دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بررسی جبر شعاع طیفی و عملگرهای نرمال

استاد راهنما

دکتر محمدرضا جبارزاده

استاد مشاور

دکتر اصغر رنجبری

پژوهشگر

مهدیه صوفیانی

۱۳۹۰

سپاس گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضا جبارزاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از جناب آقای پروفسور پترویچ که طی مکاتبات اینترنتی اینجانب را راهنمایی نمودند سپاسگزاری می نمایم.

از جناب آقای دکتر اصغر رنجبری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر حمید واعظی که زحمت داوری رساله را تقبل فرمودند سپاسگزاری می نمایم.

از کلیه اساتید گرامی دوران تحصیلم، دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر صداقت شهمراد معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر غلامرضا حجتی معاونت آموزشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حمید موسوی مدیرگروه ریاضی محض، و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان، تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش

وجودشان، که در طول کار این پایان نامه پشتیبان من بودند.

مهدیه صوفیانی

آذر ۱۳۹۰

نام خانوادگی: صوفیانی نام: مهدیه

عنوان پایان‌نامه: بررسی جبر شعاع طیفی و عملگرهای نرمال

استاد راهنما: دکتر محمدرضا جبارزاده

استاد مشاور: دکتر اصغر رنجبری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: پاییز ۱۳۹۰ تعداد صفحه:...

کلیدواژه‌ها: زیرفضای پایا، طیف عملگر، جبر شعاع طیفی، عملگر نرمال

چکیده

در این پایان نامه نوع جدیدی از جبرهای عملگری را معرفی کرده و به بررسی برخی از خواص اساسی آنها می پردازیم. نتایج اصلی به دست آمده در این مطالعه در مورد عملگرهای نرمال است. یکی از خواص مهم این جبرها که برای مطالعه ی ما ضروری است این است که شامل جا بجاگرهای عملگر مورد بررسی می باشند. نشان می دهیم هرگاه عملگر غیر صفر N نرمال بوده و مضرب اسکالری از همانی نباشد، این شمول اکید است.

مهمترین نتیجه ی ما دست یافتن به تعمیمی از قضیه ی مشهور لومونوسف است. بنا به قضیه ی لومونوسف هر عملگر فشرده و غیر صفر دارای زیرفضایی ابرپایا و نابدیهی است؛ ثابت می کنیم جبر طیفی متناظر با عملگر نرمال دارای زیرفضای پایای نابدیهی است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه ی پژوهش و مقدمه

موضوع زیرفضاهای پایا یکی از موضوعات چالش برانگیز ریاضی است که سال ها ذهن ریاضی دانان را به خود مشغول نموده است. در واقع آنان به دنبال پاسخی برای این پرسش بوده اند که چه هنگام یک عملگر دلخواه دارای زیرفضایی پایا و نابدیهی است.

در سال ۱۹۷۳ «لومونوسف» ریاضی دان روسی جواب را برای عملگرهای فشرده پیدا کرد. وی در مرجع [۱۶] ثابت کرد که هر عملگر فشرده ی غیر صفر دارای زیرفضای ابرپایا ی نابدیهی است. پس از آن بود که مقالات متعددی در زمینه ی زیرفضاهای پایا ارائه شد. اساسا ریشه ی پیدایش این مسأله به نظریه ی بردارهای ویژه در فضاهای با بعد متناهی برمی گردد. اگر x یک بردار ویژه ی عملگر T باشد، آنگاه مجموعه ی $F = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ یک زیرفضای پایای T خواهد بود. این مطلب باعث شد این سؤال مطرح شود که آیا در فضاهای با بعد نامتناهی نیز چنین زیرفضاهایی متناظر با عملگر T وجود دارند؟ در این راستا به جز قضیه ی لومونوسف قضایای ارزشمند دیگری نیز ثابت شده است. قبل از لومونوسف، «فون نویمن» نشان داد که هر عملگر فشرده روی یک فضای با بعد بزرگتر از ۱ دارای زیرفضای پایای نابدیهی است. در سال ۱۹۵۵ «اسمیت» نشان داد که گفته ی فون نویمن در هر فضای باناخ برقرار است. در سال ۱۹۶۶ «رابینسون» و «برنشتاین» نشان دادند که اگر عملگر T به فرم چند جمله ای فشرده باشد آنگاه دارای زیرفضایی پایاست.

بعد لومونوسف بود که وجود زیرفضایی ابرپایا را برای عملگرهای فشرده ثابت کرد. در سال ۱۹۸۴ «چارلز رید» عملگری را معرفی کرد که هیچ زیرفضای پایایی نداشت. و بالاخره «پترویچ» و «لامبرت» بودند که یک رده از جبرهای عملگری را روی فضای هیلبرت معرفی کردند که نه تنها دارای زیرفضای پایای نابدیهی بودند، بلکه به تعمیمی از قضیه ی لومونوسف نیز منتج می شدند.

این جبرها تحت عنوان جبرهای طیفی در مرجع [۱۴] معرفی و مطالعه شده اند. جبر متناظر با عملگر A با نماد B_A نمایش داده می شود. یکی از خواص مهم B_A آن است که شامل $\{A\}'$، یعنی جابجاگرهای عملگر A است. لذا هر زیرفضایی که برای B_A پایا باشد، خود به خود برای A ابرپایا خواهد بود. در مرجع [۱۴] نشان داده شده که یک چنین حالتی وقتی رخ می دهد که A یک عملگر فشرده باشد.

در این پایان نامه که بر پایه ی مرجع [۲] تنظیم شده است، روی حالتی که عملگر N نرمال است، کار می کنیم و یک تعریف کامل از B_N ارائه می دهیم. یک نتیجه ی مستقیم و بسیار مهم از تعریف B_N این است که: اگر N مضرب اسکالری از عملگر همانی باشد آنگاه $B_N = \mathcal{L}(H)$ جبری است که هیچ زیرفضای پایای نابدیهی ندارد ($\mathcal{L}(H)$ نشانگر جبر تمام عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت H می باشد).

در قضیه ای نشان خواهیم داد که $B_A = \mathcal{L}(H)$ اگر و تنها اگر A متشابه با مضرب ثابتی از یک ایزومتری باشد؛ یک عملگر نرمال از این نوع باید یکانی باشد، بنابراین $B_N = \mathcal{L}(H)$، هرگاه N مضرب ثابتی از یک عملگر یکانی باشد. برای بررسی اینکه در چه حالتی B_N دارای زیرفضای پایای نابدیهی است، تجزیه ی متعارف انقباض $\frac{N}{\|N\|}$ (یعنی $\frac{N}{\|N\|} = U \oplus T$

که در آن U یک عملگر یکانی و T یک انقباض کاملا غیر یکانی است) را مورد ملاحظه قرار می دهیم. البته هر کدام از دو جمعوند مستقیم ممکن است موجود نباشد؛ نتیجه ی اصلی ما این است که وقتی هر دو وجود داشته باشند B_N زیرفضای پایای نابدیهی دارد و اگر U وجود نداشته باشد آنگاه B_N یک زیرجبر سره ی به طور ضعیف چگال $\mathcal{L}(H)$ است؛ و همانطور که قبلا ذکر شد اگر T موجود نباشد آنگاه $B_N = \mathcal{L}(H)$.

دومین نتیجه ی ما این است که اگر N یک عملگر نرمال غیر اسکالر باشد آنگاه شمول $\{N\}' \subset B_N$ اکید است. برای اثبات وجود یک عملگر $T \in B_N \setminus \{N\}'$ یک معادله ی عملگری به فرم

$$NT = CTN$$

را مطالعه خواهیم کرد و شرایطی که وجود یک جواب غیر صفر T برای این معادله را تضمین می کنند، تعیین خواهیم کرد. انگیزه ی این کار این حقیقت است که اگر یک چنین T ای موجود باشد و عملگر C به طور قوی کراندار باشد آنگاه T متعلق به B_N است. به علاوه اگر C و N هر دو هسته ی بدیهی داشته باشند آنگاه هیچ عملگر T با N جابجا نمی شود.

پیشتر موارد خاصی از این معادله یعنی معادله هایی به فرم

$$NT = \lambda TN$$

که $\lambda \in \mathbb{C}$ و N لزوما نرمال نیست، در مراجع [۵]، [۶]، [۱۵] و [۱۹] مطالعه شده اند. این معادله همچنین در مرجع [۳]، وقتی N عملگر ولترا روی $L^2(0,1)$ است و در مرجع

[۴]، در حالتی که N یک انقباض $C_\circ$ دلخواه است مورد بررسی قرار گرفته است.
در این دو مقاله یک عدد مختلط λ که به ازای آن معادله ی $NT = \lambda TN$ یک جواب غیر صفر داشته باشد، مقدار ویژه ی توسعه یافته ی N نامیده می شود.
واضح است که اگر $|\lambda| \leqslant ۱$ یک مقدار ویژه ی توسعه یافته ی N باشد، آنگاه λI به طور قوی کراندار است و $T \in B_N$. به علاوه اگر $\lambda \neq ۱$، آنگاه N هسته ی بدیهی دارد.
متاسفانه یک مقدار ویژه ی توسعه یافته ی $\lambda \neq ۱$ حتی زمانی که N نرمال است لزوما وجود ندارد. این مسأله ضرورت مطالعه ی ما درباره ی این معادله را مشخص می کند.
نشان خواهیم داد که برای هر عملگر نرمال N، یک انقباض C با این خاصیت که $ker(C - I) = (\circ)$ و یک عملگر غیر صفر T که در معادله ی $NT = CTN$ صدق می کند وجود دارند؛ بنابراین چنین T ای می تواند موجود باشد علی رغم اینکه با N جابجا نمی شود.
لازم است در همین جا اشاره کنیم تعاریف مقدماتی این پایان نامه عمدتا از مراجع [۷]، [۲۴] و [۲۵] آورده شده اند.

فصل ۲

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۲. (فضای باناخ). هر فضای نرمدار کامل را یک فضای باناخ نامیم.

تعریف ۲.۱.۲. (جبر باناخ). جبر مختلط A را یک جبر باناخ گوییم هرگاه A یک فضای باناخ نسبت به نرم صادق در نامساوی ضربی

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$$

بوده و A شامل عنصر یکه ی e باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $xe = ex = x$.

تعریف ۳.۱.۲. (فضای ضرب داخلی). فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام حاصل ضرب داخلی x و y چنان مربوط شده باشد که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$،

۲. اگر $x, y, z \in H$ آنگاه

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$$

۳. اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$$

۴. برای هر $x \in H$ داریم $\langle x, x\rangle \geq 0$،

۵. $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

بنا بر (۴)، می توان $\| x \|$، یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه ی دوم نامنفی $\langle x, x\rangle$ تعریف کرد. لذا H یک فضای متریک است.

تعریف ۴.۱.۲. (فضای هیلبرت). هر فضای ضرب داخلی کامل H را یک فضای هیلبرت نامیم.

اگر فضای هیلبرت H دارای زیرمجموعه ای چگال و شمارش پذیر باشد، گوییم H تفکیک پذیر است.

یک نگاشت خطی از H به H را عملگر خطی می نامیم و جبر تمام عملگرهای خطی کراندار روی H را با $\mathcal{L}(H)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۲. دو عملگر M و N را متشابه گوییم هرگاه یک عملگر وارون پذیر مانند T وجود داشته باشد به طوری که

$$M = TNT^{-1}.$$

تعریف ۶.۱.۲. (عملگر فشرده). عملگر T را فشرده گوییم هرگاه $\overline{T(M)}$ به ازای هر زیرمجموعه ی کراندار M از H فشرده باشد.

تعریف ۷.۱.۲. (عملگر به طور قوی کراندار). فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. عملگر $C : X \longrightarrow X$ را به طور قوی کراندار گوییم اگر $M > 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\| C^n \| \leqslant M$.

تعریف ۸.۱.۲. (انقباض). عملگر کراندار $T : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای برداری نرمدار X و Y انقباض نامیده می شود اگر $\| T \| \leqslant 1$.

تعریف ۹.۱.۲. (عملگر الحاقی). اگر T یک عملگر روی فضای هیلبرت H باشد، الحاقی T که آن را با T^* نشان می دهیم، عملگر یکتایی است که در

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

برای هر x و y متعلق به H صدق می کند.

تعریف ۱۰.۱.۲. گوییم عملگر $T \in \mathcal{L}(H)$

۱) نرمال است اگر $TT^* = T^*T$،

۲) خودالحاق (یا هرمیتی) است اگر $T^* = T$،

۳) یکانی است اگر $T^*T = TT^* = I$ که در آن I عملگر همانی بر H است،

۴) تصویر است اگر $T^2 = T$.

تعریف ۱۱.۱.۲. (زیرفضای پایا). زیرفضای M از H را نسبت به عملگر A پایا می نامیم هرگاه برای هر $x \in M$ داشته باشیم:

$$Ax \in M,$$

یا به عبارت دیگر $AM \subseteq M$.

گردایه ی همه ی زیرفضاهای H که تحت A پایا هستند را با $LatA$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۲. (زیرفضای ابرپایا). M را یک زیرفضای ابرپایای عملگر A می نامیم هرگاه M نسبت به هر عملگر جابجا شونده با A، پایا باشد.

M را نابدیهی گوییم هرگاه $M \neq \circ$ و $M \neq H$.

تعریف ۱۳.۱.۲. (زیرفضای کاهشی). گوییم M یک زیرفضای کاهشی برای عملگر A است هرگاه، $AM \subseteq M$ و $AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$. ($M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M; \langle x, y\rangle = \circ\}$).

تعریف ۱۴.۱.۲. (انقباض کاملا غیر یکانی). یک عملگر انقباض T به طور متعارف می تواند به جمع مستقیم متعامد $T = \Gamma \oplus U$ تجزیه شود که در آن U یک عملگر یکانی و Γ کاملا غیر یکانی است به این معنی که هیچ زیر فضای کاهشی وجود ندارد که تحدید Γ به آن زیرفضا یکانی باشد. اگر $U = \circ$، آنگاه T یک انقباض کاملا غیر یکانی نامیده می شود.

تعریف ۱۵.۱.۲. (طیف یک عملگر). طیف عملگر T مجموعه ی تمام اعداد مختلطی مانند λ است که به ازای آنها $T - \lambda I$ وارون پذیر نیست.

طیف عملگر T را با $\sigma(T)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۲. (طیف نقطه ای). طیف نقطه ای عملگر T مجموعه ی تمام λ های متعلق به $\sigma(T)$ است که به ازای آنها $T - \lambda$ یک به یک نیست و آن را با $\Pi_{\circ}(T)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۲. (شعاع طیفی). شعاع طیفی عملگر T را با $r(T)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$r(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

تعریف ۱۸.۱.۲. (عملگر شبه پوچ توان). عملگر T را شبه پوچ توان گوییم هرگاه $r(T) = 0$.

رده ی تمام عملگرهای شبه پوچ توان را با $\mathcal{Q}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۲. (عملگر $\otimes$). اگر x و y متعلق به H باشند، آنگاه عملگر $x \otimes y$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall z \in H \quad (x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x.$$

تعریف ۲۰.۱.۲. (عملگر با رتبه ی متناهی). عملگر $T : V \longrightarrow W$ بین دو فضای برداری را یک عملگر با رتبه ی متناهی گوییم هرگاه برد آن متناهی البعد باشد.

تعریف ۲۱.۱.۲. (عملگر با رتبه ی ۱). عملگر $T : V \longrightarrow W$ بین دو فضای برداری را یک عملگر با رتبه ی ۱ گوییم هرگاه برد آن یک بعدی باشد. بنابراین اگر $T : V \longrightarrow W$ یک عملگر با رتبه ی ۱ باشد و w یک بردار غیر صفر در برد T باشد آنگاه یک تابعی خطی f روی V وجود دارد به طوری که به ازای هر $v \in V$، $T(v) = f(v)w$.

عملگر $x \otimes y$ یک عملگر با رتبه ی ۱ است.

تعریف ۲.۱.۲۲. فرض کنید λ یک اندازه ی دلخواه (حقیقی یا مختلط) روی σ-جبر M باشد. اگر یک مجموعه ی $A \in M$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $E \in M$، $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ آنگاه گوییم λ روی A متمرکز است. این مطلب معادل این است که داشته باشیم $\lambda(E) = \circ$ هرگاه $E \cap A = \phi$.

تعریف ۲.۱.۲۳. فرض کنید M یک σ-جبر باشد و λ_1 و λ_2 اندازه هایی روی M باشند. اگر دو مجموعه ی مجزای A و B وجود داشته باشند به طوری که λ_1 روی A و λ_2 روی B متمرکز باشند آنگاه گوییم λ_1 و λ_2 دو به دو منفرد هستند و با نماد $\lambda_1 \perp \lambda_2$ نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۲۴. فرض کنید (X, Σ, μ) فضای اندازه ی کامل σ-متناهی باشد. $C \in \Sigma$ با شرط $\mu(C) > \circ$ را یک اتم نسبت به اندازه ی μ نامیم هرگاه به ازای هر $F \in \Sigma$، اگر $F \subseteq C$ آنگاه $\mu(F) = \circ$، یا $\mu(F) = \mu(C)$. ثابت می شود که هر فضای اندازه ی σ-متناهی را می توان به صورت $X = B \cup (\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$ تجزیه کرد که در آن B یک مجموعه ی غیر اتمی و A_i ها تعداد شمارا از اتم هایی با اندازه ی متناهی می باشند(مرجع [۲۶]).

۲.۲ قضیه ی لومونوسف و چند قضیه ی مقدماتی

لم ۲.۲.۱. *(لم لومونوسف). فرض کنید $\Re$ یک زیرجبر از $\mathcal{L}(H)$ بوده و $Lat\Re = \{\{\circ\}, H\}$ و همچنین K عملگر فشرده و غیر صفری روی H باشد. آنگاه عملگری مانند $A \in \Re$ موجود است به طوری که $1 \in \Pi_\circ(AK)$.*

قضیه ۲.۲.۲. *(قضیه لومونوسف). هر عملگر فشرده و غیر صفر دارای زیرفضایی ابرپایا و نابدیهی است.*

قضیه ۳.۲.۲. *اگر $U \in \mathcal{L}(H)$، سه حکم زیر هم ارزند.*

۱) U *یکانی است.*

۲) $\mathcal{R}(U) = H$ *و به ازای هر* $x \in H$ *و* $y \in H$، $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

۳) $\mathcal{R}(U) = H$ *و و به ازای هر* $x \in H$، $\| Ux \| = \| x \|$.

برهان. هرگاه U یکانی باشد، آنگاه $\mathcal{R}(U) = H$ زیرا $UU^* = I$ و همچنین $U^*U = I$. در نتیجه

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle.$$

لذا حکم (۱) حکم (۲) را ایجاب می کند. واضح است که حکم (۲) حکم (۳) را ایجاب می کند. هرگاه (۳) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $x \in H$،

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \| Ux \|^۲ = \| x \|^۲ = \langle x, x\rangle,$$

در نتیجه $U^*U = I$. ولی (۳) همچنین ایجاب می کند که U یک ایزومتری خطی از H به روی H است؛ در نتیجه U در $\mathcal{L}(H)$ وارون پذیر است. چون $U^*U = I$، پس $U^{-۱} = U^*$. و لذا U یکانی است (مرجع [۲۵]). □

قضیه ۴.۲.۲. *عملگر* $T \in \mathcal{L}(H)$ *نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر* $x \in H$،

$$\| Tx \| = \| T^*x \| .$$

عملگرهای نرمال T خواص زیر را خواهند داشت:

۱) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$.

۲) $\mathcal{R}(T)$ در H چگال است اگر و فقط اگر T یک به یک باشد.

۳) T وارون پذیر است اگر و فقط اگر $\delta > 0$ ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in H$،

$\| Tx \| \geq \delta \| x \|$.

۴) هرگاه به ازای $x \in H$ ای و $\alpha \in \mathbb{C}$ ای داشته باشیم $Tx = \alpha x$، آنگاه $T^*x = \overline{\alpha}x$.

۵) هرگاه α و β مقادیر ویژه ی متمایزی از T باشند، آنگاه فضاهای ویژه ی نظیر متعامدند (مرجع [۲۵]).

قضیه ۵.۲.۲. اگر T یک عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ X باشد آنگاه طیف $\sigma(T)$ فشرده است (مرجع [۱۳] ص ۳۷۷).

قضیه ۶.۲.۲. اگر f متعلق به جبر باناخ B باشد و $\| 1 - f \| < 1$، آنگاه f وارون پذیر است.

برهان. اگر قرار دهیم $\eta = \| 1 - f \| < 1$، آنگاه برای هر M و N طبیعی که $N \geq M$، داریم

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n=0}^{N}(1-f)^n - \sum_{n=0}^{M}(1-f)^n \| &= \| \sum_{n=M+1}^{N} (1-f)^n \| \\
&\leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \| 1 - f \|^n \\
&= \sum_{n=M+1}^{N} \eta^n \leqslant \frac{\eta^{M+1}}{1-\eta}
\end{aligned}$$