بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

رساله برای دریافت درجه دکتری رشته ریاضی محض(آنالیز)

مکان ریشه ها و خواص اکسترمال چندجمله ای ها

توسط :

حیدر علی سلیمان مزرجی

استاد راهنما :

دکتر محمود بیدخام

اساتید مشاور:

دکتر احمد زیره و دکتر مجید اسحقی

بهار ۱۳۹۲

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی پایانت از گزند انحراف، مصون دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده ای بپردازم و بی نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت بخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه ای که میان مردم مرا مرتبه می بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شک نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مداراکنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز هم خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس و ستایش بی منتها خدای را سزاست که انسان را آفرید و اسماء را به وی تعلیم نمود، به زیور علم و ادب بیاراست و به واسطه آن تاج لقد کرمنا بر تارک او نهاد، او این آیت نازل به رسول خاتم را اقراء آغاز نمود و قلم را دستمایه سوگند خویش قرار داد. حکیمی که انوار هدایت خویش را بر عموم کائنات تابان گردانید و پرتو فیض عمیم را در همه موجودات پدیدار ساخت.
حال با فیض و عنایت خداوند رحمان موفق به تنظیم و تدوین این رساله شده ام، بر خود واجب می دانم از تمامی عزیزانی که در فرجام رسانیدن این مهم از سرچشمه بذل و معرفتشان بهره برده ام، کمال تشکر و قدردانی را می نمایم. با این وجود می دانم فراتر از توان بیان من است، ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.
از خانواده عزیزم به خصوص همسر و یگانه فرزندم که همیشه همراه و مشوق من بوده اند و به خاطر تمام فداکاری ها و زحماتشان، سپاسگزارم. همچنین از استاد فرزانه، ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمود بیدخام که در کلاس درس، استاد و در زندگی الگوی اخلاق و رفتارم بوده اند، و جناب آقای دکتر احمد زیره و جناب آقای دکتر مجید اسحقی که در انجام این امر مهم مرا یاری نموده اند و نیز از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر حصارکی، اقای دکتر خلت و آقای دکتر علی غفاری که قبول زحمت نموده اند و داوری این رساله را بر عهده گرفته اند، همچنین از تمام دوستانم که بی شک دل تنگ لحظات با هم بودنشان خواهم شد، کمال تشکر و قدردانی را بجا می آورم و برای ایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. در پایان امیدوارم این رساله برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

تقدیم به

همسر

و

فرزند عزیزم

چکیده

در این رساله خواص اکسترمال مشتق معمولی و مشتق قطبی چند جمله ایها با توجه به مکان ریشه ها ، خواص اکسترمال چند جمله ای ها در فضای L^p همچنین بهبود نتایج کشی و انستروم-کاکیا، کران های ضمنی موجود برای ریشه های چند جمله ایها و حل معادلات چند جمله ایها به کمک ریشه تقریبی مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرند.

کلمات کلیدی:

خواص اکسترمال- چند جمله ای ها- مکان ریشه ها-مشتق قطبی-ماکزیمم قدر مطلق-قضیه روشه- عملگر پذیرفتنی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدّمه

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد. در فصل اوّل که شامل دو بخش است به بیان قضایا، لم ها و تعاریف اولیه که در فصل های بعد مورد نیاز می باشد، می پردازیم. در بخش اوّل از این فصل، مفاهیم پایه ای در توابع مختلط و در بخش دوّم، مفاهیم پایه ای در آنالیز حقیقی بیان می شوند.

فصل دوّم شامل سه بخش است. ابتدا در باره خواص چندجمله ایها بدون محدودیت، سپس خواص آنها با اعمال شرایطی روی مکان ریشه ها، همچنین نامساویهایی در مورد مشتق قطبی چندجمله ایها مرور شده اند. بخش دوم به لم های مورد نیاز برای بیان و اثبات نتایج اصلی اختصاص دارد. دربخش سوم نتایج جدیدی در مورد خواص چند جمله ایها ارائه شده اند. نتایج اصلی و لم های جدید را می توان در [۱۸، ۵۵، ۵۶] مشاهده نمود.

فصل سوّم را می توان ادامه فصل دوم دانست زیرا بعضی از نتایج مهم در فصل دوم در فضای L^p تعمیم داده شده اند. نتایج و لم های جدید ارائه شده در فصل سوم را می توان در [۱۹] مشاهده کرد.

در فصل چهارم در مورد مکان ریشه ها بصورت صریح و ضمنی بحث شده است. در این فصل مانند دو فصل قبل ابتدا نتایجی که تاکنون اثبات شده اند مورد بررسی قرار گرفته است که مهمترین آنها قضیه کشی، قضیه انستروم–کاکیا و قضیه دیاز (رابطه مکان ریشه های یک چند جمله ای و دنباله فیبوناچی) می باشند. بخش دوم به لمهای مورد نیاز اختصاص دارد. در بخش سوم ابتدا نتیجه ای اثبات شده است که نه تنها تعمیم قضیه های کشی و انستروم–کاکیا محسوب می شود بلکه در بعضی موارد بهبود آنها نیز هست، سپس نتیجه ای برای بهبود قضیه دیاز آورده شده است. بهبود کرانهای ضمنی دومین موضوع اصلی این بخش است که در آن تعمیم و بهبود کرانهای ضمنی موجود برای ریشه های چند جمله ای ها مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام در مورد وجود یک ریشه در همسایگی ریشه تقریبی معادلات چند جمله ای حقیقی و مختلط بحث شده است که در واقع جواب یک سوال باز می باشد. این نتایج را می توان در [۲۰، ۲۱، ۲۲، ۵۷] یافت.

مقالاتی که از این رساله استخراج شده است عبارتند از:

[1] M. Bidkham, H. A. Soleiman Mezerji, *Some Inequalities for the Polar Derivative of Polynomials in Complex Domain*, Complex Anal. Oper. Theory,

doi: 10.1007/s11785-012-0216-z

[2] H. A. Soleiman Mezerji, M. Ahmadi Baseri, M. Bidkham and A. Zireh, *Generalization of Certain Inequalities for a Polynomial and Its Derivative*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2012, Vol. 33, No. 1, pp. 68-74.

[3] H.A. Soleiman Mezerji, Mahmood Bidkham and Ahmad Zireh, *Bernstien type inequalities for polynomial and its derivative*, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, Vol. 4, Issue. 3, 20 12, pp. 26-33,

doi: 10 .5373/jarpm.10 20 .0 70 311

[4] M. Bidkham, H. A. Soleiman Mezerji and A. Mir, *L^p Inequalities and admissible operators for polynomials*, Analysis in Theory and Applications, Vol. 28, No. 2 (2012), 156-171, doi:10.3969/j.issn.1672-4070.2012.02.006

[5] M. Bidkham, H. A. Soleiman Mezerji, and M. Eshaghi Gordji, *Hyers-Ulam Stability of Polynomial Equations*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2010, Article ID 754120, 7 pages, doi:10.1155/2010/754120

[6] M. Bidkham, H. A. Soleiman Mezerji, and M. Eshaghi Gordji, *Hyers-Ulam Stability of Power Series Equations*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2011, Article ID 194948, 6 pages, doi:10.1155/2011/194948

[7] M. Bidkham, A. Zireh and H. A. Soleiman Mezerji, *Implicit bound for the zeros of polynomials*, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, Vol. 5, Issue. 4, 2013, pp. 88-94, doi: 10.5373/jaram.1401.041812

[8] H. A. Soleiman Mezerji and M. Bidkham, *Cauchy Type Results Concerning Location of Zeros of Polynomials* (submitted).

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

در این فصل نمادها، تعاریف وقضیه ها ولم های مورد نیاز در این رساله بیان می شوند، از اثبات نتایجی که در کتب مربوط به آنالیز مختلط و آنالیز حقیقی ثابت شده اند صرف نظر می شود.

ابتدا بعضی از نماد های مهم:

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط.

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی.

$\mathbb{R}^+$: مجموعه اعداد حقیقی مثبت.

مجموعه $\mathbb{P}_n$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i z^i : \quad a_n \neq 0 \right\}.$$

چنانکه می دانیم دنباله های فیبوناچی [1] و پل [2] بصورت زیر تعریف می شوند:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \tag{۱-۱}$$

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \qquad P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad \forall n \geq 2. \tag{۱-۲}$$

همچنین اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، آنگاه

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{۱-۳}$$

حال دنباله (t, s)-فیبوناچی را بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۱-۰-۱. برای اعداد حقیقی مثبت t و s دنباله اعداد (t, s)-فیبوناچی بصورت زیر تعریف می شود:

$$F_{t,s,0} = 0, \quad F_{t,s,1} = 1, \qquad F_{t,s,n} = tF_{t,s,n-1} + sF_{t,s,n-2} \quad \forall n \geq 2. \tag{۱-۴}$$

توجه ۱-۰-۲. واضح است که دنباله اعداد (t, s)-فیبوناچی برای $t = s = 1$ به دنباله معمولی فیبوناچی و برای $t = 2, s = 1$ به دنباله اعداد پل تبدیل می گردد.

این فصل در دو بخش ارائه می شود. بخش اول شامل مفاهیم پایه ای در توابع مختلط است و بخش دوم شامل مفاهیم پایه ای در فضاهای نرمدار میشود.

[1] Fibonacci

[2] Pell

۱-۱ مفاهیم بنیادی در توابع مختلط

تعریف ۱-۱-۱. اگر $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $p(z)$ را یک چند جمله ای حقیقی گویند. همچنین اگر $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $p(z)$ را یک چند جمله ای مختلط گویند.

تعریف ۱-۱-۲. تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ تحلیلی گفته می شود هرگاه f در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد. همچنین تابع f در یک میدان تحلیلی است هرگاه در هر نقطه این میدان تحلیلی باشد.

قضیه ۱-۱-۳. (قاعده تغییر علامت دکارت [۱]): فرض کنید m تعداد تغییر علامت ها در دنباله ضرایب چند جمله ای حقیقی $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ و k تعداد ریشه های مثبت معادله $p(z) = 0$ باشد آنگاه $k \leq m$ و $m - k$ عددی زوج است.

نتیجه ۱-۱-۴. فرض کنید l تعداد تغییر علامت ها در دنباله ضرایب چند جمله ای حقیقی $p(-z)$ و s تعداد ریشه های منفی معادله $p(z) = 0$ باشد آنگاه $s \leq l$ و $l - s$ عددی زوج است.

قضیه ۱-۱-۵. (قضیه اساسی جبر) هر چند جمله ای غیر ثابت از درجه n حداقل یک ریشه دارد.

نتیجه ۱-۱-۶. هر چند جمله ای از درجه n دقیقا n ریشه دارد که لزوما متمایز نیستند.

قضیه ۱-۱-۷. (قضیه روشه [۲]): اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده و بسته C تحلیلی باشند و برای هر z روی C ، $|g(z)| < |f(z)|$ آنگاه تعداد صفرهای توابع $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ درون C باهم برابر هستند.

قضیه ۱-۱-۸. (اصل ماکزیمم قدر مطلق) اگر تابع $f(z)$ در میدان D تحلیلی باشد آنگاه $|f(z)|$ ماکزیممی در D نمی تواند اختیار کند، مگر اینکه تابع $f(z)$ ثابت باشد.

قضیه ۱-۱-۹. (اصل مینیمم قدر مطلق) اگر تابع $f(z)$ در میدان D تحلیلی باشدو برای هر z در D ، $f(z) \neq 0$ آنگاه $|f(z)|$ مینیممی در D نمی تواند اختیار کند، مگر اینکه تابع $f(z)$ ثابت باشد.

[۱] Descartes

[۲] Rouche

تعریف ۱-۱-۱۰. چند جمله ای $f(z)$ حد اکثر از درجه n را خود-برگردان گویند هرگاه $z^n f(\frac{1}{z}) \equiv f(z)$ باشد.

واضح است که ریشه های $f(z)$ نسبت به دایره واحد متقارن هستند.

تعریف ۱-۱-۱۱. چند جمله ای $f(z)$ حد اکثر از درجه n را خود-معکوس گویند هرگاه برای یک $\gamma \in \mathbb{R}$ ، $z^n \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})} \equiv e^{i\gamma} f(z)$ باشد.

تعریف ۱-۱-۱۲. مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب گویند هرگاه برای هر دو عضو $x_1, x_2 \in X$ و هر $t \in (\circ, 1)$ داشته باشیم:

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in X.$$

همچنین تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را محدب گویند هرگاه برای هر دو عضو $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و هر $t \in (\circ, 1)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

تعریف ۱-۱-۱۳. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{C}$ باشد. کوچکترین مجموعه محدب شامل S را غلاف محدب آن می گویند.

قضیه ۱-۱-۱۴. (قضیه لوکاس [۱]) همه نقاط بحرانی یک تابع چند جمله ای غیر ثابت ، در غلاف محدب مجموعه ریشه های آن واقعند.

[1] Lucas

۱-۲ مفاهیم بنیادی در فضاهای نرم دار

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ را یک نرم روی X گویند هرگاه:

۱-برای هر x، $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

۲- برای هر x, y، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

۳-برای هر x و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$.

X به همراه $\| . \|$ را یک فضای نرم دار گویند.

تعریف ۱-۲-۲. فضای نرم دار $(X, \| . \|)$ را یک فضای باناخ گویند هرگاه X با متریک $d(x, y) = \| x - y \|$ یک فضای متریک کامل باشد، به این معنی که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید $0 < q < \infty$ و $p \in \mathbb{P}_n$، آنگاه $\| p \|_q$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\| p \|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} .$$

بعلاوه

$$\| p \|_0 = exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Log|p(e^{i\theta})| d\theta \right)$$

و

$$\| p \|_\infty = \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

توجه ۱-۲-۴. همچنین ثابت می شود:

$$\lim_{q \longrightarrow 0} \| p \|_q = \| p \|_0$$

و

$$\lim_{q \longrightarrow \infty} \| p \|_q = \| p \|_\infty .$$

قضیه ۱-۲-۵. (نامساوی مینکوفسکی [۱]) برای $1 \leq q \leq \infty$ و دو تابع اندازه پذیر f و g داریم:

$$\| f + g \|_q \leq \| f \|_q + \| g \|_q . \qquad (۱-۵)$$

برای $1 < q < \infty$ تساوی برقرار است اگر و فقط اگر دو تابع وابسته خطی باشند.

[۱] Minkowski

قضیه ۱-۲-۶. (نامساوی هولدر [1]) برای $1 \leq p,\ q \leq \infty$ بطوریکه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و دو تابع اندازه پذیر f و g

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

تساوی وقتی برقرار است که دو تابع وابسته خطی باشند.

تعریف ۱-۲-۷. برای $\delta = (\delta_\circ, \delta_1, \cdots, \delta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ عملگر $\Lambda_\delta : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ با ضابطه

$$\Lambda_\delta p(z) = \sum_{i=\circ}^{n} \delta_i a_i z^i$$

را پذیرفتنی گویند هرگاه یکی از دو خاصیت زیر را حفظ کند:

۱-همه صفرهای $p(z)$ در $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ باشند.

۲- همه صفرهای $p(z)$ در $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ باشند.

تعریف ۱-۲-۸. نگاشت $F : X \longrightarrow X$ را انقباضی گویند هر گاه ثابت $\circ < \lambda < 1$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\forall x, y \in X; |F(x) - F(y)| < \lambda |x - y|. \tag{۱-۶}$$

قضیه ۱-۲-۹. (قضیه نقطه ثابت باناخ) اگر I یک زیر مجموعه بسته از اعداد حقیقی باشد و $F : I \longrightarrow I$ یک نگاشت انقباضی باشد، آنگاه F یک نقطه ثابت منحصر بفرد دارد.

[1] Holder

فصل ۲

نامساویهایی درباره مشتق چند جمله ایها

مفهوم بهترین تقریب از زمانی وارد آنالیز ریاضی شده است که چبیشف (۱۹۲۱-۱۸۹۴)دانشمند شهیر روسی خواص چند جمله ایهایی که با یک تابع پیوسته انحراف دارند، مطالعه می کرد. سرانجام وایرشتراس برای اولین بار بیان و اثبات کرد که یک تابع پیوسته در یک بازه بسته متناهی می تواند بوسیله دنباله ای از چند جمله ایها بصورت یکنواخت تقریب شود. اولین نتیجه در مورد خواص اکسترمال چند جمله ای ها منسوب به مندلیف [1] [۴۹] شیمیدان معروف روسی است. مندلیف مطالعه ای روی وزن مخصوص یک محلول به عنوان تابعی از درصد ماده حل شده انجام داد. وی نمودار دقیقی برای هر ماده رسم نمود و مشاهده کرد که منحنی ها نقاط گره کوچکی دارند بطوریکه رابطه ساده ای برای معرفی آنها پیدا نکرد. او منحنی ها را بوسیله قوس های سهموی جایگزین کرد و مشاهده نمود که کمان ها بصورت هموار یکدیگر را قطع نمی کنند. وی می خواست بداند این گوشه هایی که منحنی ها به هم می رسند واقعی هستند یا در اثر خطای اندازه گیری بوجود آمده اند. مساله مندلیف را می توان با زبان ریاضی بصورت زیر بیان نمود:

اگر $p(x) \longrightarrow x$ یک چند جمله ای درجه دوم دلخواه در بازه $[a,\ b]$ باشد بطوریکه

$$\max_{x\in[a,b]} p(x) - \min_{x\in[a,b]} p(x) = L$$

آنگاه بزرگی $|p'(x)|$ روی $[a,\ b]$ چقدر است؟

زیرا اگر شیب یک قوس بیشتر از بزرگترین مقدار ممکن شیب قوس مجاور باشد آنگاه این قوسها باید دارای توابع چند جمله ای درجه دوم متفاوت باشند. با تغییر محور قائم و انتقال محورهای مختصات بطوریکه $[a, b]$ روی بازه $[-1, 1]$ منطبق شود سپس تغییر محور افقی و انتقال محورها بطوریکه $|p(x)| \leq 1$ مساله بصورت زیر تبدیل می شود: اگر $p(x) \longrightarrow x$ یک چند جمله ای درجه دوم دلخواه باشد بطوریکه

$$\forall x \in [-1, 1] : |p(x)| \leq 1$$

آنگاه بزرگی $|p'(x)|$ روی $[-1,\ 1]$ چقدر است؟

وی توانست ثابت کند که اگر $p(x)$ در شرایط فوق صدق کند، آنگاه

$$\forall x \in [-1, 1] : |p'(x)| \leq 4.$$

بوسیله چند جمله ای $p(x) = 1 - 2x^2$ نشان داده می شود که بهترین برآورد است.

مندلیف با حل این مساله دریافت که گوشه ها واقعی هستند. تعمیم مساله مندلیف برای چند جمله ای های درجه n توسط مارکف [2]

---

[1] Mendeleev

[2] Markov

[۴۷] بررسی شده است. وی ثابت کرد

اگر $p(x) = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i$ یک چند جمله ای از درجه n باشد و برای هر x در $[-1, 1]$ در رابطه $|p(x)| \leq 1$ صدق کند آنگاه

$$\forall x \in [-1, 1] : \qquad |p'(x)| \leq n^2. \tag{۱-۲}$$

کران بدست آمده بهترین مقدار ممکن است و چند جمله ای چبیشف $T_n(x) = cos\,(ncos^{-1}x)$ تساوی آنرا نتیجه می دهد. برادر مارکف کران بالای $|p^{(k)}(x)|$ را برای $k \leq n$ بررسی نموده است. تعیین بهترین کران $M_n(x)$ در نامساوی $|p'(x)| \leq M_n(x)$ برای هر n و هر $x \in [-1, 1]$ مساله بسیار پیچیده ای محسوب می شود. یکی از صورت های نتیجه برنشتاین بیان می کند که

$$M_n(x) \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1).$$

نامساویهایی از نوع مارکف و برنشتاین برای اثبات بعضی از قضیه ها در نظریه تقریب مهم هستند[۵۰] . به عنوان مثال تلیاکوسکی [۱] [۵۸] می نویسد: مسایل اکسترمال مربوط به نامساویهای مشتق چند جمله ایها در نظریه تقریب نقش اساسی دارند.

در این فصل تلاش می شود بهترین کرانهای موجود تابع $M_n(x)$ برای مشتق معمولی و مشتق قطبی چند جمله ایهای مختلط روی دایره ای به شعاع k مورد بررسی قرار گیرند . در خلال بحث نتایجی برای ماکزیمم قدر مطلق تابع $p(x)$ روی دایره به شعاع k بررسی شده اند. این فصل شامل سه بخش می باشد. بخش اول قضیه ها و نتایجی که تاکنون اثبات شده اند را شامل می شود. بخش دوم شامل لم هایی است که برای اثبات نتایج اصلی مورد نیاز است. بخش سوم شامل نتایج جدیدی است که نه تنها تعمیم نتایج اولیه محسوب می شوند بلکه در بعضی موارد بهبود آن ها نیز هستند.

۱-۲ قضایا و نتایج اولیه

در این بخش ابتدا خواص چند جمله ایها بدون هیچ شرطی مورد بررسی قرار می گیرند سپس با اعمال شرایطی بر روی مکان ریشه های چند جمله ای ها خواص آنها بررسی می شود. در ادامه نتایجی در خصوص مشتق قطبی چند جمله ای ها مورد مطالعه قرار می گیرد.

[۱] Telyakovskiy

۲-۱-۱ خواص چند جمله ای $p(z)$

اولین نتیجه معروف به نامساوی برنشتاین، بصورت زیر است:

قضیه ۲-۱-۱. اگر $p(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه n باشد آنگاه

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \leq n\max_{|z|=1}|p(z)|. \tag{۲-۲}$$

این بهترین نتیجه است و تساوی برای چند جمله ای که همه ی ریشه های آن در مبدا واقع است، حاصل می شود.

در سال ۱۹۳۰ برنشتاین [۱۵] قضیه زیر را ثابت نمود که رابطه (۲-۲) را براحتی می توان از آن نتیجه گرفت.

قضیه ۲-۱-۲. فرض کنید $p(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله ای باشند که درجه $p(z)$ از درجه $Q(z)$ بیشتر نیست. اگر همه ی ریشه های $Q(z)$ در $|z|\leq 1$ واقع باشند و برای هر z روی $|z|=1$ رابطه $|p(z)|\leq|Q(z)|$ برقرار باشد آنگاه برای هر $|z|=1$ داریم:

$$|p'(z)|\leq|Q'(z)| \tag{۳-۲}$$

به عنوان تعمیمی از قضیه ۲-۱-۲ مالک [1] و ونگ [2] [۴۵] نتیجه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۲-۱-۳. فرض کنید $p(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله ای باشند که درجه $p(z)$ از درجه $Q(z)$ بیشتر نیست. اگر همه ی ریشه های $Q(z)$ در $|z|\leq 1$ واقع باشند و برای هر z روی $|z|=1$ رابطه $|p(z)|\leq|Q(z)|$ برقرار باشد آنگاه برای هر $|z|=1$ و هر $|\beta|\leq 1$ داریم:

$$|\frac{zp'(z)}{n}+\beta\frac{p(z)}{2}|\leq|\frac{zQ'(z)}{n}+\beta\frac{Q(z)}{2}|. \tag{۴-۲}$$

قضیه زیر در مورد رابطه ماکزیمم قدر مطلق یک چند جمله ای روی دایره ای به شعاع R $(R>1)$ با ماکزیمم آن روی دایره واحد است.

قضیه ۲-۱-۴. اگر $p(z)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد آنگاه برای هر $R>1$

$$\max_{|z|=R}|p(z)|\leq R^n\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۵-۲}$$

و این بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چند جمله ای $p(z)=\lambda z^n$ حاصل می شود.

نامساوی (۲-۵) نتیجه مستقیم اصل ماکزیمم قدر مطلق است.

[1] Malik

[2] Vong