دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

موجک‌ها و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری

استاد راهنما:
دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور:
دکتر علی‌مردان شاهرضایی

دانشجو:
حمیده راستی‌فر

بهمن ماه ۱۳۹۰

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه، حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری خطی با شرایط اولیه و کرانه‌ای به شکل‌های زیر با استفاده از موجک هار می‌باشد:

معادله دیفرانسیل کسری - زمانی :

$$^{C}D_t^{\alpha}y(x,t)=F(x,t,y(x,t),\frac{\partial y(x,t)}{\partial x},\frac{\partial^{۲} y(x,t)}{\partial x^{۲}},\cdots,\frac{\partial^{n} y(x,t)}{\partial x^{n}});\quad x,t\geq ۰\,,$$

که در آن شرایط اولیه و کرانه‌ای با $۰<\alpha\leq ۱$ به صورت زیر:

$$y(x,۰)=f_{۱}(x)\,,\quad \frac{\partial^{i} y(۰,t)}{\partial x^{i}}=g_i(t)\,;\quad i=۰,۱,\cdots,n-۱\,,$$

و در حالتی که $۱<\alpha\leq ۲$ به شکل زیر است:

$$\begin{gathered} y(x,۰)=f_{۱}(x)\,,\quad \frac{\partial y(x,۰)}{\partial t}=f_{۲}(x)\,,\\ \frac{\partial^{i} y(۰,t)}{\partial x^{i}}=g_i(t)\,;\quad i=۰,۱,\cdots,n-۱\,. \end{gathered}$$

معادله دیفرانسیل کسری - مکانی :

$$^{C}D_x^{\beta}y(x,t)=F(x,t,y(x,t),\frac{\partial y(x,t)}{\partial t},\frac{\partial^{۲} y(x,t)}{\partial t^{۲}},\cdots,\frac{\partial^{n} y(x,t)}{\partial t^{n}});\quad x,t\geq ۰\,,$$

که در آن شرایط اولیه و کرانه‌ای با $۰<\beta\leq ۱$ به صورت زیر:

$$y(۰,t)=g_{۱}(t)\,,\quad \frac{\partial^{i} y(x,۰)}{\partial t^{i}}=f_i(x)\,;\quad i=۰,۱,\cdots,n-۱\,,$$

و در حالتی که $۱ < \beta \leq ۲$ به شکل زیر است:

$$y(۰,t) = g_۱(t)\,, \quad \frac{\partial y(۰,t)}{\partial x} = g_۲(t)\,,$$
$$\frac{\partial^i y(x,۰)}{\partial t^i} = f_i(x)\,; \quad i = ۰, ۱, \cdots, n - ۱\,,$$

که در آن‌ها $y(x,t)$ تابع مجهول، ${}^C D_t^\alpha y(x,t)$ مشتق کسری - زمانی کاپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$ و ${}^C D_x^\beta y(x,t)$ مشتق کسری - مکانی کاپوتو از مرتبه $\beta > ۰$ است.
در روش ارائه شده، جواب مسأله را به صورت:

$$H^T_{m\times m}(x).C_{m\times m}.H_{m\times m}(t)\,.$$

تقریب می‌زنیم که در آن $C_{m\times m}$ ماتریس مجهول و $H_{m\times m}(t)$ ماتریس پایه موجک هار است. سپس با استفاده از خواص موجک هار و استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک هار ماتریس $C_{m\times m}$ از حل یک معادله ماتریسی نوع لیاپانوف به دست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری، انتگرال و مشتق گرانوالد - لتنیکوف، انتگرال و مشتق ریمان - لیوویل، مشتق کاپوتو، مشتق کسری - زمانی، مشتق کسری - مکانی، موجک هار.

فهرست مطالب

مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در اواسط قرن ۱۹ معرفی شد. دلیل گسترش استفاده از حساب کسری این است که مدل‌سازی واقعی برخی از پدیده‌های طبیعی را نمی‌توان توسط مدل‌های کلاسیک شرح داد.
استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری در سیستم‌های فیزیکی به طور وسیع در دهه‌های اخیر مورد نظر است. این نوع معادلات مدل مناسبی برای پدیده‌های فیزیکی گوناگون، در زمینه‌هایی مثل قوانین میرایی، فرایندهای انتشار و غیره است. کاربردهای دیگر شامل الکترومغناطیس‌ها، الکتروشیمی، علم شریانی و تئوری‌های فراکند است. لذا اخیراً توجه بیشتری به تحقیق روش‌های حل مؤثرتر و بهتر برای تعیین یک جواب تقریبی یا دقیق، تحلیلی یا عددی برای این نوع معادلات معطوف شده است.
به منظور رسیدن به این هدف برخی تکنیک‌ها برای حل معادلات دیفرانسیلی جزئی مرتبه کسری پیشنهاد شده است. مرسوم‌ترین روش‌های استفاده شده روش تجزیه آدومیان (ADM) [۶-۱]، روش آنالیز و اختلال هموتوپی (HAM) و (HPM) [۱۰-۷]، روش تکرار وردشی [۱] (VIM) [۱۲-۱۱] و روش تبدیل دیفرانسیل جزئی کسری ($FPDTM$) [۱۴-۱۳] است.
اما روش‌های کمی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری پیشنهاد شده است. از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:
پودلوبنی[۲] [۱۵] در سال ۱۹۹۹ از روش تبدیل لاپلاس استفاده کرد تا معادلات دیفرانسیل کسری را با تعریف مشتقات ریمان - لیوویل[۳] به طور عددی حل کند.

[۱] Variational

[۲] Podlubny

[۳] Riemann - Liouville

و همچنین معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با ضرایب ثابت را که برای این کار او یک تعریف تعمیم‌یافته از تابع گرین به دست آورد. در حالتی که استفاده از روش تبدیل لاپلاس یا تابع گرین کسری غیر ممکن باشد، میرچارت[۴] و تاجران[۵] [۱۶] در سال ۲۰۰۶ روش تفاضلات متناهی را برای به دست آوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری در فضای دو بعدی پیشنهاد کردند. در مواجهه با توابع مشتق‌ناپذیر، یوماری[۶] [۱۸-۱۷] در سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ عبارات جدیدی را برای سری‌های تیلور کسری و تعریف ریمان - لیوویل اصلاح‌شده به کار برد. بومرا[۷] و همکاران ایشان [۱۹] در سال ۲۰۰۸ طرح تقسیم عملگر ترتیبی را به کار بردند تا معادلات واکنشی - انتشار کسری را به طور عددی حل کنند، آن‌ها مشتقات کسری را با نمایش تعمیم‌یافته لوی[۸] تعریف کردند.

تا حدودی تعجب‌آور است که از میان روش‌های مختلف حل، به روش موجک توجه زیادی نشده است. تنها در چند مقاله [۲۵-۲۰] روش موجک برای حل معادلات کسری اعمال شده است. و تنها در [۲۷-۲۶] به حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به روش موجک پرداخته شده است. برای این منظور توابع موجک هار[۹]، چبیشف[۱۰]، لژاندر[۱۱] و سینوسی استفاده شده است.

توابع متعامد مختلفی چون توابع والش و بلاک - پالس [۲۹-۲۸]، چندجمله‌ای‌های لاگر [۳۰]، چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف [۳۲-۳۱]، سری‌های فوریه [۳۳] و توابع هار [۳۴] وجود دارد که به کمک آن‌ها می‌توان معادلات دیفرانسیل را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کرد. از مزایای آن، محاسبه‌ی آسان و کامپیوتری و دامنه کاربرد وسیع است و می‌تواند علاوه بر مرتبه‌های صحیح، معادلات دیفرانسیل جزئی با مراتب غیرصحیح را نیز حل کند.

جدیدترین تحول در ریاضیات کاربردی، استفاده از نظریه موجک‌ها است. امروزه

---

[۴] Meerschaert

[۵] Tadjeran

[۶] Jumarie

[۷] Baeumera

[۸] Levy

[۹] Haar

[۱۰] Chebyshev

[۱۱] Legendre

نظریه جدید موجک‌ها و مدل‌های موجکی تقریب، جایگزین نظریه‌های کلاسیك از جمله روش کلاسیك نظریه فوریه برای حل مسائل مختلف کاربردی در زلزله‌شناسی، پردازش سیگنال‌ها در سیستم‌ها، مخابرات، پردازش تصویر و بینایی کامپیوتر، ذرات بنیادی و کوانتوم مکانیك، نظریه تقریب و مکان‌یابی، جرم‌شناسی، ژنتیك و پزشکی، مهندسی و فیزیك شده است. در واقع آنالیز موجک به عنوان یک ابزار عددی می تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات بزرگ مقیاس بکاهد، بدین ترتیب که با تغییر هموار ضریب، ماتریس های متراکم را به شکل تنکی که به سرعت قابل محاسبه باشد، در آورد.

در این پایان‌نامه خانواده موجک هار برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. علل انتخاب این موجک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱- متعامد بودن توابع مقیاس و موجک

۲- متعامد بودن زیرفضاهای ساخته شده توسط توابع مقیاس و موجک

۳-فشردگی محمل توابع مقیاس و موجک

۴- تقارن تابع مقیاس.

این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل‌های بعدی می‌باشند، ارائه می‌گردد. در فصل دوم، به معرفی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می‌پردازیم و مفاهیم مشتق و انتگرال کسری گرانوالد - لتنیکوف و ریمان- لیوویل و مشتق کسری کاپوتو و همچنین مفاهیم مشتق جزئی کسری ریمان - لیوویل و کاپوتو را با ذکر خواص آن‌ها بیان می‌کنیم. در فصل سوم نیز نظریه موجک‌ها و موجک هار را معرفی می‌کنیم و ضرورت پیدایش آن را بیان می‌کنیم و در فصل چهارم، حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری با استفاده از موجک هار را بیان کرده و با ارائه مثال‌های عددی روش را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

در این فصل به بیان برخی از تعاریف، مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی می‌پردازیم، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است [۳۵-۳۷].

تعریف ۱.۱.۱. خانواده ناتهی A از زیرمجموعه‌های X (زیرمجموعه‌های X را با نماد ۲^X نشان می‌دهیم) را که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم بسته باشد، یک جبر از مجموعه‌ها روی X گویند. یعنی $A \subseteq ۲^X$ یک جبر نامیده می‌شود هرگاه $E_۱, E_۲, ..., E_k \in A$ نتیجه دهد که $\bigcup\limits_{k=۱}^{n} E_k \in A$ و $E^C \in A$ برای هر $E \in A$.

تعریف ۱.۲.۱. جبر را یک σ-جبر گویند هرگاه تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر نیز بسته باشد. یعنی اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، $E_k \in A$ آن‌گاه $\bigcup\limits_{k=۱}^{\infty} E_k \in A$.

تعریف ۱.۳.۱. اگر $A \subseteq ۲^X$ یک σ-جبر باشد. تابع $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ را یک اندازه گویند هرگاه روابط زیر برقرار باشند:

۱. $\mu(\phi) = ۰$ ،

۲. $\mu(E) \geq ۰$، برای هر $E \in A$ ،

۳. اگر $\{E_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا در A باشند آن‌گاه:

$$\mu(\bigcup_{k=۱}^{\infty} E_k) = \sum_{k=۱}^{\infty} \mu(E_k)\,. \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۱.۴.۱. تابع $\mu^* : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ را یک اندازه بیرونی گویند هرگاه داشته باشیم:

۱. $\mu^*(\phi) = 0$ ،

۲. $\mu^*(E) \geq 0$ ، برای هر $E \subseteq X$ ،

۳. $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ هرگاه $E_1 \subseteq E_2$ ،

۴. اگر $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا در X باشد آن‌گاه:

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

.

تعریف ۱.۵.۱. مجموعه $E \subseteq X$ را μ^*–اندازه‌پذیر نامند هرگاه برای هر مجموعه دلخواه $A \subseteq X$ داشته باشیم:

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A\bigcap E\right) + \mu^*\left(A\bigcap E^C\right) \tag{۲.۱}$$

که در آن E^C متمم E نسبت به X است.

تعریف ۱.۶.۱. یک فضای برداری (یا فضای خطی) روی میدان F مجموعه‌ای مانند V است که اعضای آن را بردار نامند و در آن دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر با شرایط زیر تعریف شده‌اند:

برای هر $x, y, z \in V$ و $\alpha, \beta \in F$ داریم:

الف) عمل جمع برداری چنین تعریف می‌شود:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

یعنی هر جفت بردار x, y متناظر با بردار $x + y$ است. که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $x+y=y+x$ ،

۲. $x+(y+z)=(x+y)+z$ ،

۳. بردار منحصر به فرد ۰ در V وجود دارد به طوریکه $x+0=x$ برای هر $x\in V$ ،

۴. برای هر $x\in V$ بردار منحصر به فرد $-x\in V$ وجود دارد به نام معکوس جمعی V که $x+(-x)=0$.

ب) عمل ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.: F\times V\longrightarrow V$$
$$(\alpha,x)\longrightarrow \alpha x$$

یعنی هر جفت (α,x) مرتبط با بردار αx است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\alpha\left(\beta x\right)=\left(\alpha\beta\right)x$ ،

۲. $1.x=x$ ،

۳. $\alpha\left(x+y\right)=\alpha x+\alpha y$ ،

۴. $\left(\alpha+\beta\right)x=\alpha x+\beta x$.

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنید X یک فضای خطی حقیقی یا مختلط باشد. نرم روی X، تابعی است به صورت $\|.\|: X\longrightarrow \mathbb{R}$، هرگاه:

۱. به ازای هر $x\in X$ ، $\|x\|\geq 0$ و $x=0$ اگر و تنها اگر $\|x\|=0$ ،

۲. به ازای هر $\alpha\in\mathbb{R}$(یا$\mathbb{C}$) و $x\in X$ ، $\|\alpha x\|=|\alpha|.\|x\|$ ،

۳. به ازای هر $x,y\in X$ ، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

تعریف ۱.۸.۱. فضای خطی با نرم $\|.\|$ تعریف شده روی آن را فضای خطی‌نرم دار گویند.

تعریف ۱.۹.۱. اگر X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=\|x-y\|$، به d یک متر روی X گویند (d متر تولید شده بوسیله نرم است). بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متریک است.

تعریف ۱.۱۰.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X همگرا به $x \in X$ گویند هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0\,. \tag{۳.۱}$$

تعریف ۱.۱۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X یک دنباله کشی[۱] گویند هرگاه:

$$\forall\varepsilon > 0\,, \qquad \exists N\,, \qquad \forall m, n \qquad (m, n > N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon)\,. \tag{۴.۱}$$

تعریف ۱.۱۲.۱. گویند تابع f در نقطه x_0 پیوسته است اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$، به طور معادل:

$$\forall\varepsilon > 0\,, \qquad \exists\delta > 0\,, \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۱.۱۳.۱. تابع f را که روی فاصله $[a, b]$ تعریف شده است، روی این فاصله پیوسته مطلق گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دسته باپایان $\{(x_i, x_i')\}$ از فاصله‌هایی که نقطه‌ی مشترک با هم ندارند و در نامساوی $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta$ صدق می‌کنند، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon\,. \tag{۶.۱}$$

تعریف ۱.۱۴.۱. فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نرم $\|.\|_c$ به صورت زیر

[۱] Cauchy

تعریف می‌شود:

$$\|f\|_c = \sup_{a\le x\le b} |f(x)| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|. \qquad (۷.۱)$$

تعریف ۱.۱۵.۱. فضای خطی نرم دار X را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا به عنصری از X باشد.

تعریف ۱.۱۶.۱. یک فضای خطی نرم‌دار کامل را فضای باناخ[۲] گویند.

مثال ۱.۱.۱. ساده‌ترین فضای باناخ، فضای اعداد مختلط با متریک زیر می‌باشد:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad d(x,y) = |x-y|. \qquad (۸.۱)$$

و به عنوان مثالی دیگر فضای همه توابع پیوسته بر روی بازه $[a,b]$ که با $C[a,b]$ نمایش داده می‌شود نسبت به نرم ماکسیمم زیر یک فضای باناخ می‌باشد:

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|. \qquad (۹.۱)$$

تعریف ۱.۱۷.۱. برای $۱ \le p < \infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(x)|^p < \infty$ باشد، فضای $L^p[a,b]$ گویند، به عبارتی:

$$L^p[a,b] = \left\{ f \mid f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C},\ \text{اندازه‌پذیر}\ f,\ \int_a^b |f(x)|^p < \infty \right\}. \qquad (۱۰.۱)$$

قضیه ۱.۱.۱. *فضای $L^p[a,b]; ۱ \le p < \infty$ یک فضای کامل است.*

---

[۲] Banach

$L^p[a,b]$ *فضایی برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است:*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (۱۱.۱)$$

در حالت خاص $L^2[a,b]$*، یعنی:*

$$L^2[a,b] = \left\{ f \mid f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ اندازه‌پذیر } f, \int_a^b |f(x)|^2 < \infty \right\}$$

با نرم $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ *یک فضای باناخ است.*

تعریف ۱.۱۸.۱. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد، گویند سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه دنباله $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد و در این صورت می‌نویسیم $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق گویند هرگاه: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

تعریف ۱.۱۹.۱. فضای نرم‌دار X باناخ است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق در این فضا، همگرا باشد.

تعریف ۱.۲۰.۱. فضای خطی X روی میدان اعداد مختلط را یک فضای ضرب داخلی نامند هرگاه تابعی چون $< .,. >: X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، داشته باشیم:

۱. $< x,x > \geq 0$ و $< x,x >= 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۲. $< x+y,z >=< x,z > + < y,z >$،

۳. $< \alpha x,y >= \alpha < x,y >$،

۴. $< x,y >= \overline{< y,x >}$، که خط بالایی عمل مزدوج در اعداد مختلط است.

آنگاه تابع $< x,y >$ را ضرب داخلی x و y نامند.

تعریف ۱.۲۱.۱. برای فضای ضرب داخلی نرم القا شده توسط ضرب داخلی برای $x \in X$ به‌صورت $\|x\| =< x,x >^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. نامساوی کشی - شوارتز[۳]: *برای هر $x,y \in X$ در فضای ضرب داخلی X، داریم:*

$$|<x,y>| \leq \|x\|\|y\|\,. \tag{۱۲.۱}$$

قضیه ۱.۳.۱. نامساوی مثلث: *برای هر $x,y \in X$ در فضای ضرب داخلی X، داریم:*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \tag{۱۳.۱}$$

مثال ۱.۲.۱. فضای $L^2[a,b]$ با ضرب داخلی زیر یک فضای ضرب داخلی است:

$$\forall f,g \in L^2[a,b] \qquad , \qquad <f,g>= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\,. \tag{۱۴.۱}$$

همچنین فضای $L^2[a,b]$ با ضرب داخلی زیر نسبت به تابع وزن ω روی $[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است:

$$\forall f,g \in L^2[a,b] \qquad , \qquad <f,g>_\omega= \int_a^b \omega(t)f(t)\overline{g(t)}dt\,. \tag{۱۵.۱}$$

قضیه ۱.۴.۱. نامساوی مینکوفسکی[۴]: *فرض کنید $p \geq 1$، $f,g \in L^p$ باشند، آن گاه $f+g$ نیز به L^p تعلق دارد و داریم:*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,. \tag{۱۶.۱}$$

[۳] Cauchy - Schowarz

[۴] Minkovsky

تعریف ۱.۲۲.۱. فضای برداری H همراه با ضرب داخلی را هیلبرت گویند، هرگاه H با نرم ناشی از ضرب داخلی $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$ یک فضای برداری نرم‌دار کامل (باناخ) باشد.

مثال ۱.۳.۱. $L^2[a, b]$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است:

$$\forall f, g \in L^2[a, b] \qquad , \qquad < f, g >= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \,. \tag{۱۷.۱}$$

تعریف ۱.۲۳.۱. اگر $u(x, y)$ تابعی در $L^2([a, b] \times [a, b])$ باشد، آن‌گاه تابع

$$\|u\|_2 = (\int_a^b \int_a^b |u(x, y)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}} \,, \tag{۱۸.۱}$$

یک نرم است.

تعریف ۱.۲۴.۱. تبدیل لاپلاس تابع f روی بازه‌ی $[0, +\infty)$ را با $L[f(t)]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s).$$

یکی از ویژگی‌های مهم تبدیل لاپلاس، تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه صحیح تابع f می‌باشد:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \,. \tag{۱۹.۱}$$

تعریف ۱.۲۵.۱. پیچش دو تابع f و g به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - x)g(x)dx \,. \tag{۲۰.۱}$$

همواره داریم:

$i)\ \ f*g=g*f\,,$

$ii)\ \ f*(g+h)=f*g+f*h\,,$

$iii)\ \ ۱*f=\int_۰^t f(x)dx\,.$

لاپلاس پیچش دو تابع به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L[f(t)*g(t)]=L[f(t)]L[g(t)]=F(s)G(s)\,. \qquad (۲۱.۱)$$

تعریف ۱.۲۶.۱. محمل یک تابع عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از دامنه تابع که مقدار تابع در آن نقاط غیرصفر باشد. به عبارت دیگر، اگر محمل تابع f با $supp(f)$ نشان داده شود، آن‌گاه:

$$supp(f)=\overline{\{x:f(x)\neq ۰\}} \qquad (۲۲.۱)$$

تعریف ۱.۲۷.۱. تابع f را دارای محمل فشرده گویند هرگاه تابع f در بازه‌های با اندازه متناهی، دارای مقدار متناهی باشد و در خارج بازه مذکور دارای مقدار صفر باشد.

۲.۱ تعامد

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی بوده و $x,y\in X$ متمایز باشند، x را بر y عمود گویند هرگاه برای $x\neq y$ داشته باشیم $<x,y>=۰$ و آن را با نماد $x\perp y$ نمایش می‌دهند.
اگر به ازای هر $x,y\in A$ داشته باشیم:

$$<x,y>=\begin{cases} ۰\ ; & x\neq y,\\ \alpha\ >۰; & x=y.\end{cases} \qquad (۲۳.۱)$$

آن‌گاه $A \subset X$ را متعامد گویند.

تعریف ۲.۲.۱. اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = ۱$ مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گویند.

تعریف ۲.۳.۱. دو زیر فضای A و B از فضای ضرب داخلی X متعامد گفته می‌شوند هرگاه هر بردار در A بر هر یک از بردارهای B عمود باشد.

قضیه ۲.۱.۱. *اگر A زیرمجموعه متعامد یکه از فضای ضرب داخلی X باشد و $y \in X$، آن‌گاه:*

۱. $\{x \in A : < y, x > \neq ۰\}$ *شمارش‌پذیر است* .

۲. $\|y\|^۲ \leq \sum_{x \in A} |< y, x >|^۲$. *(نامساوی بسل* [5]*)*

قضیه ۲.۲.۱. *اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه سری $\sum_{x \in A} < y, x > x$ مستقل از ترتیب جملات، همگراست.*

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد، متمم متعامد A، که با $A^{\perp}$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه بردارهایی از X می‌باشد که بر A عمود هستند. به عبارتی دیگر:

$$A^{\perp} = \{y \in X : < x, y >= ۰, \ \forall x \in A\} . \qquad (۲۴.۱)$$

A را کامل گویند هرگاه:

$$A^{\perp} = \{۰\} . \qquad (۲۵.۱)$$

تعریف ۲.۵.۱. اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیرمجموعه متعامد یکه از X باشد، آن‌گاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گویند هرگاه به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y \doteq \sum_{x \in A} < y, x > x . \qquad (۲۶.۱)$$

[5] Bessel

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می‌باشد.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید A یک زیرفضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد. برای هر بردار $y \in X$، تصویر متعامد y بر روی A، بردار یکتای $x \in A$ است که نزدیکترین بردار به y می باشد، یعنی:

$$\|y - x\| = \min_{z \in A} \|y - z\| . \qquad (۲۷.۱)$$

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید A زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی X باشد. و فرض کنید $x, y \in X$ تصویر متعامد y روی A باشد، در این صورت بردار $y - x$ بر هر بردار در A عمود است.*

قضیه ۲.۴.۱. *فرض کنید A یک زیرفضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد. هر بردار $y \in X$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $y = x + z$، که $x \in A$ و $z \in A^{\perp}$ می‌باشد، نوشت. یعنی:*

$$X = A \oplus A^{\perp} . \qquad (۲۸.۱)$$

اثبات. فرض کنید y متعلق به X و x تصویر قائم آن روی A باشد، فرض کنید $z = y + x$، آن‌گاه:

$$y = x + (y - x) = x + z.$$

طبق قضیه قبل، z بر هر بردار A عمود است. بنابراین z متعلق به $A^{\perp}$ است. $\square$

قضیه ۲.۵.۱. *اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد. آن‌گاه شرایط زیر با هم معادلند:*

۱. *به ازای هر $y \in H$ داریم:* $\|y\|^۲ = \sum_{x \in A} |(y, x)|^۲$. *(اتحاد پارسوال[۶])*

۲. A *کامل است.*

[۶] Parseval