دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض – هندسه

موضوع:

ژئودزیک ها روی برخی مانیفلدهای ضربی تابیده

نگارش:

عباس رضایی

استاد راهنما:

دکتر فرشته ملک

استاد مشاور:

دکتر حسن حقیقی

آذر ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه به بررسی ژئودزیک ها روی یک دسته از مانیفلدهای ریمنی موسوم به مانیفلدهای ضربی تابیده می پردازیم. و پس از بیان و بررسی معادلات ژئودزیکی در این نوع مانیفلدها، ژئودزیک یک مانیفلد ضربی تابیده خاص را بررسی می کنیم سپس مانیفلدهای چندگانه ضربی تابیده را معرفی کرده، ضمن بررسی معادلات ژئودزیکی در این نوع مانیفلدها، یک شرط لازم و کافی برای ژئودزیک بودن یک خم در این گونه مانیفلدها را بیان و اثبات می کنیم. و در آخر یک مانیفلد ضربی چندگانه تابیده خاص را در نظر گرفته، ژئودزیک های آنرا بدست می آوریم.

کلمات کلیدی :

مانیفلد ضربی تابیده، تانسور انحنا، انحنای ریچی، انحنای اسکالری، معادلات ژئودزیکی، مانیفلدهای ضربی چندگانه تابیده

مانیفلد ریمانی که توسط برنارد ریمان[۱] در قرن ۱۹ پایه گذاری شد، عبارت است از یک مانیفلد دیفرانسیل پذیر که در آن فضای تانژانت مجهز به یک ضرب داخلی مانند g است بطوری که g از نقطه ای به نقطه دیگر بطور هموار تغییر می کند. در ریاضیات یک ژئودزیک در حالت کلی به مفهوم یک خط راست در فضاهای قوسی است، از منظر یک متر، ژئودزیک ها کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در فضااند. و از منظر التصاق افین ژئودزیک ها خم هایی می باشند که بردارهای مماس در یک انتقال موازی در طول این خم ها موازی باقی بمانند. واژه ژئودزیک از ژئودزی یعنی علم زمین شناسی گرفته شده است در اصل مفهوم یک ژئودزیک کوتاهترین مسیر بین دو نقطه روی زمین می باشد که در واقع قسمتی از یک دایره عظیمه است.
این مفهوم به اکثر فضاهای ریاضی تعمیم داده شده است، در هندسه ریمانی ژئودزیک ها بطور موضعی کوتاهترین فاصله بین دو نقطه‌اند.
برای رویه ها در $\mathbb{R}^3$ ژئودزیک ها را می توان بصورت خم های $C(s)$ مشخص کرد که s طول قوس است و $C''(s)$ در $\mathbb{R}^3$ عمود به رویه است، این نوع توصیف برای رویه های محدب در سال ۱۶۹۷ توسط برنولی[۲] و معادلات ژئودزیکی برای رویه های به شکل $f(x, y, z) = 0$ توسط اولر[۳] در سال ۱۷۳۲مورد بررسی قرار گرفتند.
دسته ای از مانیفلدهای ریمانی، مانیفلدهای ضربی تابیده‌اند که برای اولین بار در سال ۱۹۶۹ توسط انیل[۴] و بیشاپ[۵] تعریف شده و بعد از آن افراد زیادی چنین مانیفلدهایی را مورد بررسی قرار دادند.
ژئودزیک ها روی مانیفلدهای ضربی تابیده اولین بار توسط انیل در سال ۱۹۸۳ مورد بررسی قرار گرفت. وی در حالت کلی یک شرط لازم و کافی برای این که خمی در مانیفلد ضربی تابیده ژئودزیک باشد را بدست آورد و آنرا برای مانیفلدهای فضا و زمان نیز به اثبات رساند که در فیزیک و نظریه نسبیت کاربرد بسیاری دارد.

---

[۱] bernard rieman
[۲] Bernoulli
[۳] Euler
[۴] O'neill
[۵] Bishop

مانیفلدهای ضربی چندگانه تابیده را می توان تعمیمی از مانیفلدهای ضربی تابیده در نظر گرفت، انال [6] در سال ۱۹۹۹ این تعریف را ارائه کرد و به بررسی انحنا ها در این نوع مانیفلدها پرداخت.
در این پایان نامه ژئودزیکهای مانیفلدهای ضربی تابیده و ضربی چندگانه تابیده را بررسی و ژئودزیک های بعضی از چنین مانیفلدهای خاصی را دقیقا معرفی کرده‌ایم.
این پایان نامه شامل ۵ فصل می باشد، که در فصل اول آن قضایا و مفاهیمی که در طول پایان نامه از آن استفاده می کنیم آورده شده است که خواننده برای فهم فصول بعدی تا حدود زیادی از مطالعه منابع دیگر بی نیاز باشد.

در فصل دوم به مفهوم مانیفلدهای ضربی تابیده و ضرایب کریستفل روی آن می پردازیم و همچنین تانسور انحنا، انحنای ریچی و انحنای اسکالری را روی این نوع مانیفلدها مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل سوم به بررسی معادلات ژئودزیکی روی مانیفلدهای ضربی تابیده می پردازیم و ژئودزیکهای یک مانیفلد ضربی تابیده خاصی را معرفی می کنیم. این خم ژئودزیک در مقاله [۱] بررسی شده است. در فصل چهارم مانیفلدهای ضربی چندگانه تابیده را تعریف می کنیم و ضرایب کریستفل، تانسور انحنا، انحنای ریچی و انحنای اسکالری را بر حسب ضرایب متر و تابع تابیده بدست می آوریم که این مطالب برگرفته از مقاله [۲] است. در فصل پنجم معادلات ژئودزیکی را روی مانیفلدهای ضربی چندگانه تابیده مورد بررسی قرار می دهیم و در آخر به بررسی ژئودزیک یک مانیفلد ضربی چندگانه خاصی می پردازیم. این مثال و بررسی آن توسط نگارنده پایان نامه انجام شده است.

[6] Unal

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل به برخی از مفاهیم، تعاریف وقضایایی که در طول پایان نامه به کار رفته اند، اشاره خواهیم کرد. اکثر قضایای بیان شده در این فصل در کتاب های مربوط به این موضوعات، اثبات گردیده اند، و اکثر آنها قضایای اساسی هندسه مانیفلد و هندسه ریمنی می باشند، ولی برخی از قضایا که از مقالات گرفته شده، را بطور خلاصه اثبات کرده ایم.

۲.۱ تانسور ها

از خواص مهم هندسه ایجاد ارتباط بین ریاضیات محض و کاربرد آن در علوم مختلف است. یکی از ابزار هایی که برای ایجاد این ارتباط مورد استفاده قرار می گیرد تانسورها هستند. بیشتر اصطلاحات و قواعد هندسی بر پایه تانسورها بنا نهاده شده است، در این بخش به تعریف تانسورها و خواص آن می پردازیم.

۱.۲.۱ تعریف: یک فرم دو خطی روی فضای برداری V، عبارت است از نگاشت، $T : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به هر مولفه اش خطی باشد.

۲.۲.۱ تذکر: T فرم دوخطی

(i) معین است هرگاه از $X \neq 0$ نتیجه شود $T(X,X) \neq 0$.

(ii) مثبت معین است هرگاه از $X \neq 0$ نتیجه شود $T(X,X) > 0$.

(iii) منفی معین است، هرگاه از $X \neq 0$ نتیجه شود $T(X,X) < 0$.

(iv) نامعین است ،هرگاه یک $V \ni X \neq 0$وجود داشته باشد بطوری که $T(X,X) = 0$.

۳.۲.۱ تعریف: اگر V و W دو فضای برداری باشند، نگاشت $T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow W$ را یک نگاشت Kـخطی‌گویند، هرگاه T روی هر مولفه خطی باشد، یعنی

$$T(v_1, \cdots, v_i' + cv_i'', v_{i+1}, \cdots, v_k) = T(v_1, \cdots, v_i', v_{i+1}, \cdots, v_k) + cT(v_1, \cdots, v_i'', v_{i+1}, \cdots, v_k),$$

برای هر $i = 1, \cdots, k$، $v_i, v_i', v_i'' \in V$ و $c \in \mathbb{R}$.

۴.۲.۱ تعریف: T را یک k ـتانسور کواریان روی V می نامیم هرگاه T یک نگاشت k ـخطی $T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد و همچنین T را یک l تانسور کنتراواریان روی V می نامیم، هرگاه T نگاشت lـخطی $T : \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، که در آن V^* دوگان فضای برداری V است.

فضای برداری متشکل ازهمه k تانسور های کواریان و l تانسورهای کنتراواریان روی فضای برداری V را به ترتیب با $T^k(V)$ و $T_l(V)$ نشان می دهیم. یک $\binom{k}{l}$ تانسور عبارتست از نگاشت $(k+l)$ ـخطی

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

جمع و ضرب اسکالر در این فضاها، همان جمع و ضرب اسکالر معمولی روی نگاشت ها است.

فرض می کنیم M مانیفلد هموار باشد. کلافی از kـتانسور کواریان روی M رابصورت زیر تعریف می کنیم

$$T^k M := \coprod_{p \in M} T^k(T_p M).$$

که در آن $T_p M$ فضای برداری مماس بر M در نقطه p است.

بطور مشابه کلافی از lـتانسورهای کنتراواریان روی M را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_lM := \coprod_{p\in M} T_l(T_pM).$$

یک کلاف تانسوری از نوع $\binom{k}{l}$ روی M، یک تانسور مخلوط است که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_l^k(M) := \coprod_{p\in M} T_l^k(T_pM).$$

با استفاده از این تعریف به وضوح داریم.

$$T_\circ M = T^\circ M = M \times \mathbb{R}, T_۱ M = TM,$$

$$T^۱ M = T^* M, T_\circ^k M = T^k M, T_۱^\circ M = T_۱ M.$$

هر یک از این کلاف ها را، کلاف تانسوری روی مانیفلد M می نامیم.

۵.۲.۱ تعریف: اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ یک کلاف برداری باشد، نگاشت هموار $\sigma : M \longrightarrow E$ را یک برش[۱] کلاف E گوئیم هرگاه

$$\pi o \sigma = Id_M.$$

۶.۲.۱ تعریف: برش‌های کلاف های تانسوری را میدان تانسوری می نامیم و برشهای کلاف های تانسوری یک مرتبه کونتراواریان را میدانهای برداری، و برشهای کلاف های تانسوری یک مرتبه کواریان را فرم های دیفرانسیل یا ۱−فرمی می گوئیم. مجموعه تمام میدان‌های برداری راکه روی M، تعریف شده‌اند را با $\tau(M)$ نشان می‌دهیم و مجموعه ۱− فرمی‌های روی M را با $A(M)$ نمایش می‌دهیم.

۷.۲.۱ تذکر: $T \in T^k(V)$ را یک تانسور پاد متقارن(متناوب) گوئیم هرگاه

$$T(X_۱, \cdots, X_i, \cdots, X_j, \cdots, X_k) = -T(x_۱, \cdots, X_j, \cdots, X_i, \cdots, X_k),$$

برای هر $X_۱, \cdots, X_k \in V, ۱ \leq i, j \leq k$.

مجموعه همه تانسور های پاد متقارن مرتبه k روی V را با$\bigwedge^k(V)$ نمایش می دهیم.

---

[۱] section

اگر M مانیفلد هموار باشدآنگاه

$$\bigwedge^k(M) := \coprod_{p\in M} \bigwedge^k(T_pM).$$

در این صورت $\wedge^k(M)$ دارای ساختار کلاف برداری روی M است. فضای برداری برشهای $\wedge^k(M)$ را با $A^k(M)$ نمایش داده و آنها را $k-$ فرم‌های دیفرانسیل پذیر گوئیم.

۸.۲.۱ تعریف: نگاشت هموار $\alpha : M \longrightarrow \bigwedge^k(M)$ را که $\alpha(p) \in \bigwedge^k(T_pM)$، یک k فرم دیفرانسیل پذیر گوئیم. مجموعه همه k فرم های دیفرانسیل پذیر روی M را با $A^k(M)$ نمایش می دهیم.

۹.۲.۱ تعریف: اگر $\pi : E \longrightarrow M$ یک کلاف برداری k بعدی و U بازی در M باشد آنگاه k تائی مرتب $(\sigma_1 \cdots, \sigma_k)$ از برشهای E روی U را یک فریم[۲] یا قاب E روی U می نامیم هرگاه به ازای هر $p \in U$ مجموعه $\{\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p)\}$ یک پایه برای فیبر در نقطه p باشد.

۱۰.۲.۱ قضیه: فرض کنید (M, g) یک مانیفلد ریمنی باشد، در اینصورت برای هر $p \in M$ یک فریم‌ارتونرمال (یعنی فریمی که در هر نقطه ارتونرمال باشد) هموار روی یک همسایگی از p وجود دارد.
اثبات : رجوع شود به [۹] صفحه ۱۸۸. $\square$

۱۱.۲.۱ تعریف: اگر $\alpha \in T^k_l(V)$ و $\beta \in T^m_n(V)$ آنگاه ضرب تانسوری $\alpha \otimes \beta \in T^{k+m}_{l+n}$ را تعریف می کنیم.

$$\alpha \bigotimes \beta(v^1, \cdots, v^{l+n}, X_1, \cdots, X_{k+m}) := \alpha(v^1, \cdots, v^l, X_1, \cdots, X_k)\beta(v^{l+1} \cdots, v^{l+n}, X_{k+1}, \cdots, X_{k+m}).$$

$$V^1, \cdots, V^{l+n} \in V, X_1, \cdots, X_{k+m} \in V^*$$

۱۲.۲.۱ تعریف: اگر M یک مانیفلد هموار باشد،فرض می کنیم (U, E) یک کارت مختصاتی از مانیفلد هموار M حول نقطه P باشد.$\{E_1, \cdots, E_n\}$ را یک پایه برای فضای برداری T_pU و $\{\psi^1, \cdots, \psi^n\}$ را پایه

[۲] frame

دوال متناظر به آن برای $(T_pU)^*$ در نظر می گیریم. بدین ترتیب پایه برای فضای برداری $T^m_n(T_pM)$ بصورت زیر خواهد بود.

$$\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_n}\otimes\psi^{j_1}\otimes\cdots\otimes\psi^{j_m}|1\leq i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_m\leq n\}.$$

در اینصورت

$$E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_n}\otimes\psi^{j_1}\otimes\cdots\otimes\psi^{j_m}(\psi^{r_1},\cdots,\psi^{r_n},E_{s_1},\cdots,E_{s_m})=\delta^{r_1}_{i_1}\cdots\delta^{r_n}_{i_n}\delta^{j_1}_{s_1}\cdots\delta^{j_m}_{s_m}.$$

بنابراین نمایش موضعی تانسور $T\in T^m_n(M)$ را بصورت زیرمی توان نوشت

$$T=T^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_m}\otimes\psi^{i_1}\otimes\cdots\otimes\psi^{i_n},$$

که در آن $T^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}$ توابع هموار روی M اند و مولفه های T نسبت به کارت (U,E) نامیده می شوند.

۱۳.۲.۱ تذکر: اگر اندیسی یکبار در بالا و یکبار در پائین تکرار شود آنرا جمع بندی شده می انگاریم (جمع اینشتن)، یعنی وقتی مثلا می نویسیم a_ib^i منظور $\sum_i a_ib^i$ است .

۳.۱ متر ریمنی و شبه ریمنی

۱.۳.۱ تعریف: $T\in T^k(V)$ را یک k تانسور متقارن نامیم هرگاه

$$.T(X^1,\cdots,X^i,\cdots,X^j,\cdots,X^k)=T(X^1,\cdots,X^j,\cdots,X^i,\cdots,X^k).$$

برای هر $X^1,\cdots,X^k\in V$.

۲.۳.۱ تعریف: متر ریمنی روی مانیفلد هموار M یک ۲− میدان تانسوری کواریان متقارن مثبت معین است. مانیفلد مجهز به متر ریمنی g را مانیفلد ریمنی گویند و آنرا با (M,g) نمایش می دهند.

۳.۳.۱ تعریف: ۲–میدان تانسوری g را ناتبهگون گوییم هرگاه :

$$(\forall\, Y \in \tau(M), g(X,Y) = 0) \Rightarrow X = 0.$$

هر۲–میدان تانسوری مثبت معین ناتبهگون است زیرااگر g یک ۲ میدان تانسوری مثبت معین باشد داریم :

$$g(X,X) \geq 0 \quad X \in \tau(M)$$

$$g(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0$$

حال برای ناتبهگونی اگر برای هر میدان برداری Y، $g(X,Y) = 0$، آنگاه کافیست $Y = X$ اختیار کنیم، لذا از معین بودن نتیجه می شود که $X = 0$ و ناتبهگونی ثابت می شود.

۴.۳.۱ تعریف: متر شبه ریمنی روی مانیفلد M، یک ۲–میدان تانسوری کواریان متقارن ناتبهگون است.

اگر کارت(U,E) را حول $P \in M$ و $\{E_i\}$را یک پایه برای فضای برداری T_pU و$\{dE^j\}$ راپایه دوگان آن در نظر بگیریم، در اینصورت تحدید g به U، دارای نمایش موضعی

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dE_i dE_j,$$

است که در آن $g_{ij} = g(E_i, E_j)$,

۵.۳.۱ تعریف: فرض کنید g_1 و g_2 دو متر روی مانیفلد ریمنی M باشند در اینصورت g_1 و g_2 را همدیس[۳] گوئیم هرگاه تابع مثبت و هموار $f \in C^\infty(M)$ چنان موجود باشد که $g_2 = f g_1$. همچنین دو مانیفلد ریمنی (M,g) و $(\tilde{M},\tilde{g})$ را همدیس گوئیم هرگاه دیفئومورفیسم $\phi : M \longrightarrow \tilde{M}$ چنان موجود باشد که $\phi^*\tilde{g}$ با g همدیس باشد.

[۳] conformal

۴.۱ بالا و پائین بردن اندیس ها

در مانیفلدهای ریمنی می‌توان، میدان‌های برداری را به ۱−فرمی‌ها و برعکس، ۱− فرمی‌ها را به میدانهای برداری تبدیل کرد. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} b: \quad T_pM &\rightarrow T_p^\star M, \\ X &\longmapsto X^b, \end{aligned}$$

به طوریکه:

$$X^b(Y) := g_p(X, Y) \qquad X, Y \in T_pM.$$

به سادگی دیده می‌شود که b یک ایزومورفیسم فضای برداری است، تعریف b را روی میدان‌های برداری به صورت زیر توسیع می‌دهیم:

$$\begin{aligned} b: \quad \tau(M) &\rightarrow A(M), \\ X &\longmapsto X^b, \end{aligned}$$

به طوریکه:

$$X^b(Y) = g(X, Y) \qquad Y \in \tau(M).$$

کارت (U, E) را حول نقطه $p \in M$ و میدان های برداری پایه $\{E_i\}$ را روی U در نظر می‌گیریم. نمایش موضعی نگاشت X^b به صورت زیر است:

$$X^b = g(X, \cdot) = g(X^iE_i, \cdot) = g_{ij}X^i dE^j,$$

که $\{dE^j\}$ پایه دوگان $\{E_i\}$ برای فضای برداری $(T_pU)^\star$ است.

با توجه به اینکه متر ریمنی g، مثبت معین است، پس ماتریس (g_{ij}) وارون پذیر است. در نتیجه می‌توان وارون نگاشت b که آنرابا نماد# نمایش می دهیم، را نیز تعریف کرد.

$$\begin{aligned} \#: \quad A(M) &\rightarrow \tau(M), \\ w &\longmapsto w^\#. \end{aligned}$$

نگاشت # را به طور موضعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w^\# := g^{ij}w_jE_i \qquad w \in A(M),$$

که در آن g^{ij} ها مولفه‌های ماتریس وارون g و ω_j مولفه های ω هستند.

۱.۴.۱ تعریف: اگر $T \in \tau^1_1(M)$، در این صورت نمایش موضعی T به صورت زیر خواهد بود:

$$T = T^i_j dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

منظور از trT (بخوانید رد T) عبارت است از:

$$trT := T^i_i.$$

حال تعریف بالا را به هر تانسور دلخواه به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

اگر نمایش موضعی $T \in \tau^k_l(M)$ به صورت زیر باشد:

$$T = T^{i_1 \cdots i_l}_{j_1 \cdots j_k} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_l}},$$

آن گاه trT مثلا نسبت به اندیس‌های i_1 و j_1 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$trT := T^{ii_2 \cdots i_l}_{ij_2 \cdots j_k} dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{il}},$$

و به این ترتیب $trT \in \tau^{k-1}_{l-1}(M)$.

در مانیفلد ریمنی (M,g) اگر $T \in \tau^k(M)$ (یا $T \in \tau_l(M)$) در این صورت با پایین آوردن یک اندیس (یا بالا بردن یک اندیس) به کمک نماد b (یا $\#$)، می‌توان trT^b یا($trT^\#$) را تعریف کرد، که آنرا باtr_gT و معمولا به اختصار با trT نمایش می دهیم.

۲.۴.۱ مثال: اگر h یک ۲ $-$ تانسور باشد، آن گاه $h^\#$ یک $\binom{1}{1}-$تانسور است. بنابراین $trh^\#$ خوش تعریف خواهد بود و داریم

$$tr_gh := trh^\# = g^{ij}h_{ij} = h^i_i.$$

۵.۱ التصاق

مفهوم التصاق[۴] اولین بار توسط لوی چیویتاروی مانیفلدهای هموار ریمنی تعریف شد، این تعریف به نوعی تعمیم مشتق سوئی است.

۱.۵.۱ تعریف: برای مانیفلد هموار M، نگاشت

$$\begin{aligned} \nabla : \tau(M) \times \tau(M) &\to \tau(M) \\ (X,Y) &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

که در سه شرط زیر صدق می کند را التصاق آفین یا التصاق خطی گویند.

$$\nabla_{fX_1+X_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y, \ (i)$$

$$\nabla_X Y_1 + Y_2 = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \ (ii)$$

$$\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y, \ (iii)$$

که در آنها

$$f \in C^\infty(M), X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \tau(M)$$

۲.۵.۱ قضیه: هر مانیفلد هموار دارای یک التصاق آفین است.

اثبات: به [٦]، صفحه ۵۲ رجوع شود. □

۳.۵.۱ تعریف: فرض می کنیم M مانیفلد هموار و $\gamma : I \longrightarrow M$ یک خم هموار در M باشد. نگاشت هموار

$$\begin{aligned} V : I &\longrightarrow TM \\ t &\longrightarrow V(t). \end{aligned}$$

را که در آن $V(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$، یک میدان برداری در راستای خم γ می نامیم.

---

[۴] connection

۴.۵.۱ تذکر: به این ترتیب، تحدید هر میدان برداری روی M، به یک خم دلخواه در M، یک میدان برداری در راستای آن خم است ولی هر میدان برداری در راستای یک خم را لزوما نمی توان به یک میدان برداری روی M تمدید کرد.

مجموعه همه میدانهای برداری در امتداد خم γ روی M را با $\tau(\gamma)$ نشان می دهیم.

۵.۵.۱ قضیه: اگر M یک مانیفلد هموار با التصاق آفین ∇ و $\gamma : I \longrightarrow M$ یک خم هموار باشد در اینصورت یک نگاشت منحصر به فرد

$$\frac{D}{dt} : \tau(\gamma) \longrightarrow \tau(\gamma)$$
$$X \longrightarrow \frac{DX}{dt}.$$

وجود دارد که در شرایط زیر صدق می کند.

$$X \in \tau(\gamma), f \in C^{\infty}(M) \qquad \frac{DfX}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt} \ , (i)$$

$$X_۱, X_۲ \in \tau(\gamma) \qquad \frac{D(X_۱+X_۲)}{dt} = \frac{DX_۱}{dt} + \frac{DX_۲}{dt} \ ,(ii)$$

$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ و $X \in \tau(M)$ که $\frac{DX}{dt} = \nabla^{X}_{\dot{\gamma}(t)}$,(iii)

$\frac{DX}{dt}$ را با X' نیز می توان نمایش داد و آنرا مشتق کواریان X در امتداد خم γ می نامیم.

اثبات به [۵] صفحه ۵۰ رجوع شود. □

۶.۵.۱ تعریف: میدان برداری X رادر امتداد خم γ، یک میدان برداری موازی گوئیم هرگاه

$$\frac{DX}{dt} = ۰.$$

و$X \in \tau(M)$ را روی M موازی گوئیم هرگاه در امتداد هر خم دلخواه روی M موازی باشد.

۷.۵.۱ تعریف: کارت(U,φ) و میدان های برداری پایه$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ را برای T_pU در نظر می گیریم. حال $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$, یک میدان برداری روی U تعریف می کند، بنابراین می توان نوشت

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

ضرایب تابعی، Γ^k_{ij} راضرایب کریستوفل وابسته به التصاق ∇ می نامیم.

۸.۵.۱ تعریف: اگر $X,Y\in\tau(M)$ نسبت به کارت (U,φ) دارای نمایش موضعی بصورت $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ و $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ باشند آنگاه‌طبق خواص التصاق، $\nabla_X Y$ نسبت به کارت (U,φ) دارای نمایشی بصورت زیر است.

$$\nabla_X Y=(XY^k+X^iY^j\Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial x_k},$$

التصاق $\nabla:\tau(M)\times\tau^m_n(M)\longrightarrow\tau^m_n(M)$ را بصورت زیر روی تانسور های دلخواه می توان تعمیم داد

$$\begin{aligned}&\nabla_X W(\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta_1,\cdots,\beta_m):=\\&\qquad X(W(\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta_1,\cdots,\beta_m))-W(\nabla_X\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^n,\beta_1,\cdots,\beta_m)\\&\qquad -W(\alpha^1,\nabla_X\alpha^2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m)-\cdots-W(\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\nabla_X\beta_1,\cdots,\beta_m)\\&\qquad -W(\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta_1,\nabla_X\beta_2,\cdots,\beta_m)-\cdots-W(\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\nabla_X\beta_m),\end{aligned}$$

که در آن $X\in\tau(M),W\in\tau^m_n(M)$ و $\alpha^1,\cdots,\alpha^n\in A^1(M)$ و $\beta_1,\cdots,\beta_m\in\tau(M)$.

۹.۵.۱ تعریف: التصاق ∇ روی مانیفلد M را جابجایی یا متقارن گوییم، هرگاه:

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y].$$

۱۰.۵.۱ تعریف: التصاق ∇ روی مانیفلد ریمنی (M,g) را سازگار با متر گوئیم هرگاه برای هر دو میدان برداری موازی Y و X، $g(X,Y)=<X,Y>$ یک تابع ثابت باشد.

۱۱.۵.۱ قضیه: هرگاه $(M.g)$ مانیفلد ریمنی با التصاق ∇، W و V دو میدان برداری در طول خم $C:I\longrightarrow M$ باشند در اینصورت التصاق ∇ سازگار با متر است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\frac{d}{dt}<V,W>=<\frac{DV}{dt},W>+<V,\frac{DW}{dt}>.$$

اثبات :رجوع شود به[۵] صفحه ۵۳. □

۱۲.۵.۱ نتیجه: هرگاه $(M.g)$ مانیفلد ریمنی با التصاق ∇، باشد در اینصورت التصاق، با متر سازگار است اگر و فقط اگر

$$X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > .$$

برای هر $X, Y, Z \in \tau(M)$

اثبات : رجوع شود به [۵] صفحه۵۴.

۱۳.۵.۱ قضیه: التصاق ∇ سازگار با متر است اگر و تنها اگر

$$\nabla_X g = \circ \qquad X \in \tau(M).$$

اثبات: رجوع شود به [۵] صفحه۱۰۳. □

۱۴.۵.۱ تعریف: اگر التصاق ∇ روی مانیفلد ریمنی (M, g) در شرایط زیر صدق کند آنرا التصاق ریمنی یا لوی چیویتا گوئیم

(i) ∇ متقارن باشد.

$(ii)$$\nabla$ سازگار با متر باشد.

۱۵.۵.۱ قضیه: (لوی چویتا) برای هر مانیفلد ریمنی (M, g) یک التصاق آفین یکتای ∇ روی M وجود دارد که در شرایط زیر صدق می کند:

$(i)$$\nabla$ متقارن است.

$(ii)$$\nabla$ سازگار با متر ریمنی است.

اثبات: به[۵] صفحه۵۵ رجوع شود. □

پس التصاق لوی چویتا روی یک مانیفلد ریمنی، یکتاست .

۱۶.۵.۱ قضیه: اگر(M, g)یک مانیفلد ریمنی و∇التصاق ریمنی روی M باشد آنگاه ضرایب کریستوفل آن برابر است با:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{mk} \{ \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{mj}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{mi}) - \frac{\partial}{\partial x_m}(g_{ij}) \}.$$

اثبات رجوع شود به [٦] صفحه ۷۰.

۱۷.۵.۱ تعریف: (گرادیان)در مانیفلد(M,g) گرادیان را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$grad : C^{\infty}(M) \longrightarrow \tau(M),$$

$$f \longrightarrow gradf,$$

که در آن

$$\forall X \in \tau(M) \qquad g(X, gradf) := X(f),$$

برای نمایش موضعی گرادیان داریم

$$g(\frac{\partial}{\partial x^i}, gradf) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Longrightarrow (gradf)^j g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\Longrightarrow (gradf)^j = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

۱۸.۵.۱ تعریف: (دیورژانس) در مانیفلد(M,g) دیورژانس را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$div : \tau(M) \longrightarrow C^{\infty}(M),$$

$$X \longrightarrow div(X),$$

بطوریکه

$$div(X) := X^i_{;i} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)^i = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)(dx^i).$$

۱۹.۵.۱ تذکر: اگر X یک میدان برداری باشد و $\{E_i\}$ یک فریم ارتونرمال باشند، داریم :

$$div(X) = \sum_i < \nabla_{E_i} X, E_i >$$

۲۰.۵.۱ تعریف: (لاپلاسین) در مانیفلد (M,g) لاپلاسین را با$\triangle$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\triangle : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M),$$

$$f \longrightarrow div\ o\ gradf,$$

برای نمایش موضعی لاپلاسین یک تابع داریم

$$\triangle f = div(gradf) = div(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i})$$

$$= (g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k})^i_{;i}$$

$$= (g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k})_{;i}(dx^i)$$

$$= g^{ij}\frac{\partial^۲ f}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^j}\Gamma^i_{ik}$$

که در آن ";" نشان دهنده مشتق کوواریان است.

۲۱.۵.۱ تعریف: (هسین) در مانیفلد (M,g) هسین یک تابع $f \in C^\infty(M)$ که آنرا با H^f نمایش می دهیم، عبارت است از

$$H^f := \nabla\nabla f$$

به این ترتیب H^f یک $(۰,۲)$ تانسور است.

نمایش موضعی H^f را بصورت زیر می توان بدست آورد:

$$H^f(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} gradf, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i} < gradf, \frac{\partial}{\partial x^j} > - < gradf, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} >$$

حال اگر $gradf = (gradf)^m\frac{\partial}{\partial x^m}$، عبارت بالا برابر است با

$$= \frac{\partial}{\partial x^i} < (gradf)^m\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j} > - < (gradf)^m\frac{\partial}{\partial x^m}, \Gamma^k_{ij}\partial_k >$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{mn}\frac{\partial f}{\partial x^n}g_{mj}) - (g^{mn}\frac{\partial f}{\partial x^n})\Gamma^k_{ij}g_{mk}$$

$$= \delta^n_j\frac{\partial^۲ f}{\partial x^i\partial x^n} - \delta^n_k\frac{\partial f}{\partial x^n}\Gamma^k_{ij}$$

در نتیجه

$$H^f(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial^۲ f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}$$