دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (آنالیز)

موضوع:

میانگین‌پذیری کان دوگان دوم جبرهای باناخ و جبرهای نیم گروهی وزن دار

تهیه کننده:

مرتضی اسمعیلی

استاد راهنما:

دکتر عبدالرسول پورعباس

استاد مشاور:

دکتر عبدالحمید ریاضی

مهر ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)

معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا

تاریخ :
پیوست :

نام و نام خانوادگی: مرتضی اسمعیلی　　**دانشجوی آزاد** ■　　**بورسیه** ☐　　**معادل** ☐

شمارهٔ دانشجوئی: 84113012　　**دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر　　**رشتهٔ تحصیلی :** ریاضی محض (آنالیز)

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر عبدالرسول پورعباس

عنوان پایان نامه به فارسی: میانگین پذیری کان دوگان دوم جبرهای باناخ و جبرهای نیم گروهی وزن دار

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Connes-amenability of bidual and weighted semigroup algebras

نوع پروژه : **کارشناسی ارشد :** ■　**دکتـــــری** ☐　　**کاربردی** ☐　　**بنیادی** ■　　**توسعه ای** ☐　　**نظری** ☐

تاریخ شروع : 85/4/1　　**تاریخ خاتمه :** 86/6/28　　**تعداد واحد :** 6

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی : [illegible]

واژه های کلیدی به انگلیسی : Banach algebra – amenability – Connes amenability – Beurling algebra

---

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما :

دانشجو :

امضاء استاد راهنما :　　**تاریخ :**

نسخهٔ 1 : معاونت پژوهشی

نسخهٔ 2: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز خدا را شاکرم که در تمام مراحل زندگی‌ام مرا یاری کرد. همچنین بر خود لازم می‌دانم که از زحمات صادقانه استاد راهنمایم جناب آقای دکتر عبدالرسول پورعباس و استاد مشاورم جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی که با راهنمایی‌هایشان بنده را در گردآوری این مطالب یاری دادند تشکر نمایم.

همین‌طور بر خود لازم می‌دانم که از زحمات جناب آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی که در تمام دوران تحصیلم مرا راهنمایی نمودند نهایت سپاس و قدردانی را داشته باشم.

در پایان از خانوادهٔ عزیزم که همواره موجبات دلگرمیم را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم.

برای همه این عزیزان از خداوند بزرگ آرزوی موفقیت روز افزون را خواهانم.

چکیــده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی میانگین‌پذیری کان دوگان دوّم جبرهای باناخ منظم آرنزی پرداخته و شرایط لازم و کافی را برای میانگین‌پذیری کان این جبرها بیان می‌کنیم. همچنین این مفهوم را با زبان دنباله‌های دقیق کوتاه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان میانگین‌پذیری کان جبرهای نیم گروهی وزن دار را بررسی کرده و نشان می‌دهیم این جبرها در میانگین‌پذیری کان مانند C^*-جبرها رفتار می‌کنند. یعنی اگر S نیم گروه حذف پذیر و $l^1(S,\omega)$ منظم آرنزی باشد آنگاه:

$l^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $l^1(S,\omega)''$ میانگین‌پذیری کان باشد.

مرجع اصلی این پایان نامه مقاله‌ای تحت عنوان زیر می‌باشد:

Matthew Daws,

"Connes-amenability of bidual and weighted semigroup algebras"

که در مجلهٔ:

Mathematic Scandinavica

در سال ۲۰۰۶ میلادی به چاپ رسیده است.

کلمات کلیدی: جبر باناخ، میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری کان، جبرهای نیم گروهی وزن دار.

فهرست مندرجات

مقدمه

میانگین‌پذیری مفهومی است که تا سال ۱۹۷۲ فقط برای گروه‌ها بکار می‌رفت. این مفهوم جالب روی گروه‌های توپولوژیک موضعاً فشرده شرایط خوبی را برای برخی از جبرهای وابسته به گروه G مانند $L^1(G)$ و $M(G)$ بدست می‌دهد. این مفهوم اولین بار توسط جانسون مطرح و میانگین‌پذیری جبر باناخ نامیده شد. پس از جانسون ریاضیدانان زیادی در این زمینه شروع به فعالیت کردند و انواع دیگری از میانگین‌پذیری نیز ارائه شد. به عنوان مثال دلز، باده و کرتیس در سال ۱۹۸۷ مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مطرح کردند. همچنین مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای باناخ در سال ۲۰۰۴ توسط قهرمانی و لوی معرفی شد.

در این پایان‌نامه نوع خاصی از میانگین‌پذیری موسوم به میانگین‌پذیری کان مورد نظر است. این نوع میانگین‌پذیری اولین بار بر اساس ساختار فضای دوگان جبر فون نویمان توسط جانسون، کدیسون و رینگروز معرفی شد که به طور زیادی وابسته به مقاله‌ای از کان می‌باشد و هلمسکی در مقاله‌ای [۱۳] این نوع میانگین‌پذیری را میانگین‌پذیری کان نامید. اما رانده در سال ۲۰۰۳ این مفهوم را برای جبرهای خاصی موسوم به جبر باناخ دوگان تعمیم داد. او نشان داد جبر باناخ دوگان $M(G)$، با پیش دوگان $C_0(G)$ میانگین‌پذیر کان است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد.

همچنین رانده در [۱۸] مفهوم قطر مجازی نرمال را معرفی کرد و نشان داد اگر جبر باناخ دوگان A دارای قطر مجازی نرمال باشد در این صورت A میانگین پذیری کان است ولی عکس آن لزوماً درست نمی‌باشد.

موضوع اصلی این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ای تحت عنوان:

Connes-amenability of bidual and weighted semigroup algebras

است که توسط Matthew Daws در مجلهٔ:

Math. Scand, Vol 99, Issue 2, (2006), 217-246.

به چاپ رسیده است (رجوع کنید به [۹]). هدف اصلی ما در این پایان‌نامه بررسی میانگین‌پذیری کان دوگان دوّم جبرهای باناخ و جبرهای نیم گروهی وزن دار است.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل می‌باشد که عبارت است از:

فصل اول: دراین فصل به بیان پیش نیازها و مقدمات لازم برای ارائه مطالب اصلی پرداخته و مفاهیمی مانند فضای باناخ، جبر باناخ، ضرب آرنز، حاصلضرب تانسوری و جبرهای نیم‌گروهی وزن دار معرفی می‌شوند.

فصل دوم: در این فصل ما به معرفی مفهوم میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری کان پرداخته و قضایا و نتایج مورد نیاز در این زمینه را بیان می‌کنیم.

فصل سوم: در این فصل ابتدا میانگین‌پذیری کان دوگان دوّم جبرهای باناخ مورد بررسی قرار گرفته و شرایط معادلی برای میانگین‌پذیری کان دوگان دوّم جبرهای باناخ معرفی می‌شود. همچنین این مفهوم را در زبان دنباله‌های دقیق کوتاه بررسی می‌کنیم.

فصل چهارم: در این فصل میانگین‌پذیری کان جبرهای نیم گروهی وزن دار بررسی شده و هدف اصلی ما در این پایان‌نامه به اثبات می‌رسد. در واقع ثابت می‌شود جبرهای نیم گروهی وزن دار در میانگین‌پذیری کان مانند C^*−جبرها رفتار می‌کنند. یعنی اگر S نیم گروه حذف‌پذیر و $l^1(S,\omega)$ منظم آرنزی باشد $l^1(S,\omega)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $l^1(S,\omega)''$ میانگین‌پذیری کان باشد.

در پایان امیدواریم که مطالب این پایان‌نامه بتواند برای خوانندگان مفید واقع شود.

فصل ۱

پیش نیازها

در طول این پایان‌نامه با فضاهایی مانند $\mathcal{A}'$، $\mathcal{A}''$، $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$، $l^1(S,\omega)$ سر و کار داریم. بنابراین لازم است در ابتدای کار مفاهیمی چون فضاهای باناخ، جبر باناخ، فضای دوگان، ضرب آرنز، باناخ $\mathcal{A}-$مدول، حاصلضرب تانسوری فضاهای باناخ و جبرهای نیم گروهی وزن دار معرفی شوند. در این فصل ما با تمام این مفاهیم آشنا خواهیم شد.

۱.۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری X روی میدان $\mathbb{F}$ را همراه با نگاشت $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$ یک فضای نرمدار گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

تعریف ۲.۱.۱ فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را باناخ گوییم هر گاه نسبت به متر تولید شده توسط نرم کامل باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، مجموعهٔ همه تابعک‌های خطی پیوسته روی X را فضای دوگان X نامیم و با X' نمایش می‌دهیم که همراه با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \qquad (f \in X')$$

نماد گذاری. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. مجموعهٔ همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y را با $\mathcal{B}(X, Y)$ نشان می‌دهیم. در حالتی که $X = Y$ قرار می‌دهیم $\mathcal{B}(X, X) = \mathcal{B}(X)$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. نرم عملگری T را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in X\}$$

در این صورت فضای $\mathcal{B}(X, Y)$ با نرم عملگری بالا یک فضای باناخ است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. عملگر خطی و پیوسته $T' : Y' \longrightarrow X'$ را دوگان T نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< T'(f), x >=< f, T(x) > \qquad (x \in X, f \in Y')$$

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و X'' دوگان دوم آن باشد. نگاشت $\kappa_X : X \longrightarrow X''$ با ضابطهٔ:

$$< \kappa_X(x), f >=< f, x > \qquad (x \in X, f \in X')$$

را نشاننده طبیعی[1] روی X نامیم. در صورتی که κ_X پوشا باشد X را انعکاسی می‌گوییم.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیرفضای بسته‌ای از X باشد، در این صورت $Y' \cong \frac{X'}{Y^\circ}$ که در آن:

$$Y^\circ = \{f \in X' \ : \ < f, x >= \circ \quad \forall x \in Y\}$$

برهان: رجوع کنید به [[۳]، فصل ۳ قضیه ۱۰.۱]. ■

تعریف ۸.۱.۱ فضای باناخ X را فضای دوگان نامیم، هرگاه زیر فضای بسته $Y \subseteq X'$ موجود باشد بطوریکه $X = Y'$. همچنین Y را پیش دوگان X نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیرفضای بسته‌ای از X باشد، در این صورت Y را زیرفضای متمم دار[2] X نامیم هرگاه زیر فضای بسته‌ای ازX مانند Z موجود باشد بطوریکه:

$$X = Y + Z \qquad , \qquad Y \cap Z = \{\circ\}$$

[1] Natural embedding

[2] complemented subspace

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید X مجموعه دلخواهی و $\{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از توابع از X بتوی فضاهای توپولوژیک دلخواه Y_α ها باشد. در این صورت ضعیف ترین توپولوژی روی X وجود دارد که نسبت به آن همه f_α ها پیوسته‌اند. این توپولوژی را توپولوژی ضعیف روی X تولید شده توسط $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و X' دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده توسط X' روی X را توپولوژی ضعیف [۳] روی X گوییم و آن را با $\sigma(X, X')$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و κ_X نشاننده طبیعی روی X باشد. توپولوژی تولید شده توسط $\kappa_X(X)$ روی X' را توپولوژی ضعیف ستاره [۴] روی X' گوییم و آن را با $\sigma(X', X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱ اگر X یک فضای نرمدار باشد، $(X', \sigma(X', X))' = X$.

برهان: رجوع کنید به [[۳]، فصل ۵ قضیه ۱.۳]. ■

قضیه ۱۴.۱.۱ (گلدشتاین [۵]) فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. در این صورت $\mathrm{ball}X$ در $\mathrm{ball}X''$ با توپولوژی $\sigma(X'', X')$ چگال است .

برهان: رجوع کنید به [[۳]، فصل ۴ گزاره ۴.۱]. ■

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند. نگاشت خطی کراندار $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده ضعیف [۶] نامیم ، هرگاه بستار $T(\mathrm{ball}X)$ در$\sigma(Y, Y')$ فشرده باشد. مجموعهٔ نگاشت‌های خطی فشرده ضعیف از X به Y را با $\mathcal{W}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

---
۳ Weak Topology
۴ Weak star Topology
۵ Goldestine's theorem
۶ weakly Compact operator

لم ۱۶.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ دوگان به ترتیب با پیش دوگان‌های X_* و Y_* و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این صورت احکام زیر هم ارزند:

۱) T، $\sigma(Y,Y_*) - \sigma(X,X_*)$ پیوسته است.

۲) $T'(\kappa_{Y_*}(Y_*)) \subseteq \kappa_{X_*}(X_*)$.

۳) $S \in \mathcal{B}(Y_*,X_*)$ موجود است بطوریکه $S' = T$.

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این صورت احکام زیر هم ارزند:

۱) T فشرده ضعیف است.

۲) T' فشرده ضعیف است.

۳) $T''(X'') \subseteq \kappa_Y(Y)$

۴) T' در توپولوژی $\sigma(Y',Y) - \sigma(X',X'')$ پیوسته است.

برهان: رجوع کنید به [[۵]، A.۳.۵۶]. ■

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و Y زیر مجموعه‌ای از X باشد. اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب X که شامل Y هستند را غلاف محدب[۷] Y نامیم و با $\mathrm{Co}(Y)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. زیر مجموعه Y از X را موزون نامیم هرگاه:

$$\{\alpha x : x \in Y, |\alpha| \leq ۱\} \subseteq Y$$

---

۷ Convex hull

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و Y زیر مجموعه‌ای از X باشد. اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب و موزون X که شامل Y هستند را غلاف محدب اکید Y نامیم.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. زیر مجموعه Y از X را به طور نسبی فشرده–ضعیف[۸] گوییم هرگاه بستار Y نسبت به توپولوژی $\sigma(X, X')$ فشرده باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. زیر مجموعه Y از X را به طور نسبی دنباله‌ای فشرده–ضعیف[۹] گوییم هرگاه هر دنباله در Y دارای زیر دنباله‌ای همگرا در توپولوژی $\sigma(X, X')$ باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱ (ابرلین–سمولیان[۱۰]) فرض کنید X یک فضای باناخ و Y زیر مجموعه‌ای از X باشد. Y به طور نسبی فشرده–ضعیف است اگر و تنها اگر Y به طور نسبی دنباله‌ای فشرده–ضعیف باشد.

برهان: رجوع کنید به [[۳]، فصل ۵ قضیه ۱۳.۱]. ■

قضیه ۲۴.۱.۱ (کراین–سمولیان[۱۱]) فرض کنید X یک فضای باناخ و Y زیر مجموعه‌ای از X باشد. اگر Y فشرده–ضعیف باشد، آن‌گاه غلاف محدب Y به طور نسبی فشرده–ضعیف است.

برهان: رجوع کنید به [[۳]، فصل ۵ قضیه ۱۳.۴]. ■

---

۸ relatively weakly compact

۹ relatively sequentially weakly compact

۱۰ Eberlien-Smulian

۱۱ Krein-Smulian

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را همراه با نگاشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\times\mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$$

یک جبر گوییم، هرگاه برای هر $x,y,z\in\mathcal{A}$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

۲) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

۳) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

۴) $\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)$.

تعریف ۲.۲.۱ جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را جبر نرمدار گوییم، هرگاه $\mathcal{A}$ یک فضای برداری نرمدار باشد بطوریکه برای هر $x,y\in\mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$\|x\cdot y\|\leq\|x\|\|y\|.$$

تعریف ۳.۲.۱ هرگاه جبر نرمدار $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ کامل باشد، آن را جبر باناخ [۱۲] می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. X را یک $\mathcal{A}-$مدول چپ [۱۳] گوییم، هرگاه نگاشت $a\cdot x \longmapsto (a,x)$ از $\mathcal{A}\times X$ بتوی X موجود باشد طوری که در شرایط زیر صدق کند:

[۱۲] Banach algebra

[۱۳] Left $\mathcal{A}$-module

۱) برای هر $a \in \mathcal{A}$، نگاشت $x \longmapsto a \cdot x$، یک نگاشت خطی روی X باشد،

۲) برای هر $x \in X$، نگاشت $a \longmapsto a \cdot x$، یک نگاشت خطی روی $\mathcal{A}$ باشد،

۳) برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و $x \in X$، داشته باشیم:

$$a_۱ \cdot (a_۲ \cdot x) = (a_۱ a_۲) \cdot x,$$

نگاشت $(a, x) \longmapsto a \cdot x$ را ضرب مدولی چپ گوییم.

به طور مشابه، X را یک $\mathcal{A}$−مدول راست [۱۴] گوییم، هرگاه نگاشت $(a, x) \longmapsto x \cdot a$، از $\mathcal{A} \times X$ بتوی X در شرایط معادل (۱) و (۲) در بالا صدق کند و به جای شرط (۳)، داشته باشیم به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و $x \in X$،

$$(x \cdot a_۱) \cdot a_۲ = x \cdot (a_۱ a_۲),$$

X را یک $\mathcal{A}$−دومدول [۱۵] گوییم، هرگاه X هم $\mathcal{A}$−مدول راست و هم $\mathcal{A}$−مدول چپ باشد. همچنین ضربهای مدولی به ازای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}$ و $x \in X$، در شرط زیر صدق کند:

$$a_۱ \cdot (x \cdot a_۲) = (a_۱ \cdot x) \cdot a_۲$$

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای برداری نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. X را یک $\mathcal{A}$−مدول چپ نرمدار گوییم هرگاه X یک $\mathcal{A}$−مدول چپ باشد و $k > ۰$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|a \cdot x\| \leq k\|a\|\|x\|.$$

به طور مشابه می‌توان $\mathcal{A}$−مدول راست نرمدار را تعریف کرد. X را $\mathcal{A}$−دومدول نرمدار گوییم هرگاه X، $\mathcal{A}$−مدول راست نرمدار و $\mathcal{A}$−مدول چپ نرمدار باشد و برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $x \in X$

---

۱۴ Right $\mathcal{A}$-module

۱۵ $\mathcal{A}$-bimodule

داشته باشیم:

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b$$

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر نرمدار و X یک $\mathcal{A}-$دومدول نرمدار باشد. X را یک باناخ $\mathcal{A}-$دومدول گوییم هرگاه X یک فضای باناخ باشد.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک باناخ $\mathcal{A}-$دومدول باشد، دراین صورت با اعمال مدولی زیر X' یک باناخ $\mathcal{A}-$دو مدول است.

$$< a \cdot f, x > = < f, x \cdot a > \qquad (a \in \mathcal{A}, x \in X, f \in X')$$

$$< f \cdot a, x > = < f, a \cdot x >$$

تعریف ۸.۲.۱ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(I, \leq)$ را از بالا جهتدار [16] می‌نامیم، هرگاه برای هر $d_1, d_2 \in I$ یک $d_3 \in I$ وجود داشته باشد بطوریکه $d_1 \leq d_3$ و $d_2 \leq d_3$.

تعریف ۹.۲.۱ تابع ψ از مجموعهٔ از بالا جهتدار I به مجموعهٔ X، یک تور[17] در X نامیده می‌شود و آن را با $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ نشان می‌دهیم که در آن $e_\alpha = \psi(\alpha)$. تور $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ از یک فضای نرمدار، کراندار نامیده می‌شود، هرگاه $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $\alpha \in I$ داشته باشیم $\|e_\alpha\| \leq M$.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و $(I, \leq)$ مجموعه از بالا جهتدار باشد. تور $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ را به $x \in X$ همگرا گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ موجود باشد $\alpha_0 \in I$ بطوریکه برای هر $\alpha_0 \leq \alpha$ داشته باشیم $\|e_\alpha - x\| < \epsilon$.

[16] upward directed

[17] Net

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، تور کراندار $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{A}$ را یک واحد تقریبی کراندار $\mathcal{A}$ نامیم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$ae_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} a \qquad , \qquad e_\alpha a \xrightarrow{\|\cdot\|} a$$

تعریف ۱۲.۲.۱ (ضرب آرنز[۱۸]) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\mathcal{A}''$ دوگان دوم آن باشد. نگاشت‌های دو خطی $\Box, \Diamond : \mathcal{A}'' \times \mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{A}''$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< F\Box G, f >=< F, G.f > \qquad (F, G \in \mathcal{A}'', f \in \mathcal{A}')$$

$$< F\Diamond G, f >=< G, f.F > \qquad (F, G \in \mathcal{A}'', f \in \mathcal{A}')$$

که در آن

$$< G.f, x >=< G, f.x > \qquad (x \in \mathcal{A})$$

$$< f.F, x >=< F, x.f > \qquad (x \in \mathcal{A})$$

ضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$ را به ترتیب ضرب اول و دوم آرنز روی $\mathcal{A}''$ می‌نامند.

تذکر ۱۳.۲.۱ اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، جبرهای $(\mathcal{A}'', \Box)$ و $(\mathcal{A}'', \Diamond)$ نیز باناخ هستند.

تعریف ۱۴.۲.۱ جبر باناخ $\mathcal{A}$ را منظم آرنزی [۱۹] نامیم هرگاه ضرب های اول و دوم آرنز بر هم منطبق باشند.

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ، X و Y باناخ $\mathcal{A}-$ مدول چپ باشند، همریختی $T : X \longrightarrow Y$ را همریختی $\mathcal{A}-$مدولی چپ نامیم هرگاه:

$$< T, a \cdot x >= a\cdot < T, x > \qquad (a \in \mathcal{A}, x \in X)$$

[۱۸] Arens Product

[۱۹] Arens Regular

مجموعهٔ تمام همریختی $\mathcal{A}$−مدولی چپ کراندار از X بتوی Y را با ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

به طور مشابه مجموعهٔ تمام همریختی $\mathcal{A}$−مدولی راست ($\mathcal{A}$−مدولی)کراندار از X بتوی Y را با $\mathcal{B}(X,Y)_{\mathcal{A}}$ (${}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(X,Y)_{\mathcal{A}}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۶ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ، X و Y باناخ $\mathcal{A}$− مدول چپ باشند، $T \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(X,Y)$ را پذیرفتنی [۲۰]نامیم هر گاه $\mathrm{Im}(T), \mathrm{Ker}(T)$ به ترتیب زیر فضاهای بسته و متمم دار X و Y باشند.

نتیجه ۱.۲.۱۷ با توجه به مفروضات تعریف قبل اگر $T \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(X,Y)$ یک به یک باشد، T پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $S \in \mathcal{B}(Y,X)$ موجود باشد بطوریکه $SoT = I_X$.

تعریف ۱.۲.۱۸ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک باناخ $\mathcal{A}$−مدول چپ باشد، X را انژکتیو[۲۱]نامیم هرگاه برای هر باناخ $\mathcal{A}$−مدول چپ Z,Y و $\sigma \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(Y,X)$ و نگاشت یک‌به‌یک و پذیرفتنی $\theta \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(Y,Z)$، نگاشت $\rho \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(Z,X)$ وجود داشته باشد بطوریکه $\rho o\theta = \sigma$.

گزاره ۱.۲.۱۹ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک باناخ $\mathcal{A}$−مدول چپ با وفا باشد. (یعنی برای هر عنصر نا صفر $x \in X$ عنصر $a \in \mathcal{A}$ موجود باشد بطوریکه $a \cdot x \neq 0$). در این صورت X انژکتیو است اگر و تنها اگر عنصر $\phi \in_{\mathcal{A}} \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{A},X),X)$ موجود باشد بطوریکه $\phi o\iota = I_X$، که در آن $\iota : X \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A},X)$ همریختی $\mathcal{A}$−مدولی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iota(x)(a) = a \cdot x \qquad (a \in \mathcal{A}, x \in X)$$

[۲۰] Admissible

[۲۱] injective

برهان: رجوع کنید به [[۸]، گزاره ۱.۷]. ■

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و Z, Y, X باناخ $\mathcal{A}$–دو مدول و $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ همریختی‌های $\mathcal{A}$–مدولی باشند، در این صورت دنباله کوتاه

$$\sum : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

۱) دقیق [۲۲] است هرگاه $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$، f یک به یک و g پوشا باشد.

۲) پذیرفتنی است هرگاه نگاشت خطی و کراندار $F : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد بطوریکه $Fof = I_X$.

۳) شکافته [۲۳] است هرگاه همریختی $\mathcal{A}$–مدولی $F : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد بطوریکه $Fof = I_X$.

۳.۱ حاصلضرب تانسوری فضاهای باناخ

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{K}$ و X' و Y' دوگان های آنها باشند. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، تابعک دوخطی:

$$\begin{aligned} x \otimes y : X' \times Y' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

را عنصر ضرب تانسوری مقدماتی [۲۴] می‌نامیم و فضای تمام ترکیب های خطی عناصر ضرب‌های مقدماتی را حاصلضرب تانسوری جبری X و Y می‌نامیم و به صورت:

$$X \otimes Y = \mathrm{span}\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$$

---

۲۲ exact

۲۳ split

۲۴ Elementary tensor product