بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

روش‌های تکراری برای محاسبه‌ی
جواب‌های خاص دستگاه معادلات سیلوستر تعمیم یافته

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

سیده خدیجه موسوی محمدی

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را بر آنچه از وجود مبارکش به ما شناسانده، و بر آنچه از شکرش به ما الهام فرموده، و بر آن درهای دانش که به پروردگاریش بر ما گشوده.

لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم نهایت تشکر را داشته باشم، چراکه همواره مشوق و پشتیبان من بوده‌اند و دعای خیرشان همراه من بوده است.

از استاد فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه که با راهنمایی‌های دلسوزانه خود بنده را در نوشتن این پایان‌نامه یاری نمودند، کمال سپاسگزاری را دارم و از خداوند متعال برای ایشان توفیق روز افزون مسئلت می‌نمایم. همچنین از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر عبداله برهانی فر و جناب آقای دکتر محمد ضارب نیا که زحمت باز خوانی و داوری این رساله را بر عهده داشتند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

سیده خدیجه موسوی محمدی

تیر ۱۳۹۱

نام خانوادگی: موسوی محمدی **نام:** سیده خدیجه

عنوان پایان نامه :

روش‌های تکراری برای محاسبه‌ی جواب‌های خاص دستگاه معادلات سیلوستر تعمیم یافته

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی:۱۳۹۱/۴/۲۸ **تعداد صفحه:** ۸۹

کلید واژه‌ها :
سیلوستر تعمیم یافته، روش‌های تکراری، همگرایی.

چکیده:
دستگاه معادلات ماتریسی کلی

$$\sum_{t=1}^{l} A_{it}X_tB_{it} = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

(دستگاه معادلات ماتریسی سیلوستر تعمیم یافته) کاربرد زیادی در شاخه‌های مختلف کنترل و نظریه‌ی سیستم دارد. در این پایان‌نامه با استفاده از ایده‌ی الگوریتم گرادیان مزدوج، دو روش تکراری برای بدست آوردن جواب‌های خاص این نوع معادلات ارائه می‌شود. نشان می‌دهیم وقتی که دستگاه معادلات ماتریسی سازگار است با استفاده از این الگوریتم‌ها می‌توان یک گروه جواب در تعداد متناهی تکرار در غیاب خطای گرد کردن برای آن بدست آورد، و با انتخاب حدس اولیه‌ی مناسب می‌توان گروه جواب با کمترین نرم فروبنیوس را بدست آورد. با استفاده الگوریتم‌های ارائه شده می‌توان بهترین تقریب برای گروه ماتریس داده شده‌ی $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_l)$، را از بین مجموعه جوابهای آن بدست آورد.

فهرست مندرجات

تقدیر و تشکر . . . . الف

مقدمه . . . . ه

۱ مقدمات و مفاهیم اولیه ۱

۲ یک الگوریتم کارا برای حل دستگاه معادلات ماتریسی کلی ۱۳

۱.۲ الگوریتم گرادیان مزدوج ۱۵

۱.۱.۲ یک الگوریتم کارا برای حل دستگاه معادلات ماتریسی ۱۵

۲.۲ نتایج عددی ۳۴

۳.۲ کاربردها ۳۷

۳ حل دستگاه معادلات ماتریسی کلی روی ماتریس‌های دومتقارن تعمیم یافته ۴۶

۱.۳ الگوریتم حل معادلات روی ماتریس‌های دومتقارن تعمیم یافته ۴۹

۲.۳ نتایج عددی ۷۷

۳.۳ نتیجه‌گیری ۸۶

A **فهرست الفبایی** ۹۰

لیست اشکال

۱.۲ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۱.۲ به ازای $X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0$ . . . ۳۵

۲.۲ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۱.۲ . . . . ۳۶

۳.۲ نرم مانده برای مثال ۱.۲ در روش دینگ و چن ۳۷

۴.۲ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۲.۲ به ازای $\bar{X}_1^{(1)} = \bar{X}_2^{(1)} = 0$. ۳۸

۱.۳ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۱.۳، $X_1(1) = X_2(1) = 0$. ۸۰

۲.۳ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۲.۳ ، $\bar{X}_1(1) = \bar{X}_2(1) = 0$. ۸۲

۳.۳ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۳.۳ ، $X_1(1) = X_2(1) = 0$. ۸۴

۴.۳ خطای نسبی و نرم مانده برای مثال ۴.۳ ، $\bar{X}_1(1) = \bar{X}_2(1) = 0$. ۸۵

مقدمه

معادلات ماتریسی سیلوستر[۱] (در حالت خاص معادلات ماتریسی لیاپانف[۲]) کاربرد زیادی در زمینه‌های مختلف از قبیل کنترل، پردازش سیگنالها و پردازش تصاویر دارد. معادلات ماتریسی لیاپانف نیز نقش مهمی را در نظریه‌ی پایداری و کنترل بهینه‌ی مسائل ایفا می‌کند. مقالات زیادی به مطالعه‌ی این نوع از معادلات ماتریسی پرداختند. برای مثال بائو[۳] و همکارانش در [۱]، روش جدیدی بر اساس الگوریتم سراسری آرنولدی[۴] برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر بزرگ ارائه دادند. در [۲]، دهقان[۵] و هجاریان[۶] الگوریتم تکراری برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر مرتبه‌ی دوم[۷]

$$EVF^{2} - AVF - CV = BW,$$

ارائه نمودند اخیراً دهقان و هجاریان در [۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳]، چندین روش تکراری برای حل معادلات ماتریسی مانند معادلات ماتریسی سیلوستر روی ماتریس‌های بازگشتی[۸] و پادبازگشتی[۹] و ماتریس‌های دومتقارن تعمیم یافته[۱۰] ارائه دادند. کگ استروم و پروما[۱۱] در [۱۲]، درباره‌ی

---

[۱] Sylvester matrix eqation
[۲] Lyapunov
[۳] Bao
[۴] global Arnoldi
[۵] Dehghan
[۶] Hajarian
[۷] second-order Sylvester matrix equation
[۸] reflexive
[۹] anti-reflexive
[۱۰] generalized bisymmetric
[۱۱] Poromaa

کرانهای خطای سبک —لپک[1]، برای معادلات سیلوستر بحث کردند. همچنین کگ استروم[2] و وستین[3] در [۱۳]، روش شور[4] تعمیم یافته را برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر تعمیم یافته ارائه دادند. راب[5] و سدکین[6] در [۱۶]، راه حل تقریبی برای حل معادلات سیلوستر بزرگ ارائه نمودند. استارک[7] و نیسامر[8] در [۱۸]، یک روش تکراری برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر با استفاده از روش SOR ارائه کردند. وانگ[9] در [۲۰، ۱۹]، جواب متقارن مرکزی[10] برای معادلات ماتریسی

$$A_1X = C_1, \quad A_2XB_2 = C_2,$$

ارائه داده است. در [۲۲، ۲۱]، ژو[11] و دوان[12] جواب چندین معادلات سیلوستر را به دست آوردند. در [۲۳]، جواب پارامتری عمومی معادلات سیلوستر تعمیم یافته با استفاده از تابع سیلوستر که دارای خواص جالبی می‌باشد، ارائه شده است.

در این پایان‌نامه مسائل زیر که توسط دهقان و هجاریان در [۹، ۸] مطرح شده به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مساله۱: برای ماتریس‌های داده شده‌ی $C_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$، $B_{ij} \in \mathbb{R}^{m_j \times q_i}$، $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{p_i \times n_j}$، $i, j = 1, 2, \ldots, l$ گروه ماتریس $(X_1, X_2, \ldots, X_l)$، که $X_j \in \mathbb{R}^{n_j \times m_j}$، $j = 1, 2, \ldots, l$، را طوری پیدا کنید که

$$\sum_{j=1}^{l} A_{ij}X_jB_{ij} = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{1.0}$$

مساله ۲: وقتی مساله‌ی۱ سازگار است، فرض کنید S_E نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی گروه جوابهای آن باشد. به ازای گروه ماتریس داده شده‌ی $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_l)$ که در آن $\hat{X}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times m_j}$،

---

[1] LAPACK-style
[2] Kagstrom
[3] Westin
[4] Schur
[5] Robbe
[6] Sadkane
[7] Starke
[8] Neithammer
[9] Wang
[10] centrosymmetric
[11] Zhou
[12] Duan

$j = ۱, ۲, \dots, l$. گروه ماتریس $(\tilde{X}_۱, \tilde{X}_۲, \dots, \tilde{X}_l)$ که $\tilde{X}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times m_j}$، $j = ۱, ۲, \dots, l$، را طوری پیدا کنید که

$$\|\tilde{X}_۱ - \hat{X}_۱\|_F^۲ + \|\tilde{X}_۲ - \hat{X}_۲\|_F^۲ + \cdots + \|\tilde{X}_l - \hat{X}_l\|_F^۲$$
$$= \min_{[X_۱, X_۱, \dots, X_l] \in S_E} \left\{ \|X_۱ - \hat{X}_۱\|_F^۲ + \|X_۲ - \hat{X}_۲\|_F^۲ + \cdots + \|X_l - \hat{X}_l\|_F^۲ \right\}. \tag{۲.۰}$$

مساله۳: برای ماتریس‌های داده شده‌ی $D_i \in \mathbb{R}^{s_i \times m}$، $E_i \in \mathbb{R}^{n \times t_i}$، $F_i \in \mathbb{R}^{s_i \times t_i}$، $i = ۱, ۲, \cdots, p$ و $R \in \aleph\ell^{m \times m}$، $S \in \aleph\ell^{n \times n}$ ماتریس $X \in \mathcal{S}_{R,S}^{m \times n}$ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم

$$D_i X E_i = F_i, \quad i = ۱, ۲, \dots, p, \tag{۳.۰}$$

که در آن $\aleph\ell^{m \times m}$ و $\mathcal{S}_{R,S}^{m \times n}$، به ترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های حقیقی $m \times m$، مانند R، با خاصیت $R^{-۱} = R \neq \pm I$، و ماتریس‌های (R, S)—متقارن می‌باشند.

مساله۴: برای ماتریس‌های داده شده‌ی $D_i \in \mathbb{R}^{s_i \times m}$، $E_i \in \mathbb{R}^{n \times t_i}$، $F_i \in \mathbb{R}^{s_i \times t_i}$ $i = ۱, ۲, \cdots, p$، و $R \in \aleph\ell^{m \times m}$، $S \in \aleph\ell^{n \times n}$، ماتریس $X \in \tilde{\mathcal{S}}_{R,S}^{m \times n}$ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم

$$D_i X E_i = F_i, \quad i = ۱, ۲, \dots, p, \tag{۴.۰}$$

که در آن $\aleph\ell^{m \times m}$ و $\tilde{\mathcal{S}}_{R,S}^{m \times n}$، به ترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های حقیقی $m \times m$، مانند R، با خاصیت $R^{-۱} = R \neq \pm I$، و ماتریس‌های (R, S)—متقارن کج می‌باشند.

مساله ۵: برای ماتریس‌های داده شده‌ی $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_j \times s_i}$، $A_{ij} \in \mathbb{R}^{r_i \times n_j}$ و $M_i \in \mathbb{R}^{r_i \times s_i}$ و ماتریس‌های متعامدمتقارن $R_j \in \mathbb{SOR}^{n_j \times n_j}$، $j = ۱, ۲, \dots, p$، گروه ماتریسی دومتقارن تعمیم یافته‌ی $(X_۱, X_۲, \dots, X_p)$ که $X_j \in \mathbb{BSR}_{R_j}^{n_j \times n_j}$، $j = ۱, ۲, \dots, p$، را طوری پیدا کنید که

$$\sum_{j=۱}^{p} A_{ij} X_j B_{ij} = M_i, \quad i = ۱, ۲, \dots, p. \tag{۵.۰}$$

مساله ۶: فرض کنید مساله‌ی ۵ سازگار و S_r نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی گروه جواب‌های آن باشد. برای هر گروه ماتریسی دومتقارن تعمیم یافته‌ی $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_p)$ که $\hat{X}_j \in \mathbb{BSR}_{R_j}^{n_j \times n_j}$، $j = 1, 2, \ldots, p$، گروه ماتریسی $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_p)$ که $\tilde{X}_j \in \mathbb{BSR}_{R_j}^{n_j \times n_j}$، $j = 1, 2, \ldots, p$، را طوری پیدا کنید که

$$\sum_{j=1}^{l} \|\tilde{X}_j - \hat{X}_j\|_F^2 = \min_{(X_1, X_2, \ldots, X_l) \in S_r} \{\sum_{j=1}^{p} \|X_j - \hat{X}_j\|_F^2\}. \tag{6.0}$$

این پایان‌نامه به صورت زیر فصل‌بندی شده است. در فصل اول برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم یک الگوریتم کارا برای حل دستگاه معادلات ماتریسی (۱.۰)، در حالت کلی ارائه می‌کنیم و سپس با استفاده از ویژگی‌های الگوریتم، مساله‌ی ۲ را حل می‌کنیم. در ادامه کاربردهای الگوریتم برای حل مسائل ۳ و ۴ مطرح می‌شود. در فصل سوم الگوریتم تکراری برای دستگاه معادلات ماتریسی (۱.۰)، روی ماتریس‌های دومتقارن تعمیم یافته ارائه شده و با استفاده از ویژگیهای الگوریتم، مساله ۶ را حل می‌کنیم. در پایان هر فصل همگرایی الگوریتم‌های ارائه شده با ارائه‌ی چند مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.
مجموعه‌ی تمام n—تایی‌های

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

که در آن $x_i \in \mathbb{R}$، $i = 1, 2, \dots, n$ را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب $\mathbb{C}^n$ تعریف می‌شود که در آن $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط است.
مجموعه‌ی تمام ماتریس های $m \times n$ حقیقی (یا مختلط) را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{m\times n}$) نشان می‌دهیم.
فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{n\times n}$). در این صورت ماتریس A را
۱) قطری[1] گویند، هرگاه $a_{ij} = 0$، $i \neq j$. یک ماتریس قطری معمولاً با $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ نشان داده می‌شود.
۲) همانی[2] گویند و با I یا I_n نشان می‌دهند، هرگاه $I_n = I = diag(1, 1, \dots, 1)$.

ترانهاده‌ی ماتریس $A = (a_{ij})$ را با A^T نشان می‌دهیم و (i, j) امین درایه‌ی آن برابر با

---
[1] diagonal
[2] unity

درایه‌ی (j,i) ام ماتریس A است، یعنی $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. اگر $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه ترانهاده‌ی هرمیتی آن را با A^H نشان می‌دهیم و درایه‌ی (i,j) ام آن برابر است با مزدوج درایه‌ی (j,i) ام ماتریس A، یعنی $(A^H) = \overline{a_{ji}}$. یادآوری می‌کنیم که اگر $z = \alpha + i\beta$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه $\bar{z} = \alpha - i\beta$ تعریف می‌شود که در آن $i = \sqrt{-۱}$ واحد موهومی است.

تعریف ۱.۱ ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را متقارن[۱] گویند، هر گاه $A^T = A$. متقارن کج[۲] گویند، هر گاه $A^T = -A$.

تعریف ۲.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را یکانی گوییم هر گاه $A^H = A^{-۱}$. اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه A را متعامد گوییم هر گاه $A^T = A^{-۱}$.

تعریف ۳.۱ دو ماتریس A و B را متشابه گویند هر گاه ماتریس نامنفردی چون P موجود باشد به طوری که $P^{-۱}AP = B$.

تعریف ۴.۱ ماتریس $n \times n$، A را قطری شدنی[۳] گوییم هر گاه متشابه با یک ماتریس قطری باشد.

تعریف ۵.۱ ماتریس A را خودتوان گویند هر گاه $A^۲ = A$.

قضیه ۱.۱ اگر A یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه A قطری شدنی است. یعنی ماتریس نامنفردی مانند P وجود دارد به طوری که

$$P\begin{pmatrix} I & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}P^{-۱} =: PDP^{-۱}.$$

---

[۱] symmetric
[۲] skew-symmetric
[۳] diagonalizable

برهان : به [۱۴] مراجعه شود. □

تعریف **۶.۱** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. مجموع درایه‌های روی قطر ماتریس A را اثر ماتریس A، می‌نامیم و با نماد $tr(A)$ نشان می‌دهیم.

تبصره : فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و α, β دو اسکالر دلخواه باشند. در این صورت

$$tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B).$$

در این پایان نامه از نمادهای $R(A)$، $null(A)$ و 1_n که بترتیب نشان دهنده‌ی زیر فضای تولید شده توسط ستونهای ماتریس A، و فضای پوچ A، و یک ماتریس $n \times n$ که تمام درایه‌های آن ۱ است، می‌باشند استفاده می‌شود.

تعریف **۷.۱** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه[۱] متناظر به بردار ویژه[۲] x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0.$$

در این صورت (λ, x) را یک زوج ویژه‌ی A گویند و بزرگترین مقدار ویژه‌ی A را با $\lambda_{\max}$ نشان می‌دهیم.

تعریف **۸.۱** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و W زیر مجموعه‌ی ناتهی از V باشد. در این صورت W را زیر فضای V گوییم هرگاه به ازای هر $v_1, v_2 \in W$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$، $\alpha v_1 + \beta v_2 \in W$.

[۱] eigenvalue
[۲] eigenvector

تعریف ۹.۱ مجموعه بردارهای $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ را یک مجموعه‌ی یکا متعامد نامند هر گاه به ازای هر i، $\|u_i\| = 1$ و به ازای i و j با شرط $i \neq j$، $u_i \perp u_j$. به عبارت دیگر

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که هر مجموعه از بردارهای یکامتعامد مستقل خطی‌اند. بعلاوه هر مجموعه از بردارهای یکا متعامد شامل n بردار از فضای برداری V با بعد n، یک پایه‌ی یکا متعامد برای V تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱ یک نرم[1] ماتریسی روی $\mathbb{C}^{m\times n}$ تابع‌ای است از $\mathbb{C}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) به ازای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A\| \geq 0$. **بعلاوه** $\|A\| = 0$ اگر وتنها اگر $A = 0$.

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

(ج) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

یکی از نرم‌های ماتریسی متداول نرم فروبنیوس[2] است. برای هر ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$، نرم فروبنیوس آن به صورت زیر تعریف می شود

$$\|A\|_F^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = tr(A^T A)^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۱۱.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت گوییم، هرگاه:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \quad x^H A x > 0.$$

اگر A هرمیتی و معین مثبت باشد ماتریس A را معین مثبت هرمیتی[3] گوییم. همچنین ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی[4] گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H A x \geq 0$.

[1] norm
[2] Frobenius
[3] Hermitian positive definite
[4] Hermitian positive semidefinite

قضیه ۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس هرمیتی باشد. A نیمه معین مثبت هرمیتی است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه‌ی آن نامنفی باشند.

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، قرار می دهیم $B = A^H A$. ماتریس B نیمه معین مثبت هرمیتی است. بنابراین تمام مقادیر ویژه‌ی آن نامنفی اند. فرض کنید که $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ مقادیر ویژه‌ی B باشند. قرار می دهیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

مقادیر $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ را مقادیر تکین[1] A گویند.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. در این صورت تجزیه‌ی ماتریس A به صورت $A = U \sum V^H$ را تجزیه‌ی مقدار تکین[2] A (SVD) می‌نامیم که در آن U و V ماتریس‌های یکانی به ترتیب از مرتبه‌ی $m \times m$ و $n \times n$ هستند و $\sum$ یک ماتریس $m \times n$ به صورت زیر است

$$\sum = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

که در آن $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ و $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $A = U \sum V^H$ تجزیه‌ی مقدار تکین A باشد. در این صورت معکوس تعمیم یافته‌ی[3] A، که یک ماتریس از مرتبه‌ی $n \times m$ است و به صورت

$$A^+ = V \sum{}^+ U^H,$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\sum{}^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] singular values
[2] singular value decomposition
[3] generalized inverse

فرض کنید A دارای تجزیه‌ی مقدار تکین $A = U \sum V^H$ باشد که در آن

$$V = (\,V_1 \quad V_2\,), \quad V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}, \;\; V_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)},$$
$$U = (\,U_1 \quad U_2\,), \quad U_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}, \;\; U_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}.$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$A = (\,U_1 \quad U_2\,) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{pmatrix}.$$

با توجه به این که داریم

$$A^+A = V_1V_1^H, \quad VV^H = V_1V_1^H + V_2V_2^H = I,$$

در نتیجه $A^+A = I - V_2V_2^H$ یا $I - A^+A = V_2V_2^H$، بنابراین

$$R(I - A^+A) = R(V_2V_2^H) = R(V_2).$$

از طرفی داریم

$$N(A) = N(V_1DV_1^H) = N(V_1^H) = R(V_1)^\perp = R(V_2).$$

در نتیجه $R(I - A^+A) = N(A)$. بعلاوه داریم

$$A^+AA^+ = A^+,$$
$$AA^+A = A.$$

تعریف ۱۴.۱ یک دستگاه معادلات را سازگار گویند هر گاه دارای جواب باشد در غیر این صورت ناسازگار گویند.

قضیه ۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، آنگاه به ازای هر $y \in \mathbb{C}^n$، $x = A^+b + (I - A^+A)y$ یک جواب برای دستگاه $Ax = b$ است.

برهان : داریم

$$\begin{aligned} Ax &= A(A^+b + (I - A^+A)y) = AA^+b + Ay - AA^+Ay \\ &= AA^+b + Ay - Ay = AA^+b. \end{aligned}$$

از طرفی

$$Ax = b \Rightarrow AA^+Ax = AA^+b \Rightarrow b = Ax = AA^+b.$$

پس $Ax = b$. حال فرض کنید z یک جواب دلخواه دستگاه $Ax = b$ باشد. می‌توان نوشت

$$z = A^+Az - A^+Az + z = A^+Az + (I - A^+A)z = A^+b + (I - A^+A)z.$$

بنابراین هر جواب $Ax = b$، به صورت

$$x = A^+b + R(I - A^+A) = A^+b + null(A),$$

نوشته می‌شود.

□

قضیه **۴.۱** فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{C}^m$. اگر $x^* = A^+b$، آنگاه

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2.$$

تعریف **۱۵.۱** فرض کنید $c_i \in \mathbb{R}^n$ نشان دهندی ستونهای ماتریس $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ باشد، به طوری که $C = [c_1, c_2, \cdots, c_m]$. در این صورت $vec(C)$ یک بردار $mn \times 1$ است، که از روی هم قرار دادن ستونهای ماتریس C بدست می آید. به عبارت دیگر

$$vec(C) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}.$$

تعریف ۱.۱۶ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. در این صورت حاصلضرب کرونکر[۱] A و B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

مثال ۱.۱ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

دراین صورت داریم:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

قضیه ۱.۵ به ازای هر دو ماتریس دلخواه A و B داریم:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

برهان : فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. در این صورت با توجه به تعریف حاصلضرب کرونکر داریم:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^T &= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{m1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{pmatrix} = A^T \otimes B^T. \end{aligned}$$

□

[۱] Kronecker

قضیه ۶.۱ اگر $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$، $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ سه ماتریس دلخواه باشند، آنگاه داریم:

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B).$$

برهان : با توجه به این که

$$ABC = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jk})c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jk})c_{kn} \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jk})c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jk})c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jk})c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jk})c_{kn} \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$vec(ABC) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jk})c_{k1} \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jk})c_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jk})c_{k1} \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jk})c_{k2} \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jk})c_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jk})c_{k2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jk})c_{kn} \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jk})c_{kn} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}(\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jk})c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
c_{11}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j1} + c_{21}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j2} + \cdots + c_{q1}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jq} \\
c_{11}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j1} + c_{21}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j2} + \cdots + c_{q1}\sum_{j=1}^{p} a_{j2}b_{jq} \\
\vdots \\
c_{11}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j1} + c_{21}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j2} + \cdots + c_{q2}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jq} \\
c_{12}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j1} + c_{22}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j2} + \cdots + c_{q2}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jq} \\
c_{12}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j1} + c_{22}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j2} + \cdots + c_{q2}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jq} \\
\vdots \\
c_{12}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j1} + c_{22}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j2} + \cdots + c_{q2}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jq} \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
c_{1n}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j1} + c_{2n}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j2} + \cdots + c_{qn}\sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jq} \\
c_{1n}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j1} + c_{2n}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j2} + \cdots + c_{qn}\sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jq} \\
\vdots \\
c_{1n}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j1} + c_{2n}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j2} + \cdots + c_{qn}\sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jq}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
c_{11}A & c_{21}A & \cdots & c_{q1}A \\
c_{12}A & c_{22}A & \cdots & c_{q2}A \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{1n}A & c_{2n}A & \cdots & c_{qn}A
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{1q} \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{pq}
\end{pmatrix}
$$

$$
= (C^T \otimes A)vec(B).
$$

$\square$