می‌گردد و در این راستا تعاریف و قضایای لازم نیز ارائه می‌گردد. در فصل سوم معادله انتگرال پیچشی از نوع همرشتاین معرفی می‌شود و یک معادله تست برای پایداری ارائه می‌شود. در فصل چهارم روش انتگرالگیری مستقیم ذوزنقه‌ای را برای معادله انتگرال ذکر شده در فصل سوم به کار می‌بریم و ویژگی‌های پایداری آن بررسی می‌شود. در فصل آخر، مثال‌های عددی ارائه می‌گردد.

این پایان‌نامه، حاصل بررسی و تجزیه و تحلیل مقاله‌ای است با عنوان زیر:

E. Messina, E. Russo, A. Vecchio, A stable numerical method for volterra integral equations with discontinuous kernel, J.Math.Anal.Appl,337(2008), 1383-1393.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدماتی بر مفاهیم آنالیز و توابع مختلط

۱.۱ مقدمه

در این فصل، مروری بر مفاهیم آنالیز و توابع مختلط می‌شود. در بخش ۲.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز معرفی می‌شود. در بخش ۳.۱ تعاریف و قضایایی از توابع مختلط ارائه می‌گردد.

۲.۱ تعاریف و قضایایی بنیادی از آنالیز

۱.۲.۱ قضیه. هرگاه f یک تابع پیوسته حقیقی بر $[a, b]$ باشد که در (a, b) مشتق‌پذیر است، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

برهان. رجوع شود به [۲۰].■

۲.۲.۱ تعریف. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط باشد که بر مجموعهٔ E تعریف شده‌اند، گوییم $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت کراندار است، هرگاه عددی مثبت مانند M باشد به طوری که

$$\forall x \in E \; \forall n \in \mathbb{N} : \qquad |f_n(x)| \leq M.$$

۳.۲.۱ تعریف. گوییم دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت به تابع f همگرا است،هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشد به طوری که برای $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

را برای هر $x \in E$ ایجاب کند.

۴.۲.۱ قضیه. دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ تعریف شده بر E به طور یکنواخت همگرا است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N باشد به طوری که برای هر $m, n \geq N$ و هر $x \in E$ نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

را ایجاب کند. قضیهٔ فوق را محک کشی برای همگرایی یکنواخت گویند.

برهان. رجوع شود به [۲۰].■

۵.۲.۱ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر E باشد و $f_n \longrightarrow f$ به طور یکنواخت بر E، آنگاه f بر E پیوسته خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۲۰].■

۶.۲.۱ قضیه. فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ چنان دنباله‌ای از توابع باشد که بر $[a,b]$ مشتق‌پذیرند و به‌ازای نقطه‌ای چون $x_{\circ}$ در $[a,b]$، $\{f_n(x_{\circ})\}$ همگرا است. هرگاه $\{f'_n\}$ بر $[a,b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، $\{f_n\}$ بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگرا است و

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \qquad (a \leq x \leq b).$$

برهان. رجوع شود به [۲۰].■

۷.۲.۱ تعریف. سری $\sum_{k=۱}^{\infty} a_k$ را همگرا گوییم، هرگاه دنباله مجموع جزیی $\{s_n\}$ همگرا باشد که در آن s_n به صورت زیر است:

$$s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k.$$

۸.۲.۱ تعریف. سری $\sum a_n$ به طور مطلق همگراست،هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

۹.۲.۱ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ به طور مطلق همگرا باشد،این سری نیز همگرا است.

برهان. رجوع شود به [۲۰].■

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض می کنیم f تابعی حقیقی بر $[a,b]$ باشد. گوییم f در شرط لیپ‌شیتس یکشکل از مرتبه $\alpha > \circ$ بر $[a,b]$ صدق می‌کند در صورتی که عددی پایا مانند $M > \circ$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر x, y در $[a,b]$،

$$|f(x) - f(y)| < M|x-y|^{\alpha}.$$

۱۱.۲.۱ تعریف. مجموعه همهٔ توابع حقیقی مقدارکه روی بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ مشتقات پیوسته تا مرتبه kام دارند، با نماد $c^k(t_۱, t_۲)$ مشخص می‌شود. اگر f عضو این مجموعه باشد، می‌نویسیم $f \in c^k(t_۱, t_۲)$.

اگر f روی $(t_۱, t_۲)$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد، می‌نویسیم $f \in c^{\infty}(t_۱, t_۲)$ و f را تابعی هموار[1] می‌نامیم.

۱۲.۲.۱ تعریف. تابع $f \in c^k[t_۱, t_۲]$،هرگاه $f \in c^k(t_۱, t_۲)$ و f در نقطهٔ $t_۱$ دارای مشتق راست پیوسته مرتبهٔ kام باشد. اگر در نقطهٔ $t_۲$ نیز همین شرایط، با این تفاوت که کلمه راست با چپ تعویض گردد، برقرار باشد، گوییم $f \in c^k[t_۱, t_۲]$.

۱۳.۲.۱ تعریف. اگر $f \in c^k(t_۱, t_۲)$،آنگاه گوییم $f \in c^k(t_۱, \infty)$.

۱۴.۲.۱ تعریف. فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in S$. a را یک نقطه درونی s می‌نامیم،در صورتی که عدد $r > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\{x | x \in (a - r, a + r)\} \subseteq S.$$

۱۵.۲.۱ تعریف. فرض می‌کنیم f بر بازهٔ بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه c یک نقطه درونی $[a, b]$ باشد، $f(c_+)$ و $f(c_-)$ هر دو وجود داشته باشند، (با این توضیح که مقادیر $f(c_+)$ و $f(c_-)$، مقادیر حد راست و چپ f در نقطهٔ c هستند) آنگاه

الف) $f(c) - f(c-)$ را جهش دست چپی f در c،

ب) $f(c+) - f(c)$ را جهش دست راستی f در c و

ج) $f(c+) - f(c-)$ را جهش f در c می‌نامیم.

هرگاه یکی از سه‌مقداربیان شده در الف،ب،ج صفر نباشد، می‌گوییم c یک ناپیوستگی جهشی f است.

1) Smooth

۱۶.۲.۱ قضیه (مقدار میانگین برای انتگرال‌ها[1]). فرض می کنیم f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد و g تابعی‌باشد که بر $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد، آنگاه نقطه $\xi \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

برهان. رجوع شود به [۲].■

۱۷.۲.۱ تعریف. فرض می‌کنیم دنبالهٔ $\{a_n\}$، دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد. همچنین عددی حقیقی مانند U باشد که در دو شرط زیرین صدق کند:

یکم) به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشد به قسمی که اگر $n > N$،

$$a_n < U + \varepsilon.$$

دوم) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و $m > 0$ داده شده، عدد صحیحی مانند $n > m$ باشد به قسمی که

$$a_n > U - \varepsilon.$$

در این صورت، U را حد بالایی[2] $\{a_n\}$ نامیده، می‌نویسیم

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

حد پایینی[3] $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} b_n$$

که در آن، به‌ازای هر n، $b_n = -a_n$.

1) Integral mean-value 2) Suprior limit 3) Inferior limit

۱۸.۲.۱ قضیه. فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد. در این صورت:

آ) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

ب) این دنباله وقتی و فقط وقتی همگرا است که $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ و $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ هر دو متناهی و مساوی باشند.که در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

ج) اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$، $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \neq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$، گوئیم $\{a_n\}$ نوسان می‌کند.

برهان. رجوع شود به ([۲]).■

با توجه به تعریف ۱۷.۲.۱، می‌توان برای تابع دلخواه $y(t)$، حد بالایی و پایینی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}[\sup\{y(t)|t<\infty\}],$$

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}[\inf\{y(t)|t<\infty\}].$$

برای مثال، اگر $y(t)=\sin t$ را در نظر بگیریم:

$$\sup\{\sin t|t<\infty\} = ۱, \qquad \inf\{\sin t|t<\infty\} = -۱.$$

بنابراین

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) = ۱, \qquad \liminf_{t\to\infty} y(t) = -۱.$$

همچنین می‌دانیم $\lim\limits_{t\to\infty} \sin t$ وجود ندارد، که با قسمت (ب) قضیه ۱۸.۲.۱ سازگاری دارد.

۱۹.۲.۱ تعریف. نقطه p یک نقطه حدی مجموعه E است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q\in E$ غیر از p باشد. اگر $p\in E$ و p نقطهٔ حدی E نباشد آن‌گاه p یک نقطهٔ تنهای E نام دارد.

۲۰.۲.۱ تعریف. فرض می‌کنیم $p=\{x_{۱},\dots,x_n\}$ یک افراز از $[a,b]$ باشد و t_k نقطه‌ای در زیر بازهٔ $[x_{k-۱},x_k]$ باشد. هر مجموع به شکل $s(p,f,\alpha)=\sum_{k=۱}^{n}f(t_k)\Delta\alpha_k$ را یک مجموع ریمان ـ اشتیلیس f بر حسب α می‌نامیم که α تابعی پله‌ای است و $\Delta\alpha_k=\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-۱})$. گوییم f برحسب α، انتگرال ریمان دارد، در صورتی که عددی مانند A با این ویژگی وجود داشته باشد که به‌ازای هر $\varepsilon>۰$، یک افراز از $[a,b]$ مانند p_ε باشد به قسمی که به‌ازای هر افراز p ظریف‌تر از p_ε و هر انتخاب نقطه‌ای مانند t_k در $[x_{k-۱},x_k]$، داشته باشیم:

$$|s(p,f,\alpha)-A|<\varepsilon.$$

در این صورت، می‌نویسیم $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\int_a^b f(t)d\alpha(t)=A$. با این تعریف، اگر $|f|\in R(\alpha)$، گوئیم f بر $[a,b]$ به طور مطلق انتگرال‌پذیر است.

۲۱.۲.۱ تعریف. اگر $\alpha(x)=x$، در این حالت، انتگرال ریمان ـ اشتیلیس به انتگرال ریمان تبدیل می‌شود. هرگاه به‌ازای هر b که $a\geq b$، تابع f بر $[a,b]$ انتگرال ریمان داشته باشد و حد $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ وجود داشته باشد، گوییم f بر $[a,b]$، انتگرال ریمان مجازی دارد و انتگرال ریمان مجازی f با $\int_a^\infty f(x)dx$ نشان داده می‌شود و با معادلهٔ زیرین تعریف می‌گردد:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

۲۲.۲.۱ تعریف. فرض کنید X یک فضای برداری بر R باشد. یک نرم برداری بر X تابعی است به صورت $\|\cdot\|:X\longrightarrow\mathbb{R}^{\geq ۰}$، که در شرط های زیر صدق کند:

آ) به‌ازای هر $x\in X$، $\|x\|\geq ۰$ و $\|x\|=۰$ اگر و فقط اگر $x=۰$.

ب) به‌ازای هر $x\in X$ و $\alpha\in\mathbb{R}$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$.

ج) به‌ازای هر $x,y\in X$، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

در این صورت X را یک فضای نرم‌دار گوییم.

۳.۱ تعاریف و قضایایی بنیادی از توابع مختلط

۱.۳.۱ تعریف. تابع f از متغیر مختلط z در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی است اگر مشتق آن نه تنها در $z_\circ$ بلکه در هر نقطهٔ z از یک همسایگی $z_\circ$ وجود داشته باشد. تابع f در ناحیه R تحلیلی است اگر در هر نقطه R تحلیلی باشد.

۲.۳.۱ تعریف. اگر تابع f در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی نباشد، اما در نقطه‌ای از هر همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد، آنگاه $z_\circ$ یک نقطهٔ تکین یا تکینی تابع f نامیده می‌شود. نقطهٔ تکین $z_\circ$ را تنها گوییم، هرگاه یک همسایگی از $z_\circ$ وجود داشته باشد که f در سراسر آن غیر از نقطهٔ $z_\circ$، تحلیلی باشد.

به طور مثال، اگر $f(z) = \frac{\text{۱}}{z}$ $(z \neq \circ)$، آنگاه $f'(z) = -\frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}}$ و f' در هر نقطه غیر از $z = \circ$ وجود دارد. بنابراین $z = \circ$ یک نقطه تکین تنهاست.

۳.۳.۱ قضیه. فرض می‌کنیم f در نقطهٔ $z_\circ$ که یک صفر f است تحلیلی باشد. همسایگی‌ای از $z_\circ$ هست که در سراسر آن، f صفر دیگری ندارد مگر این که f متحد با صفر باشد. یعنی صفرهای یک تابع تحلیلی تنهایند.

برهان. رجوع شود به [۱۰].■

۴.۳.۱ تعریف. قوس c، مجموعه‌ای از نقاط $z = (x, y)$ در صفحهٔ مختلط است به قسمی که

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای از پارامتر حقیقی tاند.

مناسب است نقاط قوس c را به صورت زیر بیان کنیم:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \qquad (a \leq t \leq b), \qquad i^{\text{۲}} = -\text{۱}. \qquad (\text{۱}\cdot\text{۱})$$

با توجه به پیوستگی $x(t)$ و $y(t)$، $z(t)$ نیز پیوسته است.

قوس c یک قوس ساده است، اگر خودش را قطع نکند، یعنی $z(t_1) \neq z(t_2)$ وقتی $t_1 \neq t_2$ است.

وقتی قوس c ساده است بجز این که $z(b) = z(a)$، گوئیم c یک منحنی سادهٔ بسته است. قوس c که با رابطهٔ (۱.۱) تعریف شد، هموار است هرگاه $z'(t)$ در بازهٔ $a \leq t \leq b$ وجود داشته و پیوسته باشد و $z'(t)$ در این بازه هیچ‌گاه صفر نشود.

مرز، یا قوس تکه‌ای هموار، قوسی است متشکل از تعدادی متناهی قوس هموار که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است. در صورتی که فقط مقادیر ابتدایی و انتهایی $z(t)$ یکی باشند، مرز c را یک مرز ساده بسته می‌نامند. طول یک مرز یا یک مرز ساده بسته، مجموع طول قوس‌های تشکیل دهنده آن است.

۵.۳.۱ تعریف. یک مجموعهٔ باز S همبنداست اگرهر زوج از نقاط آن را بتوان با یک خط شکسته، متشکل از تعدادی متناهی پاره‌خط مستقیم، که کاملاً در S واقع است به هم وصل کرد. یک مجموعه باز که همبند باشد، حوزه نامیده می‌شود.

۶.۳.۱ قضیه (کشی ـ گورسا[1]). اگر تابع f در همهٔ نقاط درون و روی مرز سادهٔ بسته c تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_c f(z)dz = 0.$$

برهان. رجوع شود به [۱۰].■

۷.۳.۱ قضیه. فرض می‌کنیم c_1 و c_2 دو دایره متحدالمرکز به مرکز z_0 و شعاع‌های r_1 و r_2، که $r_2 < r_1$، باشند، اگر f بر c_1، c_2 و در سراسر ناحیه طوقی بین دو دایره تحلیلی باشد، آنگاه در هر نقطهٔ z از آن حوزه $f(z)$ با بسط

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (۲.۱)$$

1) Cauchy-Goursat

نمایش داده می‌شود که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \qquad (3 \cdot 1)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}ds, \quad (n = 1, 2, \dots). \qquad (4 \cdot 1)$$

هر دو مسیر انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده‌اند. سری (۲.۱) را سری لوران[1] گویند.

برهان. رجوع شود به [۱۰].■

اگر f در هر نقطهٔ درون و روی c_1 بجز در نقطهٔ z_0 تحلیلی باشد آنگاه r_2 را می‌توان به دلخواه کوچک درنظر گرفت، در این صورت سری (۲.۱) را می‌توان برای هر z به صورت $0 < |z - z_0| < r_1$ در نظر گرفت.

۸.۳.۱ تعریف. اگر z_0 نقطهٔ تکین تنهای f باشد، عدد مثبت r_1 وجود دارد به طوری که تابع f در هر نقطهٔ z که $0 < |z - z_0| < r_1$ تحلیلی است. در این حوزه تابع با سری لوران به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots \qquad (5 \cdot 1)$$

بخشی از سری که شامل توان‌های منفی $z - z_0$ است، **قسمت اصلی f در** z_0 نامیده می‌شود و b_1 از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz$$

که در آن c مرز سادهٔ بستهٔ دلخواهی حول z_0 است که در جهت مثبت، جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، گرفته شده و f بر c و داخل آن غیر از خود z_0 تحلیلی است. عدد مختلط b_1 که ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در رابطهٔ (۵.۱) است، **مانده[2] f در نقطهٔ تکین تنهای** z_0 نامیده می‌شود.

1) Laurent 2) Residue

۹.۳.۱ قضیه (مانده). فرض کنید c مرز ساده و بسته‌ای باشد که تابع f در درون و روی آن غیر از تعدادی متناهی نقطهٔ تکین z_1، z_2،...، z_n که در داخل cاند، تحلیلی است. اگر B_1، B_2،...، B_n معرف مانده‌های f در این نقاط باشند،آنگاه

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i(B_1 + B_2 + \cdots + B_n).$$

که در آن c در جهت مثبت گرفته شده است.

برهان. رجوع شود به [۱۰].■

۱۰.۳.۱ تعریف. با توجه به تعریف ۸.۳.۱ اگر قسمت اصلی f در z_0 شامل حداقل یک جملهٔ ناصفر بوده، اما تعداد این گونه جملات متناهی باشد، یعنی عددی چون m باشد که $b_m \neq 0$ و برای $i > m$، $b_i = 0$.دراین صورت بسط (۵.۱) به صورت زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}, \qquad (0 < |z-z_0| < r_1).$$

در این حالت **نقطهٔ تکین تنهای** z_0 **را قطب مرتبهٔ** m می‌نامند. یک قطب مرتبه $m = 1$ را قطب ساده گویند.

۱۱.۳.۱ قضیه. تابع f مفروض است.فرض کنید که به‌ازای عدد صحیح و مثبتی مانند m،تابع $\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)$را بتوان طوری در z_0 تعریف کرد که درآن تحلیلی باشد و $\varphi(z_0) \neq 0$. در این صورت f دارای یک قطب مرتبهٔ m در z_0 است و مانده‌اش در آن نقطه، اگر $m > 1$، به صورت زیر معین می‌شود:

$$b_1 = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!},$$

در غیر این صورت به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$b_1 = \varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

برهان. رجوع شود به [۱۰].■

فصل دوم

معادله انتگرال، معادله دیفرانسیل و بحث پایداری

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مقدماتی از معادله انتگرال بیان می‌کنیم. در بخش ۳.۲ معادله دیفرانسیل تأخیری و شبه چندجمله‌ای مشخصه معرفی می‌شود. در بخش ۳.۳ مفاهیم سازگاری و همگرایی معرفی می‌شوند و بخش پایانی به بحث پایداری و تعاریف آن می‌پردازد.

۲.۲ معرفی چند نوع معادله انتگرال

۱.۲.۲ تعریف. یک معادله انتگرال به شکل زیر را معادلهٔ انتگرال فردهلم[1] نوع دوم (غیرخطی) می‌نامند:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s,y(s))ds, \qquad t,s \in [a,b]. \tag{۱.۲}$$

1) Fredholm 2) Forcing function

که در آن f و k توابع معلوم و y تابع مجهول است. گاهی به تابع f با عنوان تابع اجبار[2] یا تابع اولیه[1] رجوع می‌شود.

یک معادله انتگرال به صورت زیر را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم خطی می‌نامند:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)y(s)ds, \qquad t,s \in [a,b].$$

۲.۲.۲ تعریف. اگر برای $t < s$ داشته باشیم $k(t,s,y(s)) = \circ$، آنگاه معادله انتگرال (۱.۲) به صورت زیر است:

$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s,y(s))ds, \qquad a \leq s \leq t \leq b.$$

و آن را یک معادله انتگرال ولترا[2] نوع دوم (غیرخطی) می‌نامیم. به همین ترتیب معادله انتگرال ولترای متناظر با یک معادله انتگرال خطی نیز قابل تعریف است.

۳.۲.۲ تعریف. معادله انتگرال همرشتاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(t) = f(t) + \int_\circ^\infty k(t,s)g(s;y)ds,$$

و معادله ولترای متناظر آن به صورت زیر است:

$$y(t) = f(t) + \int_\circ^t k(t,s)g(s;y)ds.$$

۴.۲.۲ تعریف. معادله انتگرال پیچشی نوع دوم [3] به صورت زیر است:

$$y(t) = f(t) + \int_\circ^t k(t-s)g(s;y)ds, \qquad \circ \leq s \leq t \leq T.$$

1) Initial function 2) Volterra 3) Convolution integral equation of the second kind