بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

برخی خواص انتگرالهای نخستین بازگشت

از :

زهرا پورقاسم ذاکله‌بری

استاد راهنما :

دکتر علی اصغر ورسه‌ای

شهریور ۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که هر چه دارم و خواهم داشت، از دعای خیرشان است.

تقدیر و تشکر

از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر علی اصغر ورسه ای، به پاس تمام راهنماییها و زحماتشان و جناب آقای دکتر صمیمی و سرکار خانم دکتر دسترنج به خاطر کمکهای بی دریغشان بی نهایت تشکر می کنم.

فهرست مطالب

چکیده:

برخی خواص انتگرالهای نخستین بازگشت

زهرا پورقاسم ذاکله‌بری

در این پایان‌نامه ابتدا مفهومهای بازیافت‌پذیری و انتگرال‌پذیری نخستین بازگشت را نسبت به یک مسیر داده شده بیان می‌کنیم. سپس برای تابع حقیقی مقدار $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم برای هر $x \in [0, 1]$، انتگرال نخستین بازگشت روی $[0, x]$ تابعی پیوسته است. سپس با مثالی نشان می‌دهیم این پیوستگی لزوماً مطلق نیست.

کلید واژه:
مسیر، نخستین بازگشت بازیافتنی، انتگرال نخستین بازگشت.

Abstract:

Some Properties of First-Return Integrals

Zahra Pourghasem Zakelebari

In this dissertation, first we explain the concepts of first-return recoverability and integralability for a real function $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ with respect to a trajectory. Then, having shown for each $x \in [0, 1]$, the first-retun integral of f on $[0, x]$ is a continuous function of x. Then, we show by an example that the continuity is not necessarily absolute.

Key words:
trajectory,first-return recoverable,first-return integral.

پیشگفتار

در اواخر قرن نوزدهم باوری وجود داشت مبنی بر اینکه پدیده‌های جهان مشخص و قطعی‌اند. و بر اساس این باور بود که نظریه‌ی ثبات حرکت سیاره‌ای منظومه‌ی شمسی بنا نهاده شد. اسکار دوم، پادشاه سوئد و نروژ در سال ۱۸۸۷ یک مسابقه‌ی ریاضی به راه انداخت. یکی از سوالات مطرح شده در آن این بود
«سیستمی داریم که از تعدادی دلخواه نقطه‌ی جرم دار تشکیل شده است. این نقاط طبق قانون نیوتون[۱] همدیگر را جذب می‌کنند. فرض می‌کنیم که هیچ دو نقطه‌ای به هم برخورد نمی‌کنند. مختصات هر نقطه را در هر لحظه به صورت مقدار یک سری به‌طور یکنواخت همگرا بنویسید که جملات آن توابعی شناخته شده باشند.»
این سوال را وایرشتراس[۲] مطرح کرده بود. هنری پوانکاره[۳] تلاش کرد مسئله را برای منظومه‌ی شمسی حل کند اما متوجه شد که کار به این آسانی نیست. به همین دلیل سه نقطه‌ی جرم‌دار را در نظر گرفت. تکنیکی که او برای حل مسئله به کار برد شامل اعمال یک الگوی حرکتی بود که با مسیر حرکت یکی از جرمها در تقاطع است. اشتراک مسیر حرکت جرم با این الگوی حرکتی، یک زیرمسیر گسسته زمان را تعریف می‌کند. پوانکاره به بررسی حرکت جرم روی این مسیر پرداخت. در واقع، این اشتراک یک دنباله از«نخستین بازگشتها» را تشکیل می‌دهد. پوانکاره برنده‌ی جایزه شد ولی وقتی اثرش منتشر شد، فراگمن[۴] خطایی در آن یافت. این خطا موجب شد که پوانکاره مفهوم تاثیرپذیری از شرایط اولیه را درک کند. فقدان اطلاعات کامل در مورد شرایط اولیه و همچنین شرط همگرایی سری (همگرایی نقطه‌به‌نقطه بیش از همگرایی یکنواخت) باعث می‌شود که نتوانیم پیش‌بینی دراز مدتی از حرکت سیستم سه جرمی داشته باشیم. به ویژه پوانکاره دریافت که با وجود فقدان اطلاعات کامل از شرایط اولیه اگر همگرایی غیر

[۱] Newton

[۲] Weierstrass

[۳] Henri Poincare

[۴] Phragmen

یکنواخت باشد، حرکت جرم بازگشتی است، اما دوره‌ای نیست و این ویژگی باعث شد که نخستین بازگشتها بتوانند چگال باشند. این اتفاقات روشن می‌کند که چرا پوانکاره در مقدمه‌ی کتاب «علم و روش» خود این نقل قول از تولستوی[۱] را می‌آورد:« ما نمی‌توانیم تمام حقایق را دریابیم، چون آنها تقریباً بی‌شمارند. ما باید انتخابی از آنها داشته باشیم و ببینیم که آیا این انتخاب می‌تواند فقط بر اساس تنوع‌طلبی حس کنجکاوی ما باشد و بعد بر طبق منافع و ملزومات علمی و به ویژه اخلاقی هدایت شود؟»بنابراین مطالعه‌ی رفتار موضعی هر تابع حقیقی تعریف شده روی یک بازه منجر می‌شود، که ما به‌طور طبیعی تحدیدی از مشاهداتمان را که کمتر از کل دامنه هست در نظر بگیریم. به علاوه، از آنجایی‌که می‌خواهیم نتایجی را بر اساس رفتار موضعی تابع به دست آوریم، حداقل شرط این است که انتخاب ما یک نقطه‌ی برتر روی هر بازه در دسته‌ی بازه‌های ناتباهیده از دامنه باشد. اینکه ما کدام نقطه‌ی برتر را انتخاب کنیم که در مطالعه‌ی رفتار تابع حقیقی مؤثرتر باشد، به عنوان یک سؤال باز است. در اینجا ما بر اساس کارهای معاصران پوانکاره به این سؤال جواب می‌دهیم. هر چند مدت زیادی از ظهور اولین مقاله که به بررسی کاربردهای مفهوم نخستین بازگشت در مشتق‌پذیری پرداخته نمی‌گذرد، اما دانشمندان زیادی به بررسی کاربردهای این مفهوم نه تنها در مشتق‌پذیری بلکه در تقریب‌پذیری، پیوستگی و انتگرال‌گیری پرداخته‌اند. این رساله براساس مقاله‌ی [۶]تدوین شده و شامل چهار فصل است. در فصل اول به مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی و در فصل دوم به مفاهیم نظریه‌ی احتمال می‌پردازیم. در فصل سوم به بررسی مفهوم نخستین بازگشت و برخی اصطلاحات و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. ما در این فصل با مفاهیمی چون تابع انتخاب، بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت، تقریب‌پذیری نخستین بازگشت، پیوستگی نخستین بازگشت و مشتق‌پذیری نخستین بازگشت آشنا می‌شویم. در فصل چهارم به انتگرال‌گیری نخستین بازگشت می‌پردازیم. می‌توان قضایای زیادی را از حوزه‌ی انتگرال‌پذیری لبیگ[۲] به حوزه‌ی انتگرال‌پذیری نخستین بازگشت آورده و

[۱] Tolstoy

[۲] Lebesgue

باهم مقایسه کرد. ما در اینجا نشان می‌دهیم که تابع $F(x) = (fr) - \int_{[0,x]} f$ روی $[0, 1]$ پیوسته است ولی لزوماً مطلقاً پیوسته نیست. در حالی که می‌دانیم در مبحث انتگرال‌پذیری لبیگ، در صورت انتگرال‌پذیر بودن f روی بازه‌ی دلخواه $[a, b]$، تابع $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt$ روی $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

فصل ۱

مفاهیمی از آنالیز حقیقی

در این فصل به بیان برخی تعاریف اساسی از آنالیز حقیقی و قضایای مربوط به آن، که در ادامه‌ی کار به آنها نیاز داریم، می‌پردازیم.

۱-۱ نظریه‌ی اندازه

تعریف ۱-۱. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های X باشد.

۱. $\mathcal{C}$ را یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراکهای متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۲. $\mathcal{C}$ را یک حلقه از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماعهای متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. $\mathcal{C}$ را یک نیم‌میدان از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراکهای متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۴. $\mathcal{C}$ را یک σ-میدان از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر تحت اجتماعهای شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد.

مثال ۱-۲. دسته‌های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصل‌ضربهای دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای حلقه‌ها هستند. همچنین دسته‌های گوناگون از بازه‌ها و شعاعها و حاصل‌ضربهای دکارتی آنها و اجتماع آنها الگوهای مناسبی به ترتیب برای نیم‌میدانها و σ-میدانها هستند.

تعریف ۱-۳. تابعی را که دامنه‌ی آن دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد، یک تابع مجموعه‌ای می‌نامیم.

تعریف ۱-۴. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیرمجموعه‌ها باشد. منظور از یک اندازه روی $\mathcal{C}$ تابعی مجموعه‌ای مانند μ با دامنه‌ی $\mathcal{C}$ است، به‌طوری‌که برای هر A در $\mathcal{C}$، $\circ \leq \mu(A) \leq \infty$ و هرگاه $\{A_n, n \geq ۱\}$، دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از

اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد، به‌طوری‌که $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{C}$، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

خاصیت بالا را σ-جمع‌پذیری گوییم.

تعریف ۱-۵. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد. کوچکترین σ-میدان شامل $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X را σ-میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}$ می‌نامیم و به صورت $\sigma(\mathcal{C})$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(\mathcal{C})$ اشتراک تمام σ- میدانهای شامل $\mathcal{C}$ است.

تعریف ۱-۶. فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $X = \mathbb{R}^n$) و $\mathcal{C}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد. σ- میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}$ را σ-میدان بورل[1] می‌گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $[a,b)$ یا $[a,b]$ یا (a,b) که در آن a و b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاعهایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشد، همگی مولد $\mathcal{B}$ اند.

ملاحظه ۱-۷. به‌طور کلی در یک فضای توپولوژیک، σ -میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز را σ-میدان بورل می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۸. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ سازه‌ای (نیم‌حلقه، حلقه، نیم‌میدان یا σ-میدان) از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{C}$ باشد. اندازه‌ی μ را روی $\mathcal{C}$ متناهی گوییم، اگر برای هر A در $\mathcal{C}$، $\mu(A) < \infty$ و σ-متناهی گوییم، اگر دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq 1\}$ از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد، که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۱-۹. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{C}$ باشد و دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که اندازه‌ی هر جمله‌ی آن متناهی است و این دنباله X را بپوشاند (به عنوان الگو می‌توان X را $\mathbb{R}$ و $\mathcal{H}$ را نیم‌حلقه‌ی بازه‌ها در نظر گرفت). برای زیرمجموعه‌ی دلخواه A از X، اندازه‌ی خارجی Aرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = inf\{\Sigma_{n\geq 1}\mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n\}.$$

[1] Borel

ملاحظه ۱-۱۰. ۱. برای هر $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$.

۲. اگر $\{A_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه
$$\mu^*(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) \leq \Sigma_{n\geq ۱}\mu^*(A_n).$$

برهان. به [۲] رجوع شود. □

تعریف ۱-۱۱. زیرمجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$داشته باشیم
$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I \setminus A).$$

ملاحظه ۱-۱۲. هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیرند و اگر A نسبت به μ^* اندازه پذیر باشد، آنگاه برای زیرمجموعه‌ی دلخواه B از X داریم
$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱-۱۳. دسته‌ی مجموعه‌های اندازه‌پذیر نسبت به μ^* یک σ-میدان در X شامل $\mathcal{H}$ و μ^* یک اندازه روی این σ-میدان است. تحدید μ^* به $\mathcal{H}$ برابر با μ است.

برهان. به[۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱-۱۴. (قضیه‌ی گسترش کاراتئودوری) اگر $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X و μ اندازه‌ای در $\mathcal{H}$باشد، به‌طوری‌که تعداد شمارش‌پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ با اندازه‌ی متناهی X را بپوشاند، آنگاه μ گسترشی یگانه به یک اندازه روی σ-میدان تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در Xدارد.

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

تعریف ۱-۱۵. اگر $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی بازه‌ها (یا جعبه‌ها) و μ تابع طول (یا تابع حجم) باشد، زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ یا ($\mathbb{R}^n$) نسبت به μ^*(بر اساس تعریف ۱-۱۱) اصطلاحاً اندازه‌پذیر لبیگ نامیده می‌شود و دسته‌ی چنین مجموعه‌هایی را σ-میدان لبیگ می‌نامیم.

تعریف ۱-۱۶. منظور از یک فضای اندازه‌پذیر یک زوج $(X, \mathcal{A})$ متشکل از یک مجموعه مانند X و یک σ-میدان مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ عضوی اندازه‌پذیر نام دارد.

تعریف ۱-۱۷. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$است که در آن $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱-۱۸. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ و $(Y, \mathcal{A}')$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند. می‌گوییم تابع $f : X \to Y$ اندازه‌پذیر (نسبت به $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$) است، اگر برای هر $A' \in \mathcal{A}'$ داشته باشیم $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. از این پس هرگاه σ-میدانهای مفروض مشخص باشند و نیاز به تصریح نباشد، به طور ساده f را اندازه‌پذیر گوییم، اگر شرط یاد شده برقرار باشد.

ملاحظه ۱-۱۹. اگر f تابعی حقیقی و پیوسته باشد، آنگاه f تابعی اندازه‌پذیر است.

برهان. به [۲]کنید. $\square$

ملاحظه ۱-۲۰. می‌گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای A از فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریباً همه جا $(a.s.)$ برقرار است، اگر و تنها اگر، مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه‌ی μ ی صفر باشد.

۱-۲ انتگرال ریمان

از این به بعد در سراسر رساله اندازه‌ی لبیگ مجموعه‌ی بورل A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲۱. افراز $\mathcal{P}$ روی $[a, b]$، دسته‌ای متناهی از زیربازه‌های جدا از هم $[a, b]$، مانند$\{[x_{k-1}, x_k) = I_k \subseteq [a, b] : 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ است، که $|I_k| > 0$، برای هر $1 \leq k \leq n$ و $\cup_{k=1}^{n} I_k = [a, b]$ و آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم

$$\mathcal{P} = (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

اکنون نرم[۱] افراز $\mathcal{P}$ را چنین تعریف می‌کنیم $\|\mathcal{P}\| = \max\{|I_k| : I_k \in \mathcal{P}\}$.

[۱] Norm

تعریف ۱-۲۲. فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی و $\mathcal{P}$ افرازی روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد. اگر برای هر $1 \leq k \leq n$، t_k نقطه‌ی دلخواهی از زیربازه‌ی I_k از افراز $\mathcal{P}$ باشد، آنگاه مجموع ریمان متناظر با افراز $\mathcal{P}$ و تابع f که آن را با نماد $S(\mathcal{P}, f)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S(\mathcal{P}, f) = \Sigma_{k=1}^{n} f(t_k)|I_k|.$$

می‌گوییم تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است، اگر عددی حقیقی مانند A و برای هر $\epsilon > 0$، افرازی مانند $\mathcal{P}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $\mathcal{P}_\epsilon \subseteq \mathcal{P}$ و هر انتخاب t_k از زیربازه‌های افراز $\mathcal{P}$، $|S(\mathcal{P}_\epsilon, f) - A| < \epsilon$. چنین A ای در صورت وجود یکتا است و آن را انتگرال ریمان تابع fمی‌نامیم و با نماد $\int_{[a,b]} f dx$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۲۳. فرض می‌کنیم f بر بازه ی $[a,b]$ کراندار و E مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f روی بازه‌ی $[a,b]$باشد، در این صورت f انتگرال‌پذیر ریمان است، اگر و تنها اگر، مجموعه‌ی E دارای اندازه‌ی صفر باشد.

برهان. به [۷]رجوع شود. □

۱-۳ انتگرال لبیگ

تعریف ۱-۲۴. اگر A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی دلخواه X باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

تعریف ۱-۲۵. تابع ساده‌ی φ، تابعی است با دامنه‌ی دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد اعضای برد آن متناهی است. فرض می‌کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز a_1،a_2،...،a_n باشد. می‌توان نوشت $\varphi = \Sigma_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$. روشن است که A_iها مجزا هستند. اندازه‌پذیری φ معادل است با این که بگوییم A_i ها اندازه‌پذیرند. انتگرال φ نسبت به

اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \Sigma_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $0 \times \infty = \infty \times 0$.

تعریف ۱-۲۶. فرض می‌کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد (برای $A \in \mathcal{A}$ ، $\varphi\chi_A$ نیز تابعی ساده است). انتگرال φ روی A را تعریف می‌کنیم

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi\chi_A d\mu = \Sigma_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap A)$$

که در آن A_iها همانهایی هستند که در تعریف ۱-۲۵ آمده‌اند.

تعریف ۱-۲۷. اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی روی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$\int_A f d\mu = sup\{\int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f$ و φ تابعی ساده و نامنفی است $\}.$

قضیه ۱-۲۸. (قضیه‌ی همگرایی یکنوا) فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ای دلخواه و $\{f_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر، نامنفی و صعودی روی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$، که f تابعی انتگرال‌پذیر نسبت به اندازه‌ی μ روی X است، آنگاه در صورت وجود حد $\int_X f_n d\mu$ وقتی $n \to \infty$، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱-۲۹. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ای دلخواه و f تابعی اندازه‌پذیر روی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $\{A_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{A}$ باشد و $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i$، در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \Sigma_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

برهان. به [۲] رجوع شود. □

تعریف ۱-۳۰. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ای دلخواه باشد. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f را روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A، انتگرال‌پذیر گوییم، اگر $\int_A f d\mu < \infty$.

تعریف ۱-۳۱. اگر f تابعی حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با f، برای هر x از دامنه‌ی f، توابع f^- و f^+ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^-(x) = max\{-f(x), \circ\}$$

و

$$f^+(x) = max\{f(x), \circ\}.$$

در این صورت داریم

$$f = f^+ - f^-.$$

یعنی هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $|f| = f^+ + f^-$ و $f^- = (f^+)-$. روشن است که اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱-۳۲. اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع اندازه‌پذیر f راکه روی X تعریف شده است، انتگرال‌پذیر گوییم، اگر $\int f^+$ و $\int f^-$متناهی باشند. در این صورت

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

تعریف ۱-۳۳. در حالت خاص وقتی μ اندازه‌ی لبیگ روی $\mathbb{R}$ باشد، به تعریف انتگرال لبیگ می‌رسیم و برای هر $A \in \mathcal{A}$ انتگرال لبیگ f را روی A با نماد $\int_A f dm$ نشان می‌دهیم.