



دانشگاه سبزگان

دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی حالات همدوس و چلانده برای فرمیون ها

نگارنده:

سمیر ورتابی کاشانیان

اساتید راهنما:

دکتر سیامک خادمی

دکتر سعد الله نصیری

استاد مشاور:

دکتر احمد آخوند

استاد مشاوران: دکتر سیامک خادمی، دکتر سعد الله نصیری

۱۱ / ۶ / ۱۳۸۸

بهمن ماه ۱۳۸۷

۱۱۶۰۴۵



دانشگاه زنجان

### صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

شماره: ۳۷۷۱۵/۸۷

تاریخ: ۳/۱۲/۸۷

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد  
آقای: سمیر ورتابی کاشانیان رشته: فیزیک گرایش: نجوم

تحت عنوان: بررسی حالات همدوس و چلانده برای فرمیون ها

در تاریخ ۸۷/۱۲/۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه زنجان برگزار گردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می باشد:  
قبول (با درجه: عالی) امتیاز: (۱۹.۱۵) دفاع مجدد  مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸)

۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹-۱۶)

۳- خوب (۱۵/۹۹-۱۴)

۴- قابل قبول (۱۳/۹۹-۱۲)

امضاء

رتبه علمی

نام و نام خانوادگی

عضو هیأت داوران

استادیار

دکتر سیامک خادمی

۱- استاد راهنمای اول

استاد

دکتر سعداله نصیری

۲- استاد راهنمای دوم

استادیار

دکتر احمد آخوند

۳- استاد مشاور

استادیار

دکتر احمد درودی

۴- استاد ممتحن داخل دانشگاه

دانشیار

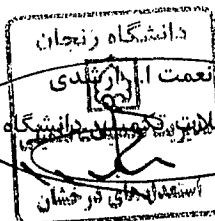
دکتر امیرحسین درونه

۵- استاد ممتحن داخل دانشگاه

استادیار

دکتر محمدحسین رسولی فرد

۶- نماینده تحصیلات تکمیلی

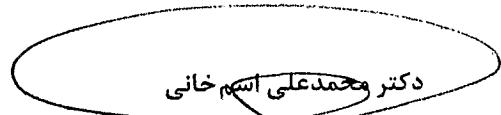


دانشگاه زنجان

دکتر نعمت ابرار شندی

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

استاد راهنمای درخشان



دکتر محمدعلی اسمعیلی خانی

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم

۸۷-۱۳-۱۳

**چکیده:** در این پایان نامه، مروری اجمالی بر حالت های همدوس و فشرده (چلانده) فوتونی شده است. همچنین شیوه تولید حالت های همدوس اسپینی تحت تأثیر هامیلتونی خطی و چرخش سیستم اسپینی و تولید حالت های فشرده تحت تأثیر چهار نوع هامیلتونی غیر خطی معروف مورد بررسی قرار می گیرد. علاوه بر این، دینامیک حالت های فشرده به کمک پارامترهای فشردگی و تابع شبه احتمالاتی  $Q$  مورد بررسی قرار می گیرد و با مقایسه این دو محک برای فشردگی سیستم، پارامتر فشردگی مناسب و سازگار با تحول سیستم، معرفی خواهد شد.

نکته: در این پایان نامه به جای اصطلاح حالت چلانده از حالت فشرده استفاده شده است و این دو یکسان می باشند.

# فهرست

صفحه

عنوان

۱	فصل اول - مقدمه
۴	فصل دوم - نور غیر کلاسیکی در جبر نوسانگر هماهنگ
۵	۱-۲ مروری بر ویژه توابع انرژی نوسانگر هماهنگ
۷	۲-۲ حالت همدوس
۸	۱-۲-۲ حل معادله ویژه مقدراری برای عملگر فنا
۱۰	۲-۲-۲ مقادیر چشمداشتی و عدم قطعیت
۱۳	۳-۲-۲ عملگر انتقال و تعریف مجدد حالت های همدوس
۱۷	۴-۲-۲ تحول زمانی تابع موج
۱۸	۵-۲-۲ بررسی تعدادی از خواص حالت همدوس
۱۹	۶-۲-۲ تصویر حالت های همدوس در فضای فاز
۲۱	۷-۲-۲ عملگر چگالی و توزیع احتمال در فضای فاز
۲۶	۳-۲ حالت فشرده
۲۶	۱-۳-۲ فشردگی مربعی
۳۰	۲-۳-۲ حالت فشرده عام
۳۲	۳-۳-۲ میدان الکتریکی
۳۳	۴-۳-۲ همبستگی
۳۶	۵-۳-۲ عدم قطعیت در مکان و تکانه
۳۷	۶-۳-۲ بسط بر حسب حالت های عددی
۳۸	۷-۳-۲ قاعده ترتیبی برای عملگرهای $\hat{S}$ و $\hat{D}$
۳۸	۸-۳-۲ کاربردها
۳۹	فصل سوم - همدوسی و فشردگی اسپینی
۳۹	۱-۳ جبر تکانه زاویه ای
۴۲	۲-۳ سیستم های اسپینی و دوران
۴۵	۳-۳ حالت های همدوس اسپینی (SCS)
۴۷	۱-۳-۳ معادلات ویژه مقدراری و مقادیر چشمداشتی

۵۰	۲-۳-۳ برخی خاصیت های حالت همدوس اسپینی
۵۲	۴-۳ کیوبیت
۵۷	۵-۳ مدل شوینگر
۵۹	۶-۳ باز تعریف حالت های همدوس اسپینی
۶۳	۷-۳ حالت های فشرده اسپینی
۶۴	۱-۷-۳ هامیلتونی پیچش تک محوره
۷۰	۲-۷-۳ هامیلتونی پیچش دو محوره
۷۲	۳-۷-۳ محاسبه کمینه عدم قطعیت
۷۳	۴-۷-۳ تعمیم هامیلتونی های غیر خطی
۷۶	۸-۳ پارامترهای فشرده
۷۶	۱-۸-۳ پارامتر فشرده کیئاگوا
۷۸	۲-۸-۳ پارامتر فشرده واینلند
۸۰	۳-۸-۳ پارامتر فشرده سورنسن
۸۰	۴-۸-۳ تابع شبه احتمالاتی Q
۸۱	۱-۹-۳ بررسی نمودارهای پارامتر فشرده کیئاگوا
۸۵	۲-۹-۳ بررسی نمودارهای پارامتر فشرده واینلند

## فصل چهارم - بحث و نتیجه گیری

۹۰

### پیوست ها

۹۴	پیوست الف
۹۴	پیوست ب
۹۵	پیوست پ
۹۷	پیوست ج
۱۰۰	پیوست د
۱۰۱	پیوست ن
۱۰۳	پیوست و
۱۰۵	پیوست ه
۱۰۶	

۱۰۷

### مرجع ها

## فصل اول

### مقدمه

عباراتی همچون "حالات همدوس"، "حالات چلانده" و "حالات غیر کلاسیکی" در اکثر مقاله‌های اپتیک کوانتومی دیده می‌شود. امروزه این مباحث در شاخه‌های متنوعی از فیزیک، از فیزیک حالت جامد تا کیهانشناسی، نیز بررسی می‌شوند یا به کار می‌روند. با انتشار سه مقاله در یک سال (۱۹۲۶ و ۱۹۲۷) توسط شرودینگر، کینارد و داروین که در آنها تکامل بسته موج گاوسی برای یک نوسانگر، یک ذره آزاد و یک ذره متحرک در میدان ثابت و یکتای الکتریکی و مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفته بود، نسخه اولیه‌ای از حالت‌های همدوس و چلانده معرفی شد که خود اساس و بنیاد دانش نوین کوانتوم اپتیک شد. [1] بعد از انتشار این سه مقاله تا چند سال تلاش و تحقیق چشم‌گیری روی این موضوع صورت نگرفت تا اینکه در دهه ۱۹۶۰ گلاوبر، کلاودر و سودارشان با شیوه‌ای جدید مجدداً به معرفی این حالت‌ها و خواصشان پرداختند و در سال ۱۹۶۳ گلاوبر برای نخستین بار عنوان حالت همدوس را به این حالت‌ها نسبت داد. [2] از این سال به بعد با آشکار شدن اهمیت نظری و کاربردی این حالت، به شکل گسترده‌ای مورد استفاده فیزیک دانان قرار گرفت. [3-6]

از دیدگاه نظری این حالت‌ها از تأثیر عملگری یکانی موسوم به عملگر جابجایی بر حالت پایه نوسانگر هماهنگ تولید می‌شود. این عملگر معادل عملگر انتقال در فضای مختلط می‌باشد. [7-10] مهمترین خاصیت این حالت‌ها در کمینه بودن میزان عدم قطعیت مکان و تکانه است به گونه‌ای که سهم هر دو عملگر در عدم قطعیت هایزنبرگ  $(\Delta\hat{X})(\Delta\hat{P}) \geq \frac{1}{2}$  یکسان است و به همین دلیل این حالت‌ها نزدیکترین حالت‌های کوانتومی به حالت‌های کلاسیکی هستند. [11-13]

با تأثیر عملگرهای غیر خطی، حالت‌های جدیدی ایجاد می‌شوند که همچنان در کمینه عدم قطعیت صدق می‌کنند، اما عدم قطعیت در یکی از عملگرهای  $(\Delta\hat{X})$  و یا  $(\Delta\hat{P})$  کوچکتر از  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است. این اتفاق به قیمت افزایش عدم قطعیت در عملگر دیگر رخ می‌دهد. مزیت این اثر این است که در اندازه‌گیری‌های دقیق‌تری می‌توان از مکان یا تکانه انجام داد. نخستین بار کینارد با بررسی تحول زمانی بسته موج گاوسی نوسانگر هماهنگ، این حالت‌ها را معرفی کرد. عملگری که این تأثیر را ایجاد می‌کند، عملگر فشردگی است که عملگری غیر خطی از عملگرهای خلق و فنا یا به شکل معادل از

عملگرهای مکان و تکانه انجام داد. همبستگی های کوانتومی بین فوتون ها که از اثر برهمکنش های غیر خطی ایجاد می شوند، نقش اساسی در تولید حالت های فشرده نور را ایفا می کنند. [14-15] در تجربه چنین اثری، با عبور نور همدوس از محیطی مانند بلوری غیر خطی رخ می دهد. به این ترتیب نور خروجی فشرده خواهد بود. این حالت ها در اواسط دهه ۱۹۸۰ در آزمایشگاه تولید و مشاهده شدند. خاصیت عدم قطعیت این گونه از نورها، باعث می شود در اندازه گیری ها و تداخل سنج های دقیق کاربرد پیدا کنند و به همین علت امروزه بسیار مورد توجه و استفاده می باشند.

همانند حالت های همدوس میدان تابشی، حالت های همدوس دیگری در فضای تکانه زاویه ای می توان یافت که خواص مشابهی داشته باشد. نخستین بار در سال های ۱۹۷۰ و ۱۹۷۱ ایده تولید حالت های همدوس برای فضای اندازه حرکت زاویه ای مطرح گردید. در این دو مقاله حالت های معرفی شده با نام های حالت های همدوس اسپینی [16] و همدوس اتمی [17] ارائه شدند. از نظر ریاضی حالت های همدوس اسپینی از تحول چرخش حالت پایه تکانه زاویه ای تولید می شوند. علت نامیده شدن این حالت ها به نام حالت همدوس اسپینی به این دلیل می باشد که این حالت ها نیز در کمینه عدم قطعیت برای عملگرهای تکانه زاویه ای با سهم یکسان در عدم قطعیت هایزبرگ صدق می کنند. تفاوتی که این حالت ها با حالت های همدوس فوتونی دارند در رابطه عدم قطعیت 
$$\left\langle \hat{J}_z \right\rangle \geq \frac{1}{2} \left( \Delta \hat{J}_x \right) \left( \Delta \hat{J}_y \right)$$
 مشهود است. سمت راست نامساوی فوق، خود یک عملگر است و این موجب پیچیده تر شدن این حالت ها در مقابل حالت های فوتونی می شود.

حالت های فشرده اسپینی از تحول زمانی حالت همدوس اسپینی تحت تأثیر هامیلتونی های غیر خطی تولید می شود. [18] در این حالت ها، همانند حالت های فشرده فوتونی عدم قطعیت در یکی از عملگرها کمتر از عدم قطعیت حالت همدوس می شود، که به علت ایجاد همبستگی بین اسپین ها می باشد. این اثر در افزایش دقت اندازه گیری برخی مؤلفه های اسپینی، تأثیر بسزایی دارد. حالت های فشرده اسپینی در زمینه های متعددی از جمله در رایانه های کوانتومی [19]، حالت های درهمتنیده [20-21]، بیناب نمایی، ساعت های اتمی دقیق و تداخل سنجی کاربرد دارند.

از اهداف اصلی این پایان نامه، بررسی خواص ریاضیاتی و فیزیکی حالت های همدوس و فشرده اسپینی است. برای بررسی کمی میزان فشردگی حالت های اسپینی، محکی به نام پارامتر فشردگی با تعریف های مختلف از محققان مختلف معرفی می شود. در این تحقیق با بررسی دینامیک حالت های فشرده، پارامتر فشرده مناسب و سازگار را مشخص خواهیم کرد.

برای این منظور ابتدا در فصل ۲ با مفاهیم مقدماتی و خواص و تعریف های حالت های همدوس و فشرده فوتونی که حالت های شناخته شده تری می باشند، آشنا خواهیم شد. سپس در فصل ۳ مفاهیم مقدماتی، تعریف های اولیه و خواص فیزیکی سیستم های اسپینی و حالت های همدوس و فشرده اسپینی آورده شده است. همچنین دینامیک حالت های فشرده و پارامترهای فشردگی در این فصل

معرفی شده است. در انتهای این فصل با ارائه چند مثال و مقایسه پارامترهای فشردگی مختلف به بررسی شهودی این مفاهیم پرداخته می شود. در فصل ۴ نیز با مقایسه چند نمودار، پارامتر مناسب و سازگار با دینامیک حالت های فشرده به عنوان نتیجه انتخاب خواهد شد.



## فصل دوم

### نور غیر کلاسیکی در جبر نوسانگر هماهنگ

حالت همدوس<sup>۱</sup> در حوزه مکانیک کوانتومی، دسته خاصی از حالت های کوانتومی در پایه های نوسانگر هماهنگ است که دینامیک آن بسیار شبیه سیستم نوسانگر هماهنگ کلاسیکی می باشد. نخستین بار اروین شرودینگر<sup>۲</sup> هنگامی که در مورد حل معادله شرودینگر برای نوسانگر هماهنگ تحقیق می کرد، با این حالت ها مواجه شد. بعد از این کشف نوسانگر هماهنگ کوانتومی و حالت های همدوس در توصیف سیستم های فیزیکی زیادی در نظریه کوانتوم به کار رفت. به طور مثال، یک حالت همدوس توصیف کننده مناسبی برای ذره ای است که در میدان پتانسیل مربعی حرکت نوسانی دارد.

در نظریه الکترودینامیک کوانتومی و نظریه میدان های بوزونی، گلاوبر<sup>۳</sup> این حالت ها را در سال ۱۹۶۳ معرفی کرد. حالت همدوس یک میدان، نزدیکترین حالت کوانتومی به یک موج سینوسی کلاسیکی همانند لیزر است. اروین شرودینگر در سال ۱۹۲۶ نشان داد که تابع موج این حالت ها، بسته های موج گاوسی با کمینه عدم قطعیت است که سهم عدم قطعیت مکان و تکانه در این عدم قطعیت یکسان و برابر است. مقادیر چشمداشتی معادله حرکت نیز همان گونه که انتظار داریم با معادله حرکت کلاسیکی تطابق دارد. [22]

تابع عدم قطعیت برای حالت پایه نوسانگر هماهنگ یا به اصطلاح، حالت فوتونی صفر در فضای فوک<sup>۴</sup> کمینه می باشد. حالت همدوس برهنه ای از تعداد بینهایت تایی از حالات فوتونی است که کمینه اصل عدم قطعیت در آن صادق است و تشکیل یک تابع توزیع پواسونی بر حسب تعداد فوتون ها می دهد. تا زمانی که یک حالت کمینه عدم قطعیت را دارد، تابع موج آن در فضای فوک شکل گاوسی به خود می گیرد. پهنای فرم گاوسی می تواند تغییر کند، بدون اینکه نیازی به اصلاح حاصلضرب عدم قطعیت داشته باشد. این تغییر در پهنای ممکن است

<sup>1</sup> Coherent state

<sup>2</sup> Erwin Schrodinger

<sup>3</sup> Roy J. Glauber

<sup>4</sup> Fock space

توزیع پواسونی را به توزیع متفاوتی تغییر دهد. حالت کمینه عدم قطعیتی که توزیع پواسونی نداشته باشد، حالت چلانده (حالت فشرده)<sup>1</sup> نامیده می شود. [7]

## ۲-۱ مروری بر ویژه توابع انرژی نوسانگر هماهنگ

ویژه توابع انرژی نوسانگر هماهنگ، مجموعه ای متعامد و کامل تشکیل می دهند که اساس و پایه کار در دستگاه های بوزونی است. گاهی به این ویژه حالت ها، حالت های عددی<sup>2</sup> نیز گفته می شود. و با کت های دیراک به شکل  $|n\rangle$  نمایش داده می شوند و فضای هیلبرتی که می سازند به اصطلاح فضای فوک<sup>3</sup> نامیده می شود.

برای ساده تر شدن شکل روابط، معادلات را در دستگاه واحدی می نویسیم که کمیت های ثابت پلانک  $(\hbar)$ ، جرم نوسانگر  $(m)$  و ثابت سختی فنر  $(k)$  برابر واحد باشد. در چنین دستگاه واحدی، تابع موج مکانی نوسانگر به شکل تابع موج گاوسی با پهناهای ثابت، ضربدر چند جمله ای های هرمیت<sup>4</sup> خواهد بود

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n (n!) \pi^{1/4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x). \quad (1-2)$$

تابع موج  $\psi_n(x)$  در نمایش دیراک به شکل  $\langle x|n\rangle$  نشان داده می شود که به معنای تصویر حالت های  $n$  در فضای مکان می باشد.

آنچه که دارای اهمیت فراوانی است، مقادیر چشمداشتی<sup>5</sup> کمیات فیزیکی و عدم قطعیت آنها می باشد. برای مثال، عدم قطعیت در مکان و تکانه نوسانگر در پایه های  $n$  به شکل زیر است

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (2-2)$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2. \quad (3-2)$$

این مقادیر چشمداشتی به روش های مختلفی بدست می آیند. در نمایش شرودینگر و استفاده از توابع موج اگر تابعیت مکان و زمان تابع موج نوسانگر مشخص باشد، مقادیر چشمداشتی به شکل زیر بدست می آید

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) x \psi(x,t) dx, \quad (4-2)$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x,t) dx, \quad (5-2)$$

که در آن  $\psi^*(x,t)$  به معنای همیوگ مختلط  $\psi(x,t)$  است و  $-i \frac{\partial}{\partial x}$  عملگر تکانه در فضای مکان است و برای محاسبه عدم قطعیت نیاز به محاسبه چهار مقدار چشمداشتی برای مکان و تکانه است.

<sup>1</sup> Squeezed state

<sup>2</sup> Number states

<sup>3</sup> Fock space

<sup>4</sup> Hermit polynomials

<sup>5</sup> Expectation value

روش دیگر استفاده از روش دیراک است، که در آن نمایش  $n$  ها به مکان ترجیح داده می شود. دو عملگر جدید و غیر فیزیکی بر حسب مکان و تکانه، که عملگرهای خلق<sup>1</sup> و فنا<sup>2</sup> نامیده می شوند، تعریف می شود

$$\bar{a}^\dagger = \frac{\bar{x} - i\bar{p}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{a} = \frac{\bar{x} + i\bar{p}}{2}, \quad (6-2)$$

و عملگرهای مکان و تکانه بر حسب عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\bar{x} = \frac{\bar{a} + \bar{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{a} - \bar{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (7-2)$$

دیراک نشان داد که عملگر فنا هنگامی که روی هر حالت دلخواه از  $|n\rangle$  ها اثر کند، مقدار  $n$  را یکی کاهش می دهد و لذا آن را عملگر کاهنده نیز می نامند و هنگامی که عملگر خلق روی هر حالت  $|n\rangle$  ای اثر کند، آن را به  $|n+1\rangle$  تبدیل می کند و لذا آن را عملگر افزایش دهنده نیز می نامند

$$\bar{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (8-2)$$

$$\bar{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (9-2)$$

در واقع با تأثیر هر بار عملگر فنا روی یک حالت دلخواه  $|n\rangle$ ، انرژی آن به اندازه یک واحد کاهش می یابد. از ترکیب این دو عملگر غیر فیزیکی می توان عملگر تعداد، که هرمیتی و فیزیکی است، را بدست آورد

$$\bar{a}^\dagger \bar{a}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (10-2)$$

روابط جابجایی این دو عملگر به شکل زیر است

$$[\bar{a}, \bar{a}^\dagger] = 1. \quad (11-2)$$

که با توجه به تعریف عملگرهای  $x$  و  $p$  بر حسب عملگرهای  $\bar{a}$  و  $\bar{a}^\dagger$  خواهیم داشت

$$\bar{x}^2 = \frac{(\bar{a}^\dagger \bar{a} + \bar{a} \bar{a}^\dagger + \bar{a} \bar{a} + \bar{a}^\dagger \bar{a}^\dagger)}{2}. \quad (12-2)$$

$$\bar{p}^2 = \frac{(\bar{a}^\dagger \bar{a} + \bar{a} \bar{a}^\dagger - \bar{a} \bar{a} - \bar{a}^\dagger \bar{a}^\dagger)}{2}. \quad (13-2)$$

برای ویژه حالت های نوسانگر هماهنگ داریم

$$\langle \bar{x} \rangle = \langle n | \frac{\bar{a} + \bar{a}^\dagger}{\sqrt{2}} | n \rangle, \quad (14-2)$$

$$\langle \bar{p} \rangle = \langle n | \frac{\bar{a} - \bar{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} | n \rangle, \quad (15-2)$$

که شامل جملاتی بر حسب  $\langle n|n-1\rangle$  و  $\langle n|n+1\rangle$  خواهد بود، که به خاطر خاصیت تعامد  $n$  ها صفر می شود

$$\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle n | (\bar{a}^\dagger \bar{a} + \bar{a} \bar{a}^\dagger + \bar{a} \bar{a} + \bar{a}^\dagger \bar{a}^\dagger) | n \rangle. \quad (16-2)$$

به این علت که  $\bar{a}^\dagger \bar{a} + \bar{a} \bar{a}^\dagger = 2\bar{a}^\dagger \bar{a} + 1 = 2\bar{n} + 1$ ، خواهیم داشت

<sup>1</sup> Creation operator

<sup>2</sup> Annihilation operator

$$\langle \bar{x}^2 \rangle = n + \frac{1}{2}. \quad (17-2)$$

باید در نظر داشته باشیم که چون عملگرهای خلق و فنا غیرفیزیکی هستند، مقدار چشمداشتی آنها صفر می شود و در رابطه (۲-۱۶)،  $\langle \bar{a}^2 \rangle$  و  $\langle \bar{a}^{\dagger 2} \rangle$  برحسب  $\langle n|n-2 \rangle$  و  $\langle n|n+2 \rangle$  است که صفر می شود

$$\langle (\Delta \bar{x})^2 \rangle = \langle (\Delta \bar{p})^2 \rangle = n + \frac{1}{2}. \quad (18-2)$$

و این یعنی با افزایش  $n$  یا در واقع انرژی دستگاه، عدم قطعیت در  $n$  یا انرژی بیشتر می شود. همچنین برای حالت پایه نوسانگر هماهنگ یعنی  $n=0$ ، عدم قطعیت، در کمینه مقدارش خواهد بود، یعنی

$$\langle (\Delta \bar{x})^2 \rangle \langle (\Delta \bar{p})^2 \rangle = \frac{1}{4}. \quad (19-2)$$

از رابطه (۲-۱۹) بر می آید که، حالت پایه نوسانگر هماهنگ یک حالت همدوس است چون دارای کمینه عدم قطعیت است. [23]

## ۲-۲ حالت همدوس

حداقل چهار روش متفاوت برای تعریف حالت های همدوس وجود دارد: [1]

۱- می توان در حالت کلی حالت همدوس  $|\alpha\rangle$  را برهمه‌ی ای از حالت های  $|n\rangle$  با ضرایب احتمال  $c_n$  فرض کرد

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (20-2)$$

۲- همان گونه که گفته شد، حالت پایه نوسانگر هماهنگ خواص حالت همدوس را دارا می باشد. اگر توسط نوع خاصی از عملگرهای یکانی حالت اولیه  $|0\rangle$  متحول شود، حالت جدیدی ساخته می شود که همچنان دارای خواص حالت همدوس می باشد

$$|\alpha\rangle = \bar{D}(\bar{a}, \bar{a}^{\dagger}) |0\rangle. \quad (21-2)$$

۳- یکی از معروفترین روش های محاسبه حالت های همدوس، حل معادله ویژه مقدری برای عملگر فنا می باشد

$$\bar{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (22-2)$$

۴- با توجه به خواص حالت همدوس، یک راه ممکن این است که به دنبال حالتی گشت که رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ برای دو عملگر مثل  $A$  و  $B$  را کمینه سازد. پس به دنبال کمینه سازی رابطه زیر می گردیم

$$\Delta \bar{A} \Delta \bar{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\bar{A}, \bar{B}] \rangle \right|. \quad (23-2)$$

با هر کدام از چهار روش فوق می توان حالت همدوس را ساخت و تعریف کرد. نیز می توان این چهار روش را برای سیستم های دیگر غیر بوزنی نیز تعمیم داد.

## ۲-۲-۱ حل معادله ویژه مقداری برای عملگر فنا

### روش اول

حالت همدوس، برهنه‌ی از ویژه حالت های انرژی نوسانگر در نظر گرفته می شود و ویژه حالت عملگر خلق است. در نتیجه از حل رابطه ویژه مقداری زیر، حالت همدوس بدست می آید

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2-24)$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (2-25)$$

$$\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} c_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha |n\rangle. \quad (2-26)$$

با ضرب  $\langle m|$  در طرفین رابطه (۲-۲۶)، رابطه بازگشتی برای ضرایب احتمال به دست می آید

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}. \quad (2-27)$$

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (2-28)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2-29)$$

که در آن  $c_0$  ضریب بهنجارش برای حالت همدوس می باشد

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \langle n | n \rangle = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1. \quad (2-30)$$

$$c_0 = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right). \quad (2-31)$$

در نتیجه حالت همدوس به شکل زیر تعریف می شود

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2-32)$$

و با توجه به تعریف حالت ها  $|n\rangle$  برحسب حالت پایه نوسانگر می توان بازنویسی کرد [8]

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \quad (2-33)$$

### روش دوم

در این روش، عملگری به نام  $b$  به شکل زیر تعریف می کنیم و رابطه ویژه مقداری زیر را برای آن حل

می کنیم. [24]

$$\hat{b}|\alpha\rangle = (\bar{a} - \alpha)|\alpha\rangle = 0. \quad (34-2)$$

جبر این عملگرها در گروه هایزنبرگ صدق می کند

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \quad (35-2)$$

می توان به روش استقرا نشان داد که اگر تابعی برحسب عملگر خلق داشته باشیم، در چنین رابطه جابجایی صدق خواهد کرد

$$[\bar{a}, f(\bar{a}^\dagger)] = \frac{df(\bar{a}^\dagger)}{d\bar{a}^\dagger}. \quad (36-2)$$

همانند گذشته حالت همدوس، برهنه‌ی ای از حالت های  $|n\rangle$  فرض می شود. همچنین هر حالت  $|n\rangle$  توسط توانی از عملگر خلق برحسب حالت پایه نوشته می شود، پس در حالت کلی حالت همدوس به شکل زیر بسط داده می شود

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = N f(\bar{a}^\dagger) |0\rangle, \quad (37-2)$$

که در آن  $N$  ضریب نرمالیزاسیون است. با در نظر گرفتن اثر عملگر فنا روی حالت پایه، رابطه زیر بدست می آید

$$(\bar{a} - \alpha)f(\bar{a}^\dagger)|0\rangle = \frac{df(\bar{a}^\dagger)}{d\bar{a}^\dagger} - \alpha f(\bar{a}^\dagger) = 0 \quad (38-2)$$

$$\frac{df(\bar{a}^\dagger)}{f(\bar{a}^\dagger)} = \alpha d\bar{a}^\dagger \quad (39-2)$$

$$f(\bar{a}^\dagger) = e^{\alpha \bar{a}^\dagger} \quad (40-2)$$

$$|\alpha\rangle = N e^{\alpha \bar{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (41-2)$$

با توجه به رابطه بیکر-هاسدروف<sup>1</sup>، اگر بهنجارش روی حالت  $|\alpha\rangle$  صورت گیرد، به همان شکلی که از تعریف  $|\alpha\rangle$  انتظار می رود، تبدیل می شود

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |N|^2 \langle 0 | e^{\alpha^* \bar{a}} e^{\alpha \bar{a}^\dagger} | 0 \rangle = |N|^2 \langle 0 | e^{\alpha \bar{a}^\dagger} e^{|\alpha|^2} e^{\alpha^* \bar{a}} | 0 \rangle = 1 \quad (42-2)$$

$$e^{\alpha \bar{a}^\dagger} |0\rangle = |0\rangle \quad (43-2)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |N|^2 e^{|\alpha|^2} \langle 0|0\rangle = 1. \quad (44-2)$$

در نتیجه  $N$  بدست می آید

$$N = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (45-2)$$

ممکن است این سؤال برای کسی پیش آید که آیا همانند عملگر فنا، رابطه ویژه مقداری ای برای عملگر خلق وجود دارد؟ فرض کنید رابطه ویژه مقداری برای این عملگر با وجود ویژه حالت  $|\beta\rangle$  برقرار است.

<sup>1</sup> Baker-Campbell-Hausdorff relation

$$\bar{a}^\dagger |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle, \quad (۴۶-۲)$$

حالت  $|\beta\rangle$  نیز در حالت کلی برهنه می شود

$$|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (۴۷-۲)$$

اکنون اگر  $\bar{a}^\dagger$  بر این حالت اثر کند، بدست می آید

$$\bar{a}^\dagger |\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (۴۸-۲)$$

از این رابطه بر می آید اگر طرفین رابطه فوق در ضرب شود، نتیجه می شود که  $c_0 = 0$  و از آنجایی که رابطه بازگشتی برای ضرایب به شکل زیر برقرار است

$$c_n = \frac{c_0 \sqrt{n!}}{\beta^n}. \quad (۴۹-۲)$$

بنابر این  $|\beta\rangle = 0$  حالت پوچ خواهد بود و برای عملگر  $\bar{a}^\dagger$  رابطه ویژه مقداری نمی توان نوشت.

### ۲-۲-۲ مقادیر چشمداشتی و عدم قطعیت

در این بخش، مقادیر چشمداشتی در پایه های حالت همدوس مورد بررسی قرار می گیرند. با توجه به شکل عملگر میدان الکتریکی، انحراف از معیار آن به راحتی قابل محاسبه است

$$\bar{E}_x(r, t) = i \left( \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\bar{a} e^{i(k.r - \omega t)} - \bar{a}^\dagger e^{-i(k.r - \omega t)}]. \quad (۵۰-۲)$$

$$\langle \alpha | \bar{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = i \left( \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(k.r - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(k.r - \omega t)}]. \quad (۵۱-۲)$$

از آنجایی که ویژه مقادیر  $\alpha$  در حالت کلی مختلط هستند، می توان آن را به شکل قطبی نوشت

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}, \quad (۵۲-۲)$$

در نتیجه مقدار چشمداشتی میدان الکتریکی به شکل زیر در می آید

$$\langle \bar{E}_x(r, t) \rangle_\alpha = 2|\alpha| \left( \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sin}(\omega t - k.r - \theta). \quad (۵۳-۲)$$

و به همین ترتیب مقدار چشمداشتی برای عملگر مجذور میدان الکتریکی نیز بدست می آید

$$\langle \bar{E}_x^2(r, t) \rangle_\alpha = \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} (1 + 4|\alpha|^2 \text{Sin}^2(\omega t - k.r - \theta)). \quad (۵۴-۲)$$

در نتیجه، انحراف از معیار میدان الکتریکی همانند انحراف از معیار میدان برای حالت پایه نوسانگر هماهنگ بدست می آید.

$$\Delta E_x(r,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}. \quad (55-2)$$

اگر مقدار چشمداشتی، برای عملگرهای مربعی<sup>۱</sup> نیز نوشته شود به عدم قطعیت زیر برای این دو عملگر

می رسیم

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha = \frac{1}{2} \langle (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \rangle = \text{Re}(\alpha), \quad (56-2)$$

$$\langle \hat{X}_2 \rangle_\alpha = \frac{1}{2i} \langle (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \rangle = \text{Im}(\alpha), \quad (57-2)$$

که این مقدار نیز مشابه انحراف از معیار عملگرهای مربعی برای حالت خلأ است.

در مورد عملگر تعداد نیز عدم قطعیت به شکل زیر می باشد

$$\bar{n} = \langle n \rangle_\alpha = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_\alpha = |\alpha|^2, \quad (58-2)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_\alpha = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_\alpha = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_\alpha = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (59-2)$$

$$\Delta \bar{n} = \sqrt{\bar{n}}, \quad (60-2)$$

که این نتیجه، از خواص توزیع پواسونی است

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (61-2)$$

یعنی احتمال آشکارسازی  $\Pi$  فوتون در اندازه گیری تعداد فوتون میدان همدوس، توزیع پواسونی دارد.

حالت  $|\varphi\rangle$  را که به نام حالت فاز معروف است، به شکل زیر می توان معرفی کرد

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} |n\rangle. \quad (62-2)$$

این حالت ها قابل بهنجار کردن و متعامد کردن هم زمان نیستند و به شکل زیر یک مجموعه کامل تشکیل

می دهند

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi |\varphi\rangle \langle \varphi| = 1. \quad (63-2)$$

اگر حالت دلخواه بهنجار شده  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$  فرض شود، تابع توزیع فاز<sup>۲</sup> به شکل ضرب داخلی حالت  $|\psi\rangle$  و

$|\varphi\rangle$  قابل تعریف است

<sup>۱</sup> Quadrature operators

<sup>۲</sup> Phase distribution



$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\varphi} c_n \right|^2. \quad (64-2)$$

این تابع توزیع به وضوح، همیشه مثبت است. همان گونه که از توابع توزیع انتظار می رود، انتگرال  $P(\varphi)$  بر حسب  $\varphi$  برابر واحد خواهد شد

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi) d\varphi = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (65-2)$$

این تابع توزیع را به شکل کلی تری با کمک عملگر چگالی معرفی می کنند

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle. \quad (66-2)$$

تابع توزیع فاز را می توان برای محاسبه میانگین هر تابعی از  $\varphi$  استفاده کرد [25]

$$\langle f(\varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} f(\varphi) P(\varphi) d\varphi. \quad (66-2)$$

برای مثال، تابع توزیع فاز برای حالت خالص  $n$  ها به شکل زیر است. با کمک این توزیع انحراف از معیار فاز برای حالت های  $n$  به دست می آید

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (67-2)$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = \sqrt{\frac{4\pi^2}{3} - \pi^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \quad (68-2)$$

تابع توزیع فاز را برای حالت های همدوس نیز می توان نوشت. از آنجایی که  $\alpha$  کمیتی مختلط است به شکل  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ ، تابع توزیع فاز به شکل زیر خواهد شد

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\varphi-\theta)} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}} \right|^2. \quad (69-2)$$

برای  $\bar{n}$  های بزرگ، از تقریب گاوسی برای توزیع پواسونی می توان استفاده کرد [26]

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \approx \left(2\pi|\alpha|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(n-|\alpha|^2)^2}{2|\alpha|^2}\right]. \quad (70-2)$$

با کمک این تقریب، تابع توزیع فاز به شکل تابع گاوسی زیر بدست می آید

$$P(\varphi) \approx \left(\frac{2|\alpha|^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-2|\alpha|^2(\varphi-\theta)^2\right]. \quad (71-2)$$

و هر چه  $|\alpha|^2 = \bar{n}$  بزرگتر باشد، پیک توزیع گاوسی باریک تر خواهد شد. با توجه به توزیع فاز ارائه شده، انحراف از معیار تغییرات  $\varphi$  قابل محاسبه است. (برای  $\bar{n}$  های بزرگ)

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 P(\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2|\alpha|^2}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi^2 \exp[-2|\alpha|^2(\varphi - \theta)^2] d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{2|\alpha|^2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2(2|\alpha|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (72-2)$$

$$\langle \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi P(\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2|\alpha|^2}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi \exp[-2|\alpha|^2(\varphi - \theta)^2] d\varphi = 0. \quad (73-2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{4|\alpha|^2}}. \quad (74-2)$$

در پایان این بخش در مورد حالت های همدوس می توان گفت که این حالت ها نزدیکترین حالت های کوانتومی به حالت های کلاسیکی هستند، چون:

۱- مقدار چشمداشتی میدان الکتریکی، به همان شکلی است که در کلاسیک شناخته شده است.

۲- انحراف از معیار میدان الکتریکی همانند آن چیزی است که برای خلأ می باشد.

۳- عدم قطعیت نسبی متوسط فوتون ها یعنی  $\frac{\Delta n}{\bar{n}}$ ، با افزایش  $\bar{n}$  کاهش می یابد.

۴- تابع توزیع فاز با افزایش متوسط تعداد فوتون ها، به خوبی متمرکز و تیز می شود.

## ۲-۲-۳ عملگر انتقال<sup>۱</sup> و تعریف مجدد حالت های همدوس

هر حالت بهنجار شده ای را می توان از یک عملگر یکانی بدست آورد. در مورد حالت های همدوس این عملگر یکانی، عملگر انتقال نامیده می شود و با تأثیر روی حالت خلأ، این حالت را به حالت همدوس  $\alpha$  تبدیل می شود و مفهوم انتقال را در صفحه مختلط  $\alpha$  از حالت پایه به حالت  $\alpha$  دارد

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (75-2)$$

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (76-2)$$

برای بررسی این عملگر، ابتدا قضیه بیگر-کمپبل-هاسدورف<sup>۲</sup> یادآوری می شود. این قضیه برای ضرب عملگرهای به شکل نمایی است. اگر دو عملگر  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  با هم جابجا شوند ( $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ) به شکل ساده  $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$  در خواهد آمد. اما اهمیت این قضیه برای هنگامی است که عملگرها با هم جابجا نشوند و در فیزیک موارد زیادی وجود دارد که تحول عملگرهایی مورد بررسی قرار می گیرند مانند  $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}$  که دو عملگر جابجا نمی شوند یا  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ . این قضیه در حالت کلی به شکل زیر می باشد

<sup>1</sup> Displacement Operator

<sup>2</sup> Baker - Campbell - Hausdorff theorem

$$\hat{C} = \ln(e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}). \quad (77-2)$$

که در آن عملگر  $\hat{C}$  به شکل زیر معرفی می شود

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{1}{12}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots \quad (78-2)$$

یا به شکل

$$e^{i\lambda\hat{A}} \hat{B} e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + (i\lambda)[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (79-2)$$

اثبات این قضیه در (پیوست الف) آمده است. در حالت خاص زمانی که شرایط زیر حاکم باشد

$$\begin{cases} [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \\ [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \end{cases} \quad (80-2)$$

این قضیه به شکل زیر ساده می شود

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad (81-2)$$

که به لم بیکر-کمپبل-هاسدورف شهرت دارد. با توجه به رابطه (81-2)، عملگر جابجایی را می توان بازنویسی کرد

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \alpha \hat{a}^\dagger \\ \hat{B} &= \alpha^* \hat{a} \end{aligned} \right\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2, \quad [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \quad (81-2)$$

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}} \quad (82-2)$$

اثر جمله  $e^{\alpha^* \hat{a}}$  روی حالت خلأ خود حالت خلأ خواهد شد و همانند عملگر واحد روی این حالت رفتار می کند

$$e^{\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{a})^l}{l!} |0\rangle = |0\rangle. \quad (83-2)$$

در نتیجه، اثر  $\hat{D}(\alpha)$  روی  $|0\rangle$  همانند تعریف های گذشته است با این تفاوت که چون این عملگر یکانی است (در مکانیک کوانتومی عملگرهای یکانی اهمیت ویژه ای دارند.) و اثر یک عملگر یکانی روی یک حالت بهنجار، بهنجارش آن حالت را تغییر نمی دهد، لذا تعریف مجدد حالت همدوس به این شکل نیازی به باز بهنجارش ندارد

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (84-2)$$

شرط یکانی بودن عملگر انتقال به شکل زیر می باشد

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = 1. \quad (85-2)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = e^{-\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}}. \quad (86-2)$$

مشاهده می شود که  $\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}$ ، عملگر هرمیتی است و این عملگر در واقع مولد انتقال در فضای مختلط  $\alpha$  می باشد. مجموعه ای که با  $\hat{a}$ ،  $\hat{a}^\dagger$  و ۱ ساخته شود، گروه هایزنبرگ نامیده می شود. از شکل کلی برای عملگرهای یکانی می توان برخی خواص را حدس زد. مانند داشتن یک عضو خنثی همچون  $\hat{D}(0)=1$  و خاصیت ضرب پذیری به جمع پذیری

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) \propto \hat{D}(\alpha + \beta). \quad (۸۷-۲)$$

برای بدست آوردن تساوی بین دو سمت رابطه، فرض می شود که

$$\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \quad \hat{B} = \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}. \quad (۸۸-۲)$$

در نتیجه بدست می آید

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*). \quad (۸۹-۲)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)] \exp[(\alpha + \beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha + \beta)^*\hat{a}]. \quad (۹۰-۲)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)] \hat{D}(\alpha + \beta). \quad (۹۱-۲)$$

این رابطه بیانگر این است که اگر عملگر مولد حالت های همدوس را به جای اثر روی حالت خلأ، روی حالت همدوس  $|\alpha\rangle$  اثر دهیم به حالت همدوس جدید  $|\alpha + \beta\rangle$  دست می یابیم که البته به اندازه یک فاز با آن حالت تفاوت دارد

$$\hat{D}(\beta)|\alpha\rangle = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)] |\alpha + \beta\rangle. \quad (۹۲-۲)$$

برای بررسی اینکه عملگر هرمیتی  $\hat{N}$  مولد چه تحولی است باید به دنبال عملگر یکانی از آن بود. پیشنهاد

به شکل  $\hat{M}(\theta) = e^{-i\theta\hat{N}}$  است

$$\hat{M}(\theta)|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} e^{-i\theta\hat{N}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle = |\alpha e^{-i\theta}\rangle. \quad (۹۳-۲)$$

و این یعنی عملگر  $\hat{M}(\theta)$  فاز  $\alpha$  را به اندازه  $\theta$  کاهش می دهد و بنابراین  $\hat{N}$  مولد دوران فاز  $\alpha$  است [7]

$$[\hat{a}, \hat{N}] = \hat{a}, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{N}] = -\hat{a}^\dagger. \quad (۹۴-۲)$$

مجموعه ای که با  $\hat{a}$ ،  $\hat{a}^\dagger$  و  $\hat{N}$  ساخته شود، گروه نوسانگر هماهنگ نامیده می شود. حالت های همدوس نمایشی از گروه نوسانگر هماهنگ است. از آنجایی که  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^\dagger$  دو عملگر غیر هرمیتی هستند، جبر نوسانگر هماهنگ، با عملگرهای  $\hat{q}$  و  $\hat{p}$  نوشته می شود

$$\hat{q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (۹۵-۲)$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \rightarrow \hat{N} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2 - 1). \quad (۹۶-۲)$$

$$[\hat{q}, \hat{N}] = i\hat{p}, \quad [\hat{p}, \hat{N}] = -i\hat{q}. \quad (۹۷-۲)$$