وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

توابع اسپلاین پارامتریک برای حل معادله برگر با مشتق کسری زمان

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشدرشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

محمد اکبری

اساتید راهنما:

دکتر داود رستمی

دکتر سعید عباس بندی

آذر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

مادر مهربانم ، آنکه برایم دریای بی کران عشق وفداکاری است

پدر بزرگوارم که مسیر سربلندی را به شیواترین روش به من آموخت

برادران، خواهران ودختر عزیزم که وجودشان شادی بخش ومایه آرامش من است

همسر وفرزندانم علی وهادی جان که در طول این دوره تحصیلم با من همسفر بودند

بنام خدا

ولم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق

سپاس خداوند یکتایی را که علم و معرفت را از آن انسان قرار داد واو را شایسته تفکر واندیشیدن دربین موجوادت جهان انتخاب نمود. امیدوارم بتوانم آموخته هایم را در راه پیشرفت علمی وطن عزیزم افغانستان مورد استفاده قرار دهم . درآغاز وظیفه خودم میدانم تا از زحمات بی دریغ اساتید محترم راهنمایم ، جناب آقایان دکتر داود رستمی ودکتر سعید عباسبندی ، صمیمانه تشکر و قدر دانی نمایم که همواره بنده را قوت قلب و اعتماد به نفس بخشیدند که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ی ایشان این مجموعه به انجام نمی رسید.ازجناب آقای دکترمحمدجباری که دواری این پایان نامه را بانهایت دقت وصرف وقت زیاد انجام دادند، از جناب آقای دکترمیرمحمد علوی نیکچه نماینده محترم تحصیلات تکمیلی کمال سپاس وتشکر را دارم.

ازکلیه اساتید محترم دوران تحصیلم نیز تشکر می‌کنم.

در پایان از خانواده محترمم که درتمامی مراحل زندگی وبه ویژه در دوران تحصیل همواره مشوق من بوده اند، با تمام وجود سپاسگزاری می نمایم.

محمد اکبری

آذر ۱۳۹۲

چکیده

دراین پایان نامه توابع اسپلاین پارامتریک مکعبی برای بدست آوردن روش عددی جواب تقریبی معادله برگرکسری زمان را بررسی می‌کنیم. خطای برشی این روش را بطور تئوری تحلیل می نمائیم.وبا استفاده ازدو مثال عددی روش موجود توضیح داده می‌شود. ونتایج بدست امده نشان می دهد که تکنیک موجود موثر، مناسب ودقیق است.

واژه های کلیدی: توابع اسپلاین پارامتریک، معادله برگرکسری.

فهرست

فهرست جداول

فهرست شکلها

پیشگفتار

معادله برگر توصیف کننده تعدادی از پدیده های مربوط به امواج غیر خطی است که درتئوری انتشار موج آکوستیک وفیزیک پلاسما کاربرد دارد. این معادله ابتدا توسط برگر درسال ۱۹۳۹ بعنوان یک مدل ساده در تلاطم مطرح شد.

معادله برگر ویژگی های جهان شمول بسیار متنوعی ازخود نشان می دهد ودر سالهای اخیر، درفیزیک سیستم های پیچیده بسیار مورد توجه قرار گرفته است. معلوم شده است که این معادله، مدل مناسبی برای دسته وسیعی ازسیستم های پیچیدهٔ بحرانی دور از تعادل فراهم می کند، ازجمله پدیده های رشد مثلا رشد مسطوح و لایه های مرزی بین دو محیط مثلا دیواره های حوزه های مغناطیسی درفرو مغناطیسی های نامنظم یا رشد بلورها وکولونی های باکتری ، افت و خیزهای دور ازتعادل خطوط گردابه در ابر رسانا و دینامیک پلیمرهای هدایت شده درمحیط های تصادفی.

این پایان نامه شامل فصل های ذیل است:

درفصل اول ، درمورد حساب دیفرانسیل کسری وتاریخچه آن بحث شده است . درفصل دوم به معرفی انواع توابع اسپلاین وبکارگیری آن در حل معادلات دیفرانسیل معمولی پرداخته شده است . ودر فصل سوم معادله برگر[1]و حل آن توسط توابع اسپلاین پارامتریک با مشتق کسری زمان بیان میشود. درواقع این پایان نامه اثری است براساس مقاله [۳۵] .

1 . Burgers’

فصل اول

حساب دیفرانسیل کسری

۱.۱ مقدمه برحساب دیفرانسیل کسری

پدیده های زیادی را درفیزیک، مهندسی، شیمی و دیگر علوم میتوان به صورت موفقیت آمیزی با مدل هایی توصیف کرد که از ابزار ریاضی محاسبه کسری یعنی تئوری مشتق ها و انتگرا ل های مرتبه غیرصحیح کسری بهره می گیرند که اخیراً معادلات دیفرانسیل کسری به خاطرتوصیف دقیق پدیده های طبیعی مورد توجه قرارگرفته اند [۳۶].

به طورکلی، حل معادلات دیفرنسیل با مرتبه کسری سخت تر از حل معادلات دیفرانسیل با مرتبه صحیح می باشد. حتی دراغلب موارد جواب تحلیلی یا جواب دقیق مسله موجود نمی باشد و ما ناچار به حل این دسته ازمعادلات با روش های عددی هستیم .

محاسبات کسری درواقع تعمیمی از دیفرانسیل و انتگرال به یک مرتبه دلخواه است. نخست، ریاضی-دان ها درگسترش دیفرانسیل و انتگرال کسری تلاش می کردند. بعدها وقتی مشتقات و انتگرال های مرتبه دلخواه را به دست آوردند، واژه انتگرال ودیفرانسیل از یک مرتبه دلخواه را به جای محاسبات کسری جایگزین کردند .

تاریخ محاسبات کسری علی رغم ابهام جزئی اش، به سال های اولیه محاسبات برمی گردد. اکثر ریاضی دان ها با نماد ابداع شده توسط لایبنیتز[1] که مشتق مرتبه n ام یعنی $\frac{d^n y}{dx^n}$ رابیان می کرد،

1- Leibniz

آشنا هستند که درآن n یک عدد صحیح است. یک احتمال این بود که اگر n یک عدد کسری باشد مشتق معنی دارد؟ درحقیقت هوپیتال[1] همانند لایبنیتز به این فرضیه پی برده بود.

درسال ۱۶۹۵ هوپیتال از لایبنیتز این سوال را کردکه آیا ممکن است مشتق ازمرتبه $n=\frac{1}{2}$ موجود باشد ازاین سوال محاسبات کسری متولد شد. لایبنیتز به سوال چنین پاسخ داد: این یک تناقض آشکاری است که روزی نتایج مفیدی از آن به دست خواهد آمد.

دوسال بعد (۱۶۹۷) لایبنیتز درنامه ای به والیس[2] و برنولی[3] تقریبی را برای مشتق کسری e^{mx} به ازای مقادیر غیر صحیح n به صورت زیر ارا ئه دادند؛ یعنی

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n}=m^n e^{mx}$$

هیچنین اویلر[4] فرمول خود را بدین صورت ارئه داد:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n}=m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}$$
$$\Gamma(m+1)=m(m-1)...(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$
$$\frac{d^n x^m}{dx^n}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

تابع گاما: تعمیم تابع فاکتوریل است از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی و مختلط و برای یک عدد مختلط با بخش حقیقی مثبت به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

1-L. Hopital

2- J. Wallis

3- J. Bernulli

4- L. Euler

درضمن برای هرعدد طبیعی z داریم :

$$\Gamma(z)=(z-1)!$$

اویلر بادرنظر گرفتن $m=1$ و $n=\frac{1}{2}$ به رابطه زیر دست یافت :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{4x}{\pi}},$$

۱ . ۲ . مشتق وانتگرال کسری

نماد ${}_aD_t^{\alpha}$ که توسط دیویس[1] معرفی شده است برای مشتق ازمرتبه کسری به کار برده می شود. زیر نویس های a و t کران های مشتق کسری و α مرتبه آن می‌باشد. برای مشتق از مرتبه دلخواه به اصطلاح مشتق کسری می گویند. همچنین انتگرال کسری به معنای انتگرال از مرتبه دلخواه مطابق با مقادیر منفی α یعنی $\alpha=-\beta$ که $\beta>0$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$${}_aD_t^{-\beta}f(t).$$

تعریف ۱ . ۲ . ۱ . یک معادله دیفرانسیل کسری، معادله ای است که شامل مشتقات کسری باشد ویک معادله انتگرال کسری معادله انتگرالی است که شامل انتگرال های کسری باشند.

1- Davis

۱ . ۲ . ۱ . انتگرال کسری

تعریف ۱ . ۲ . ۲ . فرض کنید $\mathrm{Re}(p)>0$ و f دربازه $J^{'}=(0,\infty)$ یک تابع تکه ای پیوسته ودرهر زیر بازه متناهی از $J=[0,\infty)$ انتگرال پذیر باشد. آنگاه برای هر $t>0$ ، انتگرال تابع f ازمرتبه کسری p به صورت زیر تعریف می شود:

$$ {}_0D_t^{-p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau \qquad (۱ . ۱)$$

رابطه (۱.۱) انتگرال کسری ریمان – لیوویل ازمرتبه کسری نامیده می‌شود.

رده ای ازتوابع شرح داده شده درتعریف (۱ . ۲ . ۲) را با نماد C مشخص می کنیم.

همان طورکه دربالا مشاهده شد اگر $0<\mathrm{Re}(p)<1$ آنگاه انتگرال رابطه (۱ . ۱) یک انتگرال ناسره خواهد بود. بنابراین لازم است در $J^{'}=(0,\infty)$ ، f تکه ای پیوسته باشد تا با توابعی که مانند $\ln(t)$ و $t^{\mu}(-1<\mu<0)$ در همسایگی نقطه صفر رفتار می کنند، مطابقت داشته باشد.

مثال ۱ . ۲ . ۱ . اگر $f(t)=t^{\mu}$ و $\mu>-1$، آنگاه خواهیم داشت:

$$ {}_0D_t^{-p}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+p+1)}t^{\mu+p}, \quad \mathrm{p>0\ ,\ t>0} \qquad (۲. ۱)$$

درحالت خاص اگر $\mu=0$ باشد، آنگاه انگرال کسری ازمرتبه p ازتابع ثابت $f(t)=K$ به صورت زیر خواهد بود:

$$ {}_0D_t^{-p}K=\frac{K}{\Gamma(p+1)}t^{p}, \quad \mathrm{p>0} \qquad (۳. ۱)$$

مثال ۱ . ۲ . ۲ . اگر $f(t)=e^{at}$ که در آن a یک عدد ثابت است، خواهیم داشت:

$$ {}_0D_t^{-p}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} e^{a\tau} d\tau \ , \quad \text{p>0} \qquad (٤.١) $$

باتغییر متغییر $x = t - \tau$ خواهیم داشت:

$$ {}_0D_t^{-p}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(p)}\int_0^t x^{p-1}e^{-ax}dx \qquad (٥.١) $$

واضح است که (٥.١) یک تابع مقدماتی نیست، اما این تابع به یک تابع متعالی (غیرجبری) معروف به تابع گامای ناقص وابسته می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

تابع گامای ناقص : برای $\mathrm{Re}(p) > 0$ تابع گامای ناقص به صورت زیرتعریف می شود:

$$ \gamma^*(p,t) = \frac{1}{\Gamma(p)t^p}\int_0^t \tau^{p-1}e^{-\tau}d\tau \qquad (٦.١) $$

بنابراین رابطه (٥.١) را می توان به صورت

$$ {}_0D_t^{-p}e^{at} = t^p e^{at}\gamma^*(p,at) \qquad (٧.١) $$

نوشت. باتوجه به اینکه سمت راست رابطه (٦.١) مکرراً در محاسبات کسری دیده می‌شود آن را بانماد زیرنشان داده می شود:

$$ E_t(p,a) = t^p e^{at}\gamma^*(p,at) \qquad (٨.١) $$

مثال ١.٢.٣ . نتایج زیر حاصل کاربرد مستقیم تعریف انتگرال کسری است:

$$ {}_0D_t^{-p}\cos\ \text{at} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t \tau^{p-1}\cos a(t-\tau)d\tau, \quad \text{p>0} \qquad (٩.١) $$

$$ {}_0D_t^{-p}\sin\ \text{at} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t \tau^{p-1}\sin a(t-\tau)d\tau, \quad \text{p>0} \qquad (١٠.١) $$

برای آسانی کار، طرف های راست (۱ .۹) و (۱ .۱۰) رابه ترتیب با $C_t\left(p,a\right)$ و $S_t\left(p,a\right)$ نشان می‌دهیم. بنا براین برای (۱ .۸) و (۱ .۹) و (۱ .۱۰) به ازای $p>0$ روابط فشرده زیر را داریم:

$$ {}_0D_t^{-p}e^{at}=E_t\left(p,a\right) \tag{۱۱. ۱}$$

$$ {}_0D_t^{-p}\sin at=S_t\left(p,a\right) \tag{۱۲. ۱}$$

$$ {}_0D_t^{-p}\cos at=C_t\left(p,a\right) \tag{۱۳. ۱}$$

درحالت خاص اگر $p=\frac{1}{2}$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}e^{at}=E_t\left(\frac{1}{2},a\right)=a\frac{-1}{2}e^{at}Erf\left(at\right)^{\frac{1}{2}}$$

که $Erf\left(t\right)$ تابع خطا می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$ Erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{۱٤. ۱}$$

ودرتابع گامای ناقص داریم:

$$ Erf\left(x\right)=x\gamma^*\left(\frac{1}{2},x^2\right) \tag{۱٥. ۱}$$

چون $Erf\left(\infty\right)=1$ ، تابع خطای مکمل به صورت:

$$ Erf\left(cx\right)=1-Erf\left(x\right) \tag{۱٦. ۱}$$

تعریف می‌شود. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} D^{\frac{-1}{2}}\cos at=C_t(\frac{1}{2},a)=\sqrt{\frac{2}{a}\left[(\cos at)C(x)+(\sin at)S(x)\right]} \\ D^{\frac{-1}{2}}\sin at=S_t(\frac{1}{2},a)=\sqrt{\frac{2}{a}\left[(\sin at)C(x)-(\cos at)S(x)\right]} \end{aligned} \tag{۱۷. ۱}$$

به طوری که

$$x=\sqrt{\frac{2at}{\pi}}$$

بوده و $C(x)$ و $S(x)$ انتگرال های فرنل[1] می‌باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{2}\pi t^2 dt$$
$$S(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{2}\pi t^2 dt$$

مثال ۱ .۲ .٤ . فرض کنید $f(t)=(a-t)^{\lambda}$ که درآن $a>t>0$ پس $f\in C$ وبنابرتعریف داریم:

$$ {}_0D_t^{-p}(a-t)^{\lambda}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1}(a-\tau)^{\lambda}\,d\tau,\ \ \mathrm{Re}(p)>0,\ \ \mathrm{a}>\mathrm{t}>0 \qquad (۱ .۱۸)$$

باتغییر متغییر $x=\dfrac{t-\tau}{a-\tau}$ داریم:

$$ {}_0D_t^{-p}(a-t)^{\lambda}=\frac{(a-t)^{\lambda+p}}{\Gamma(p)}\int_0^{\frac{t}{a}} x^{p-1}(1-x)^{-p-\lambda-1}\,\mathrm{dx}, \qquad (۱ .۱۹)$$

انتگرال بالا همان تابع بتای ناقص است که به صورت زیرتعریف می شود:

تابع بتای ناقص: برای $\mathrm{Re}(p)>0$ و $0<\varepsilon<1$ تابع بتای ناقص به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_{\varepsilon}(p,q)=\int_0^{\varepsilon} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \qquad (۱ .۲۰)$$

بنا براین رابطه (۱ .۱۹) را می‌توان به صورت:

$$ {}_0D_t^{-p}(a-t)^{\lambda}=\frac{1}{\Gamma(p)}(a-t)^{\lambda+p}\beta_{\frac{t}{a}}(p,-p-\lambda) \qquad (۱ .۲۱)$$

1. Fresnel Integrals

۱ .۲ .۲ . فرمول دیریکله

اگر F تابع پیوسته بر روی صفحه اقلیدسی باشد و $\lambda,\ \mu,\ \upsilon$ عددهای ثابت باشند آنگاه:

$$\int_a^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_a^x (y-a)^{\lambda-1} (x-y)^{\upsilon-1} F(x,y)\,dy$$
$$= \int_a^t (y-a)^{\lambda-1} dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1} (x-y)^{\upsilon-1} F(x,y)\,dx$$

اگر $a=0\ ,\ \lambda=1\ ,\ \mathrm{F}(x,y)=g(x)\,f(y)$ باشد، داریم:

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1} g(x)\,dx \int_0^x (x-y)^{\upsilon-1} f(y)\,dy$$
$$= \int_0^t f(y)\,dy \int_y^t (t-x)^{\mu-1} (x-y)^{\upsilon-1} g(x)\,dx$$

بعلاوه اگر $g(x)=1$ باشد رابطه بالا به صورت زیردر می‌آید:

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1} dx \int_0^x (x-y)^{\upsilon-1} f(y)\,dy = \beta(\mu,\upsilon) \int_0^t (t-y)^{\mu+\upsilon-1} f(y)\,dy \qquad (۱ .۲۲)$$

که β تابع بتا است.

حال با استفاده ازفرمول دیریکله قضیه زیر ثابت می شود.

قضیه ۱ .۱ .۲ . اگر β یک تابع پیوسته بر روی $J=[0,\infty)$ باشد و $\mu,\ \upsilon>0$. آنگاه بـه ازای همه t ها داریم:

$$D^{-\upsilon}\left[D^{-\mu} f(t)\right] = D^{-(\mu+\upsilon)} f(t) = D^{-\mu}\left[D^{-\upsilon} f(t)\right]$$

برهان . بااستفاده ازتعریف انتگرال کسری، داریم:

$$D^{-\upsilon}\left[D^{-\mu} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^t (t-x)^{\upsilon-1} [\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-y)^{\mu-1} f(y)\,dy]dx$$

با توجه به رابطه (۱ .۲۲) درفرمول دیریکله،