دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد آمار

موضوع:

میانگین زمان توقف در فرآیندهای تصادفی

استاد راهنما:

آقای دکتر عین‌اله پاشا

پژوهشگر:

شهریار میرزائی

بهار ۱۳۷۸

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

تاریخ ــــــ
شماره ــــــ
پیوست ــــــ
واحد ــــــ

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم/آقای شهریا رمیرزا بی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ آمار در روز شنبه مورخه ۷۸/۲/۱۸ در مؤسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۲۵ هیجده و ۲۵ می‌باشد.

۱- عالی ☐
۲- بسیار خوب ☑
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	ممتحنین خارجی	ممتحنین داخلی
۱- دکتر عین‌اله پاشا	۱- دکتر مسعود یارمحمدی	۱- دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده ثانی
	۲-	۲-

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تقدیر و سپاس

به جا و برخود می‌دانم از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر عین اله پاشا، که در طول تحصیل و در زمان انجام این رساله رهنمودها و کمکهای ایشان راهشگای من بود، صمیمانه قدردانی کنم و نیز جا دارد از زحمات اساتید عزیز، جناب آقای دکتر علی اکبر رحیم‌زاده (داور داخلی) و جناب آقای دکتر مسعود یار محمدی (داور خارجی)، که داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

شهریار میرزائی

بهار ۱۳۷۸

ناله‌ی جودایی

ســـــاقی یــــا وابـــادەوه وابــــادەوه   روله لای مــــن کـــه بــه جـامی بـادەوه

مـوشته ری وەک من له مـەیخانی کـه من   زوربەیان شاد و بەکـه یـف و بـی خـه من

مەی حه رامه بـوسه هـه نـده و بـی‌خەمان   مه ستی بی‌خەم بوچی بگـرن ئـیخه مـان؟

ئــەم شــه را بــه تـاله ده رمـانی خـه مـه   لیی حرام بی ئه وکه سه ی دەردی کـه مـه

تقدیم به:

روح پاک و مطهر برادر بزرگوارم

آقای فایق مرادی

چکیده

در سالهای اخیر علاقهٔ فزاینده‌ای به مطالعهٔ دستگاههایی که به روش تصادفی با زمان تغییر می‌کنند، به وجود آمده است. مدلهای ریاضی چنین دستگاه‌هایی به نام فرآیندهای تصادفی معروف‌اند. در این رساله مبحث «میانگین زمان توقف در فرآیندهای تصادفی» را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

فرض کنیم $\{X_n ; n \geq 0\}$ یک فرآیند تصادفی گسسته بر فضای احتمال $(\Omega , \mathcal{F} ,P)$ و نیز به ازای $n \geq 0$، $\mathcal{F}_n$ یک دنبالهٔ افزایشی از $\delta-$ میدانهای $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت $\{\mathcal{F}_n\}$ را می‌توان اطلاعات موجود تا زمان n تصورکرد. با این دیدگاه می‌توان حدس زد که آیا پیشامدی تا زمان n رخ داده است یا خیر.

در این صورت متغیر تصادفی :

$$N: (\Omega,\mathcal{F},P) \rightarrow \{0,1,2, \ldots, \infty\}$$

نسبت به $\{\mathcal{F}_n ; n \geq 0\}$ یک زمان توقف است هرگاه $[N = n] \in \mathcal{F}_n$ یا بطور معادل $[N \leq n] \in \mathcal{F}_n$. برای فرآیندهای تصادفی پیوسته - زمان نیز میتوان زمان توقف را به شیوهٔ اخیر تعریف نمود.

مطالعهٔ توزیع احتمال و میانگین زمان توقف، هدف اصلی این رساله می‌باشد. مفاهیم مارتینگل و روش به کارگیری آنها ابزار مؤثری بدست می‌دهند که در تحلیل توزیع احتمال و میانگین زمان توقف سودمند است. برای دستیابی به هدف، علاوه بر مارتینگلها از روشهای دیگری نیز استفاده میشود. اما ملاحظه می‌شود که به کارگیری مارتینگلها، ابزار مؤثرتری است.

فهرست مطالب

عنوان — **صفحه**

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

در سالهای اخیر علاقهٔ فزایندهای به مطالعهٔ دستگاههایی که به روش تصادفی با زمان تغییر می‌کنند، به وجود آمده است. مدلهای ریاضی چنین دستگاههایی به نام فرایندهای تصادفی معروف‌اند. فرآیندهای تصادفی از جالبترین مباحث آمار است. برای هر نوع سلیقه و ضرورتهای علمی مطلبی ارزنده دارد. کسانی که از مباحث علمی فقط از دید مجرد آن می‌نگرند، فرآیندهای تصادفی میدان وسیعی است که جوینده مجرد مطلب می‌تواند توانایی و افقهای دور ذهن خود را در آن بیازماید. از عمیقترین مباحث احتمال استفاده می‌کند، پویایی و رونق روز افزون احتمال مدرن بیشتر مدیون فرآیندهای تصادفی است . مباحث آماری و آزمون فرضها در مباحث استنباط آماری و آزمون فرضها در مباحث فرآیندهای تصادفی جایگاه ویژهٔ خود را دارند. از لحاظ کاربرد علوم در صنعت ، تکنولوژی، کشاورزی ، ژنتیک و سایر علوم ، فرآیندهای تصادفی نقش اساسی و انکار ناپذیر دارد.

در این رساله مبحث «میانگین زمان توقف در فرآیندهای تصادفی» را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

فرض کنید $\{X_n \,;\, n \geq 0\}$ یک فرآیند تصادفی گسسته بر فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد و نیز به ازای $n \geq 0$ ، $\mathcal{F}_n$ یک دنبالهٔ افزایشی از δ- میدانهای $\mathcal{F}$ باشد یعنی با این خاصیت که اگر $m<n$ آن گاه $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$. در این صورت $\{\mathcal{F}_n\}$ را می‌توان اطلاعات موجود تا زمان n تصور کرد با این دیدگاه می‌توان حدس زد که آیا پیشامدی تا زمان n رخ داده است یا خیر.

در این صوت متغیر تصادفی

$$N : (\Omega,\mathcal{F},P) \to \{0 , 1 , 2, \ldots ,\infty\}$$

نسبت به $\{\mathcal{F}_n \,;\, n \geq 0\}$ یک زمان توقف است هرگاه $[N = n] \in \mathcal{F}_n$ یا به طور معادل

$[N \leq n] \in \mathcal{F}_n$. برای فرآیندهای تصادفی پیوسته - زمان نیز می توان زمان توقف را به شیوهٔ بالا تعریف نمود.

مطالعهٔ توزیع احتمال و میانگین زمان توقف، هدف اصلی این رساله می‌باشد. مفاهیم مارتینگل و روش بکارگیری آنها ابزار موثری بدست می‌دهند که در تحلیل توزیع احتمال و میانگین زمان توقف سودمند است. برای دستیابی به هدف، علاوه بر **مارتینگلها** از روشهای دیگری نیز استفاده می‌شود.

این رساله از دو فصل تشکیل شده است:

فصل اول شامل پنج بخش می‌شود که در آن به بیان اجمالی مفاهیم پایه و ضروری مانند مفاهیم مقدماتی نظریهٔ احتمال، فرآیندهای تصادفی و زنجیرهای مارکف پرداخته و سپس چند فرآیند تصادفی مهم را معرفی می‌کنیم. پس از آن مفهوم مجموعهٔ جاذب و احتمالات جذب را در زنجیرهای مارکف بیان نموده و مفروضاتی را ذکر می‌کنیم که تحت آنها جذب قطعی است . در بخش چهارم، به بیان تعریف زمان توقف و خواص آن پرداخته و مثالهای متعددی از زمانهای توقف می‌آوریم. در انتهای این فصل، به مفاهیم مارتینگل و روش بکارگیری آنها می پردازیم.

فصل دوم شامل سه بخش می‌شود که در آن ابتدا به معرفی هدف رساله پرداخته و سپس با بکارگیری مارتینگلهای مناسب در فرآیندهای تصادفی مهم، توزیع احتمال و میانگین زمانهای توقف را در این فرآیندها محاسبه می‌کنیم. در انتهای فصل، ابتدا برای یک زنجیر مارکف با ماتریس انتقال P ، که در مفروضات بخش سوم فصل اول صدق می‌کند احتمالات جذب و میانگین زمان جذب را بدست می‌آوریم. پس از آن روشهای دیگری مانند معادلات بازگشتی، تابع مولد احتمال ، معادلات جذب ، توزیع زمان بین رویدادها، معادلات کلموگروف، اصل تقارن تبدیل لاپلاس و توزیع مانا نیز برای دستیابی به هدف، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این رساله ملاحظه می‌شود که به کارگیری مارتینگلها در محاسبهٔ توزیع احتمال و میانگین زمان توقف، کاراتر است.

فصل اول :

مروری بر فرآیندهای تصادفی

در این فصل مروری کلی بر فرآیندهای تصادفی، احتمالات جذب و زمان توقف داریم و نیز به بیان مفاهیم مارتینگل و روش بکارگیری آنها می‌پردازیم.

۱-۱ مفاهیم بنیادی فرآیندهای تصادفی

در این بخش به بیان تعریف‌ها و مفاهیم فرآیندهای تصادفی و زنجیرهای مارکف خواهیم پرداخت .

فضای احتمال

سه تایی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ را فضای احتمال گویند هرگاه در شرایط زیر صدق نماید:

۱- $\mathcal{F}$ یک کلاس غیر تهی از مجموعه‌ها (یعنی Ω) که تحت مکمل و اجتماع شما را بسته باشد، یا در واقع $\mathcal{F}$ یک σ- میدان باشد.

۲- تابع حقیقی احتمال $P(\circ)$ که بر $\mathcal{F}$ تعریف می‌شود در اصول موضوعه زیر صدق کند. به ازاء هر A_1 و A_2 و ... متعلق به $\mathcal{F}$:

$$P(A_i) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

بعلاوه اگر $i \neq j$ باشد و $A_i \cap A_j \varnothing$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

تعریف: هر تابع حقیقی را که نسبت به $\mathcal{F}$ اندازه پذیر باشد یک متغیر تصادفی (م.ت) می‌نامیم. بعبارت دیگر X یک م. ت است اگر داشته باشیم:

$$X : (\Omega,\mathcal{F}) \to (R,\mathcal{B})$$

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

فرآیندهای تصادفی

ما برای مطالعهٔ دستگاه‌هائی که به روشی تصادفی با زمان تغییر می‌کنند، به مدلها و الگوهای ریاضی نیاز داریم برای چنین دستگاه‌هائی ، مدلهای ریاضی به نام «فرآیندهای تصادفی» معرفی می‌گردد و به صورت زیر آن را تعریف می‌کنیم:

$\{X(t) ; t \in T\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که هر یک فضای احتمال مشترک تعریف می‌شود و T زیر مجموعه‌ای از فاصلهٔ $(-\infty,\infty)$ به عنوان مجموعهٔ پارامتر زمان در نظر گرفته می‌شود و فرآیند را به دو حالت کلی تقسیم می‌کند:

۱) اگر $T \in (0, \infty)$، آن گاه فرآیند را فرآیندی با پارامتر پیوسته می‌نامیم.

۲) اگر $T \in Z^{+}$، آن گاه فرآیند را فرآیندی با پارامتر گسسته می‌نامیم.

مجموعه‌ای مانند S که متغیرهای تصادفی مقادیر خود را در آن اختیار می‌کنند، فضای وضعیت این فرآیند نامیده می‌شود عوامل اصلی تمایز فرآیندهای تصادفی در سرشت فضای وضعیت، مجموعهٔ پارامتر زمان و روابط متقابل بین متغیرهای تصادفی X_t است.

انواع کلاسیک فرآیندهای تصادفی

حال چند نوع کلاسیک از فرآیندهای تصادفی راتوصیف می‌کنیم که با روابط مختلف بین X_tها مشخص می‌شود.

آ) فرآیند با نموهای مستقل ایستا

هرگاه متغیرهای تصادفی $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ به ازاء هر $n \geq 1$، به ازای

هر $t_0, t_1, ..., t_n$ که $t_0 < t_1 < .... < t_n$ مستقل باشند آن‌گاه گوئیم X_t فرآیندی با نموهای مستقل است وگوئیم دارای نموهای ماناست اگر $X(t+s) - X(t)$ برای تمام t ها دارای یک توزیع باشند.

ب) مارتینگلها

فرض کنیم $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی با مقدار حقیقی و مجموعهٔ پارامتری گسسته یا پیوسته باشد گوئیم $\{X_t\}$ یک مارتینگل است اگر به ازای هر t، $E[\ |X_t|\ ] < \infty$ و به ازای هر n و هر $t_1 < t_2 < .... < t_n < t$، $E[X_t \mid X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}] = X_{t_n}$.

پ) فرآیندهای ایستا

فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ را اکیداً ایستا گویند اگر توابع توزیع مشترک خانواده‌های $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ و $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ از متغیرهای تصادفی به ازای هر h و هر n و انتخابهای دلخواه $t_1, t_2, ..., t_n$ یکی باشند و نیز فرآیند تصادفی را به معنای وسیع ایستا می‌گوئیم هرگاه $E(X_t)$ ثابت باشد و $Cov(X_t, X_s)$ فقط به تفاضل t, s بستگی داشته باشد.

ت) فرآیندهای مارکف

یک فرآیند را مارکف گویند اگر $t_1 < t_2 < .... < t_n < t$ آن‌گاه

$P\{a < X_t \leq b \mid X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\} = P\{a < X_t \leq b \mid X_{t_n}\}$.

زنجیرهای مارکف

تعریف : فرض کنید $\{X_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ فرآیند تصادفی با زمان گسسته و فضای وضعیت شمارای S باشد گوئیم این فرآیند زنجیر مارکف است اگر به ازای هر $n \geq 1$ و هر $j, i, X_{n-1}, ..., X_1, X_0$ از وضعیتها ، برابری

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

برقرار باشد.

احتمال شرطی $P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$ را احتمال انتقال یک مرحله‌ای و $P\{X_{n+m}=j \mid X_m=i\}$ را که با علامت $P_{ij}^{(n)}$ نشان داده می‌شود احتمال انتقال n مرحله‌ای می‌گوئیم که دارای خواص (آ) $P_{ij}^{(n)} \geq 0$ (ب) $\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1$ است.

رده‌بندی وضعیتهای یک زنجیرهٔ مارکف

گوئیم وضعیت j در دسترس i است اگر به ازای عددی صحیح مانند $n \geq 0$, $P_{ij}^{(n)} > 0$. دو وضعیت j,i که در دسترس یکدیگرند مرتبط نامیده می‌شوند و چون مفهوم مرتبط بودن یک رابطهٔ هم ارزی است پس فضای وضعیت S را به زیر مجموعه‌های مجزا از هم تقسیم می‌کند به طوریکه عناصر هر زیر مجموعه با هم در ارتباط باشند هرکدام از این زیر مجموعه‌ها را یک رده یا کلاس هم ارزی گویند. اگر رابطهٔ هم ارزی فقط یک ردهٔ هم ارزی داشته باشد گوئیم زنجیر مارکف، تحویل ناپذیر است. و همچنین دورهٔ تناوب وضعیت i، عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام اعداد صحیح $n \geq 1$ که به ازای آنها $P_{ij}^{n} > 0$. زنجیر مارکفی که در آن هر وضعیت دارای دورهٔ تناوب یک است نامتناوب نامیده می‌شود.

اولین بازگشت

وضعیت دلخواه، ولی ثابت i را در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$، تعریف می‌کنیم $f_{ii}^{(n)} = P\{X_n = i, X_m \neq i\,(m = 1, 2, \ldots, n-1) \mid X_0 = i\}$، به عبارت دیگر $f_{ii}^{(n)}$ احتمال آن است که با شروع از وضعیت i، اولین بازگشت به وضعیت i در انتقال nام رخ می‌دهد در این صورت $f_{ii} = P(T_{ii} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$. واضح است که T_{ii} زمان انتظار برای بازگشت به

وضعیت i و f_{ii} احتمال بالاخره بازگشت به وضعیت i است. حالت i را بازگشتی گوئیم هرگاه $f_{ii}=1$

و در غیر این صورت ($f_{ii}<1$) آن را گذرا می‌گوئیم.

این عبارت بیان می‌کند که وضعیت i بازگشتی است اگر و فقط اگر، با شروع از وضعیت i، احتمال بازگشت به وضعیت i پس از مدت زمان متناهی یک باشد.

فرض کنید که i یک وضعیت بازگشتی باشد در این صورت $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ میانگین زمان بازگشت می‌باشد. اگر $\mu_{ii} = \infty$ وضعیت i را وضعیت پوچ و اگر $\mu_{ii} < \infty$ وضعیت i را غیر پوچ گویند.

توزیعهای مانا

در یک ردهٔ نامتناوب بازگشتی مثبت با وضعیتهای $j=0,1,2,\ldots$، $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ و

$$\lim_{n \to \infty} P_{jj}^{n} = \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$$

و πها به طور منحصر به فرد با مجموعهٔ معادلات

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \quad \text{و} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad , \quad \pi_i \geq 0 \qquad (1.10.1)$$

معین می‌شوند. هر مجموعه $(\pi_i)_{i=0}^{\infty}$ صادق در (۱.۱۰.۱) یک توزیع احتمال ایستا یا مانای زنجیر مارکف نام دارد.

در یک زنجیر مارکف نامتناوب تحویل ناپذیر بازگشتی، میانگین زمان بازگشت با استفاده از توزیعهای مانا، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} P_{ii}^{n}}$$

راه معمول و بسیار باروری برای کشف مارتینگلها در زنجیرهای مارکف، استفاده از توزیعهای مانا می‌باشد.

زنجیرهای مارکف پیوسته - زمان

تعریف : فرآیند تصادفی پیوسته - زمان $\{X(t) : t \geq 0\}$ را در نظر بگیرید که مقادیرش را در مجموعهٔ اعداد صحیح نا منفی اختیار می‌کند. می‌گوئیم فرآیند $\{X(t) : t \geq 0\}$ زنجیر مارکف پیوسته زمان است اگر به ازای هر $s,t \geq 0$ و اعداد صحیح و نامنفی j,i ، $X(u)$ ، $0 \leq u \leq s$ ، داشته باشیم

$$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}.$$

از خاصیت مارکفی در زنجیرهای مارکف پیوسته - زمان نتیجه می‌شود که توزیع زمانهای توقف در این فرآیندهٔنمائی است.

۱-۲ معرفی چند فرآیند تصادفی

در این بخش به معرفی چند فرآیند تصادفی مهم می‌پردازیم.

۱.۲.۱ قدم زدن تصادفی

فرض کنید ε_1 و ε_2 و ... متغیرهای تصادفی مستقل با مقادیر صحیح و تابع چگالی مشترک f باشند همچنین فرض کنید X_0 متغیر تصادفی با مقادیر صحیح باشد که مستقل از ε_i هاست و قرار می‌دهیم $X_n = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. دنبالهٔ X_n ; $n \geq 0$ ، یک قدم زدن تصادفی نامیده می‌شود. این دنباله یک زنجیر مارکف است که فضای وضعیت آن اعداد صحیح‌اند و تابع تغییر وضعیت آن با رابطهٔ $P(x,y) = f(y-x)$ مشخص میشود.

فرض کنید یک ذره بر روی اعداد صحیح بر طبق این زنجیر حرکت کند هرگاه ذره در x باشد صرفنظر از اینکه چگونه به آنجا رسیده است با احتمال $f(y-x)$ به وضعیت y می‌جهد. بعنوان حالت خاص یک قدم زدن تصادفی ساده را با $f(1)=p$, $f(-1)=q$, $f(0)=r$ را در نظر بگیرید، که در آن r , q , p نامشخص هستند و جمعشان برابر با یک است . تابع تغییر وضعیت زنجیر فوق