دانشکده علوم

پایان نامه ی کارشناسی ارشد در رشته فیزیک
(اپتیک و لیزر)

بررسی تحول زمانی حالتهای همدوس در محیط غیر خطی کر تعمیم یافته

به کوشش:
حمید رضا اسماعیلی

استاد راهنما:
دکتر محمد مهدی گلشن

شهریورماه ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خـــدا

اظهار نامـــه

اینجانب حمید رضا اسماعیلی دانشجوی رشته‌ی فیزیک گرایش اپتیک و لیزر دانشکده‌ی علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام ، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم .کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: حمید رضا اسماعیلی

تاریخ و امضاء:

بنام خدا

بررسی تحول زمانی حالتهای همدوس در محیط غیر خطی کر تعمیم یافته

به وسیله ی :

حمیدرضا اسماعیلی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی :

فیزیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : عالی

دکتر محمد مهدی گلشن، استادیار بخش فیزیک (رئیس کمیته)..............................

دکتر حمید نادگران، دانشیار بخش فیزیک..............................

دکتر محمود حسینی فرزاد، استادیار بخش فیزیک..............................

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به همسر عزیز و دختر دلبندم

سپاسگزاری

اکنون که این رساله به پایان رسیده است بر خود فرض می دانم؛ از استاد گرامی، جناب آقای دکتر محمد مهدی گلشن که همواره با راهنمایی های علمی و اخلاقی، مشوق من بوده اند،سپاسگزاری کنم .همچنین از اعضای محترم کمیته، آقایان دکتر حمید نادگران و دکتر محمود حسینی فرزاد به سبب بحث و گفتگوهای سازنده تشکر نمایم .همچنین از خانواده عزیز و تمام دوستانی که مرا در این مسیر پشتیبانی و یاری کرده اند، کمال قدردانی را دارم.

چکیده

بررسی تحول زمانی حالتهای همدوس در محیط غیر خطی کر تعمیم یافته

به وسیله ی:

حمیدرضا اسماعیلی

در این پایان نامه ابتدا رفتار و ویژگیهای حالتهای همدوس و فشرده عددی فوتونها در یک محیط خطی را مورد مطالعه قرار می دهیم. از آنجا که محیط، مخصوصا تحت تاثیر لیزرهای پرتوان، از خود خصوصیات غیرخطی نشان می دهد، در ادامه حالتهای همدوس را در یک محیط غیرخطی بررسی می کنیم. برای این منظور با بررسی اپتیک غیرخطی و معرفی محیط غیرخطی کر هامیلتونی غیرخطی محیط کر را تعریف کرده، آن را تعمیم می دهیم. با استفاده از هامیلتونی کر تعمیم یافته، که محیط کر حالت خاصی از آن می باشد، تحول زمانی حالتهای همدوس در این محیط را بررسی خواهیم کرد. برای اینکار عملگر تحول زمانی در اینگونه محیطها را محاسبه کرده با اعمال آن تحول زمانی حالتهای همدوس را بدست می آوریم. همچنین عدم قطعیت در مکان و اندازه حرکت را به عنوان تابعی از زمان و نسبت به حالتهای همدوس در یک محیط غیرخطی کر تعمیم یافته محاسبه گردیده است. با بررسی این مقادیر نشان می دهیم که حالتهای همدوس در محیط غیرخطی کر تعمیم یافته همدوس باقیمانده و تمام ویژگیهای یک حالت همدوس را دارا می باشد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: مقدمه	**۱**
فصل دوم : کوانتش امواج الکترومغناطیسی آزاد	**۵**
۲-۱ میدان الکترومغناطیسی آزاد	۶
۲-۲ کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد	۱۲
فصل سوم: حالت های همدوس و فشرده	**۱۷**
۳-۱ تابش از یک جریان کلاسیکی	۱۸
۳-۲ حالتهای همدوس ویِه حالت عملگر نابودی	۲۰
۳-۳ نمایش حالتهای همدوس در فضای مختصات	۲۲
۳-۴ خواص ویژه حالتهای همدوس	۲۳
۳-۵ نمایش دیفرانسیلی عملگرهای خلق و نابودی در حالتهای همدوس	۲۸
۳-۶ تحول زمانی حالتهای همدوس	۲۸
۳-۷ حالتهای همدوس میدان های الکترومغناطیسی	۳۰
۳-۸ حالتهای فشرده	۳۱
فصل چهارم: اپتیک غیر خطی و محیط کر	۳۹
۴-۱ محیط غیر خطی	۴۰
۴-۲ اثر کر	۴۳
فصل پنجم: تحول زمانی یک حالت همدوس در محیط کر تعمیم یافته	**۴۸**
۵-۱ هامیلتونی بر هم کنش اتم و میدان در محیط کر تعمیم یافته	۴۹
۵-۲ تحول زمانی حالت همدوس در محیط کر تعمیم یافته	۵۱
فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات	۵۴
مراجع	۵۶

فصل اول

مقدمه

۱-مقدمه

در سالهای ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷ سه مقاله مهم توسط شرودینگر[۱]، کنارد[۲] و داروین[۳] در ارتباط با تحول بسته های موجی که به عنوان نمونه های اولیه حالتهای همدوس و فشرده شناخته می‌شوند، نوشته شد. [۳-۱] در حالتهای همدوس نوسانگر هماهنگ عدم قطعیت های مکان و اندازه حرکت با یکدیگر مساوی بوده و کمینه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را بدست می‌دهد[۴,۵] (در این پایان نامه عملگرها را با علامت کلاه بالای عملگر مانند $\hat{x}$ و ویژه مقادیر را با حروف کوچک و بدون کلاه مانند x نشان می دهیم.) حالتهایی وجود دارند که دارای عدم قطعیت متفاوت $\Delta\hat{x}$ و $\Delta\hat{p}$ هستند و کمینه بودن اصل عدم قطعیت را ارضاء می کنند، که حالتهای فشرده عددی می نامیم. [۸-۶] در این حالتها یکی از فاکتورهای سمت چپ رابطه عدم قطعیت کوچکتر از $\frac{\hbar}{2}$ می باشد.

امروزه حالتهای همدوس و فشرده دارای کاربردهای [۱۲-۹] متعددی در زمینه های گوناگون فیزیکی هستند، رایانه های کوانتومی[۱۳,۱۴] ، ساعتهای اتمی دقیق، بیناب نمایی، و تداخل سنجی [۱۶-۱۵] بعضی از کاربردهای این حالتها هستند. بنابراین بررسی رفتار این حالتها در محیطهای مختلف خطی و غیر خطی می تواند نتایج مفیدی در بر داشته باشد. با توجه به کاربردهای وسیع حالتهای همدوس، پرداختن به این سوال که آیا یک حالت همدوس در یک محیط غیرخطی همدوس باقی می ماند، می تواند منجر به نتایج جالب توجهی شود. پاسخ به این سوال قسمت اصلی و مهمی از پایان نامه حاضر را تشکیل می دهد.

یکی از روشهای تولید حالتهای همدوس میدان تابشی اعمال عملگر جابجایی روی حالت پایه نوسانگر هماهنگ است. این عملگر جابجایی از عملگرهای خلق و نابودی یا مکان و اندازه حرکت درست می شود. همانطور که گفته شد در حالتهای همدوس نوسانگر هماهنگ، حاصلضرب عدم قطعیت های مکان و اندازه حرکت در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ همواره

---

۱ -Schrödinger
۲ -Kenard
۳ -darvin

مساوی $\frac{\hbar}{2}$ می باشد. به عبارت دیگر حالتهای همدوس نزدیکترین حالتهای کوانتومی به حالتهای کلاسیکی هستند [۱۸-۱۷].

از دیگر ویژگیهای این حالتها، آن است که ویژه حالت عملگر نابودی a هستند. تولید حالتهای فشرده عددی اصولا امکان پذیر است. یکی از روشهای تولید چنین حالتهایی اعمال عملگر فشردگی عددی روی حالت پایه نوسانگر هماهنگ است. اولین مثال حالتهای فشرده توسط کنارد مطرح شد؛ او با در نظر گرفتن تحول زمانی بسته موجی گوسی نوسانگر هماهنگ این حالتهای غیرکلاسیکی را ساخت. حالتهای فشرده عددی با عبور میدان الکترومغناطیسی از یک محیط غیرخطی تولید می شوند. همبستگی کوانتومی بین فوتونها که بر اساس برهمکنش غیرخطی بین آنها بوجود آمده اند، نقش اساسی درتولید حالتهای فشرده نور دارند[۲۰-۱۹]. این حالتها در اواسط دهه ۸۰ میلادی در آزمایشگاه مشاهده شدند. چون در حالتهای فشرده مقدار یکی از عدم قطعیت ها در مکان و اندازه حرکت کمتر از $\frac{\hbar}{2}$ است، پیشنهاد شد که از این حالتها برای آشکارسازی تپ های ضعیف و بهبود ارتباطات اپتیکی استفاده شود[۲۲-۲۱].

اپتیک غیرخطی شاخه ای از اپتیک است که رفتار نور را در یک محیط غیرخطی شرح می‌دهد. پدیده های غیرخطی از ناتوانی دوقطبیهای محیط اپتیکی در پاسخ به میدان متناوب $\tilde{E}$ مربوط به باریکه نور ناشی می شوند[۲۵-۲۳]. در اپتیک غیرخطی به مطالعه پدیده هایی که به عنوان نتیجه اصلاح خواص اپتیکی سیستم یک ماده در حضور نور اتفاق می افتد، پرداخته می شود. این پدیده ها وقتی اتفاق می افتد که پاسخ سیستم ماده به میدان اپتیکی بکار برده شده به روش غیرخطی، به قدرت میدان اپتیکی، وابسته باشد. این خاصیت غیرخطی به طور نمونه در نورهای با شدت بالا مشاهده می گردد.

اثر الکترواپتیکی کر مورد خاصی است که در آن میدان الکتریکی، یک میدان خارجی کند تغییر است، که توسط یک ولتاژ مدوله کننده در سرتاسر ماده ایجاد می شود [۲۷-۲۶].

در سال ۱۸۷۵، کر کشف کرد که وقتی یک میدان الکتریکی قوی در دو سر صفحه شیشه ای حاوی مایع برقرار شود سپس با عبور دادن نور از میان دو ورقه موازی با بارهای مختلف که درون محفظه شیشه ای قرار دارند میدان الکتریکی اعمال شده باعث ایجاد دو ضریب شکست متفاوت، یکی مربوط به قطبهای موازی با محور اپتیکی و دیگری عمود بر محور اپتیکی، برای نوری که از سلول می گذرد، می شود. بنابراین برای نور قطبیده موازی و عمود بر میدان، ضرایب شکست متفاوتی وجود دارد[۳۰-۲۸].

این اثر به اثر کر معروف است محیط کر یک محیط غیرخطی از مرتبه سوم است که در آن اثر کر وجود دارد[۳۲-۳۱]. هامیلتونی موثر این محیط که توسط ریسکن[۱] در سال ۱۹۹۱ و

---

۱ -Riskan

پوری[۱] در سال ۱۹۹۲ ارائه شد دارای جمله ایست که به جمله کر معروف است. این هـامیلتونی به صورت $[H = \hbar\omega\chi a^{\dagger 2} a^{2}]$ می باشد که χ ضریب جمله غیرخطی کر است.

در این پایان نامه به بررسی محیط غیرخطی پرداخته ایم که هامیلتونی موثر آن شـبیه بـه هامیلتونی محیط کر می باشد با این تفاوت که جمله $a^{\dagger 2} a^{2}$ به جای تـوان دوم دارای توانهـای m باشد و آنرا محیط غیرخطی کر تعمیم یافته نامیده ایم. بررسی این هـامیلتونی بـه مـا ایـن امکان می دهد که محیط کر حالت خاصی از این محـیط تعمـیم یافتـه در نظـر گرفتـه شـود. همانطور که اشاره شد از اهداف اصلی این پایان نامه بررسی تحول زمانی حالتهای همـدوس در محیط غیرخطی کر تعمیم یافته است. ساختار این پایان نامه به شکل زیر است:

۱-در فصل دوم، ابتدا میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی آزاد را مورد بررسی قرار می دهیم و سـپس بـه کـوانتش میـدان الکترومغناطیسـی آزاد مـی پـردازیم و هـامیلتونی میـدان الکترومغناطیسی آزاد را بر حسب عملگرهای خلق $a^{\dagger}$ و نابودی a بدست می آوریم.

۲-در فصل سوم ابتدا هامیلتونی خطی $\hat{H}$ را برای یک نوسانگر هماهنـگ سـاده برحسـب عملگرهای خلق و نابودی معرفی می کنیم. سپس با تاثیر یک عملگر یکانی روی حالتهای پایـه نوسانگر هماهنگ، حالت همدوس میدان تابشـی را تشـکیل مـی دهـیم. همچنـین هـامیلتونی غیرخطی $\hat{H}$ را برحسب عملگرهای خلق و نابودی معرفی می کنیم و بـا تـاثیر عملگـر یکـانی $\hat{U} = \exp(-i\hat{H}t)$ روی حالت پایه نوسانگر هماهنگ، حات فشرده عددی را تولید مـی کنـیم و به تحول زمانی حالتهای همدوس و فشرده در محیط خطی می پردازیم.

۳-در فصل چهارم، ابتدا به اپتیک غیرخطی می پردازیم ودر مورد نحـوه ایجـاد محیطهـای غیرخطی و رفتارهای این محیطها به میدانهای الکتریکـی فـرودی مـی پـردازیم و در ادامـه بـه معرفی اثر غیرخطی کر و چگونگی ایجاد آن می پردازیم و محـیط غیرخطـی کـر را بـر اسـاس هامیلتونی که شامل جمله $\chi a^{\dagger 2} a^{2}$ می باشد، معرفی می کنیم.

۴-در فصل پنجم، ابتدا هامیلتونی برهمکنش اتم و میدان در محیط غیرخطـی کـر تعمـیم یافته با استفاده از روابط جابجایی $[\hat{N},\hat{a}]$ و $[\hat{N},a^{\dagger}]$ و با استفاده از تکنیـک خـاص تعریـف و بازنویسی می کنیم و سـپس بـه تحـول زمـانی حالـت همـدوس در محـیط کـر تعمـیم یافتـه می‌پردازیم. و تحول زمـانی عملگرهـای مـزدوج میـدان $\Delta\hat{x}$ و $\Delta\hat{p}$ را در ایـن محـیط بدسـت می‌آوریم. و کمینه عدم قطعیت را در انـدازه گیـری مکـان و انـدازه حرکـت بـرای یـک حالـت همدوس بدست می آوریم.

۵-در فصل ششم، نتیجه گیری و پیشنهاد شیوه ادامه کار در آینده را ارائه می کنیم.

[۱] - Puri

فصل دوم

کوانتش امواج الکترو مغناطیسی آزاد

۲- کوانتش امواج الکترو مغناطیسی آزاد

همان طورکه می‌دانیم نقطـه شـروع بررسـی بـرهمکنش اتـم و میـدان الکترومغناطیسـی هامیلتونی می‌باشد. در نظر گرفتن هامیلتونی به صورت کلاسیک در توجیه برخی پدیده‌ها مثل پایداری اتم ها و سقوط نکردن الکترون بر روی هسـته نـاتوان اسـت. همچنـین اگـر میـدان را بصورت کلاسیک و ذرات باردار (مثلا الکترون در اتم‌ها) را به صورت کوانتومی در نظـر بگیـریم، باز هم نمی‌توان پدیده‌ای همچون گذار خود به خود را توجیه کـرد، بنـابراین نیـاز بـه کـوانتش میدان الکترو مغناطیسی و در نتیجه نوشتن هامیلتونی کل مجموعه بـه صـورت کوانتـومی کـه می‌تواند پدیده‌های مذکور (و بیشتر) را توجیه کند، احساس مـی‌شـود. در ایـن فصـل ابتـدا بـه کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد پرداخته و سپس هامیلتونی توصیف کننده مجموعه ذرات باردار و میدان الکترومغناطیسی (هر دو کوانتومی) را ارائه خواهیم کرد.

۲-۱ میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی آزاد

نظریه کوانتومی تابش، همانند نظریه کلاسیکی، بر پایه معادلات ماکسول استوار اسـت. در نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی، کمیت‌های دینامیکی معرف میدان مورد نظـر، تبـدیل به عملگرهایی می‌شوند که روی حالت‌های کوانتـومی اثـر کـرده‌انـد از طریـق آن کمیـت‌هـای فیزیکی قابل اندازه‌گیری، محاسبه و پیش‌بینی می‌شـوند[۳۲]. بـدین ترتیـب، ایـن عملگرهـا از روابط جابجایی خاصی پیروی خواهنـد کـرد. در ایـن بخـش مـروری بـر معـادلات ماکسـول و کوانتش امواج الکترومغناطیسی خواهیم داشت.

۲-۱-۱ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و چشمه‌ها، (بارها با چگالی ρ و جریان‌ها با چگالی $\vec{j}$) را به هم مربوط می‌سازند. معادلات ماکسول در هر نقطه از فضا و در هر لحظه از زمان، دریکای SI به صورت زیر می‌باشند [۳۳].

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (۱-۱-۲)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}\left(\vec{r},t\right)=\vec{j}\left(\vec{r},t\right)+\frac{\partial\vec{D}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \quad (۲-۱-۲)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=۰ \quad (۳-۱-۲)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (-۱-۲)$$

در این معادلات $\vec{E}$، میدان الکتریکی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی، $\vec{D}$ بردار جابجایی الکتریکی، و $\vec{H}$ شدت میدان مغناطیسی می‌باشند. البته برای استفاده از این معادلات، ارتباط بین میدانهای الکتریکی، $\vec{E}$ و $\vec{D}$ ونیز میدانهای مغناطیسی، $\vec{B}$ و $\vec{H}$ که به روابط ساختمندی مشهورند لازم است. برای یک محیط همسانگرد و همگن، روابط ساختمندی عبارتند از

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad (۵-۱-۲)$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H} \quad (۶-۱-۲)$$

که در آن ε گذردهی الکتریکی محیط و μ نفوذ پذیری مغناطیسی می‌باشند.

معادلات ماکسول را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. معادلات (۲-۱-۱) و (۲-۱-۲) که در آنها چشمه‌ها $\left(\vec{j},\rho\right)$ ظاهر شده‌اند، معادلات دینامیکی و معادلات (۲-۱-۳) و (۲-۱-۴) که بدون چشمه هستند، معادلات سینماتیکی نامیده می‌شود. معادله (۲-۱-۱) شکل دیفرانسیلی قانون گاوس می‌باشد. شکل دیفرانسیلی قانون گاوس را فقط وقتی می‌توان به کاربرد که ρ تابعی پیوسته و معلوم در فضا و زمان باشد (زمانی که ρ تعریف نشده یا نامتناهی باشد $\vec{\nabla}.\vec{E}$ بینهایت می‌شود). معادله (۲-۱-۲) شکل دیفرانسیلی قانون آمپر ـ ماکسول بوده و $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ معروف به جریان جابجایی است. این جمله سازگاری معادلات با بقای بار را برقرار می‌سازد (در ادامه به این نکته اشاره شده است). حضور جریان جابجایی بیانگر این است که تغییر میدان‌های الکتریکی در فضا باعث به وجود آمدن میدان مغناطیسی می‌شود.

طبق معادلات (۲-۱-۳) و (۲-۱-۴) بین $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یک رابطه درونی وجود دارد و این میدانها همراه با هم میدان الکترومغناطیسی نامیده می‌شوند. معادله (۲-۱-۳) بیانگر این نکته است که تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد. معادله (۲-۱-۴) شکل دیفرانسیلی قانون القاء

فاراده می‌باشد که از تولید میدان الکتریکی بوسیله میدان مغناطیسی متغیر با زمان حکایت می‌کند.

در غیاب ماده رابطه میدان الکتریکی و جابجایی به صورت $\vec{D} = \varepsilon_\circ \vec{E}$ ($\varepsilon_\circ$ گذردهی خلا) و رابطه بین میدان مغناطیسی و شدت میدان به صورت $\vec{B} = \mu_\circ \vec{H}$ (نفوذپذیری خلا) خواهد بود. همچنین با استفاده از (۲-۱-۱) و (۲-۱-۲) می‌توان نشان داد که :

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = ۰ \qquad (۲-۱-۷)$$

این رابطه پایستگی بار را نشان می‌دهد [۳۳] (پایستگی بار نشان دهنده تقارن است که در نتیجه آن آزادی در انتخاب پیمانه‌ای به وجود می‌آید)

چنانچه می‌دانیم هر بردار را می‌توان به مولفه‌های عرضی و طولی، که به ترتیب دارای واگرایی و پیچش صفراست تقسیم نمود [۳۴]. با توجه به معادله (۲-۱-۱) از آنجا که $\vec{\nabla}.\vec{E}_\perp = ۰$ است. پس فقط قسمت طولی میدان الکتریکی به چشمه (چگالی بار الکتریکی) مربوط می‌باشد.

$$\vec{\nabla}.\vec{E}_\parallel = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲-۱-۸)$$

معادله (۲-۱-۳) نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی کاملا عرضی است، یعنی مولفه طولی میدان مغناطیسی صفر است. $\left(\vec{B}_\parallel = ۰\right)$. این نتایج حتی در محیط‌های همسانگرد نیز صادق است.

از آنجا که واگرایی (دایورژانس) پیچش (کرل) هر بردار صفراست در نتیجه با توجه به رابطه (۲-۱-۴) می‌توان میدان مغناطیسی را بر حسب پیچش میدانی برداری، پتانسیل برداری، نوشت:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (۲-۱-۹)$$

با جایگذاری این معادله در معادله (۲-۱-۴) داریم

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = ۰ \qquad (۲-۱-۱۰)$$

و از آنجا که پیچیش (کرل) گرادیان هر کمیت نرده‌ای صفر می‌باشد [۳۵]،

$$\nabla \times \nabla \phi = ۰ \qquad (۲-۱-۱۱)$$

می‌توان نوشت:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (۲-۱-۱۲)$$

در معادله فوق ϕ پتانسیل نرده‌ای می‌باشد. با جایگذاری معادلات (۲-۱-۱۲) و (۲-۱-۹) در معادله (۲-۱-۲) و با استفاده از رابطه

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\left(\nabla.\vec{A}\right) - \nabla^۲ \vec{A} \qquad (۲-۱-۱۳)$$

داریم:

$$\nabla\left(\nabla.\vec{A}\right)-\nabla^{۲}\vec{A}+\frac{۱}{C^{۲}}\frac{\partial^{۲}\vec{A}}{\partial t^{۲}}=۰ \quad (۲-۱-۱۴)$$

همچنین با جایگذاری معادله (۲-۱-۱۲) در معادله (۲-۱-۱) خواهیم داشت:

$$\nabla^{۲}\phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla.\vec{A}\right)=\frac{-\rho}{\varepsilon_{\circ}} \quad (۲-۱-۱۵)$$

۲-۱-۲ تبدیلات پیمانه‌ای

روابط (۲-۱-۱۲) و (۲-۱-۱۴) نشان می‌دهد که میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$،تحت تبدیلات زیر،

$$\vec{A}(\vec{r},t)\rightarrow\vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}F(\vec{r},t) \quad (۲-۱-۱۶)$$

$$\varphi(r,t)\rightarrow\varphi'(r,t)=\varphi(\vec{r},t)-\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{r},t) \quad (۲-۱-۱۷)$$

که در آن F تابعی اختیاری ولی مشتق‌پذیر از مکان و زمان است، همچنان بدون تغییر باقی می‌ماند[۳۵]. از آن جا که میدان‌های فیزیکی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یکسان را می‌توان با پتانسیل‌های مختلف $\vec{A}$ و φ تعریف کرد، پس پتانسیل‌ها را می‌توان به صورت اختیاری انتخاب نمود. از آنجا که پیچش پتانسیل برداری توسط رابطه (۲-۱-۱۳) تعیین شده است، این اختیار در انتخاب $\vec{\nabla}.\vec{A}$ متجلی می‌گردد.

یک تبدیل پیمانه‌ای که معروف به پیمانه کولن است، که به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، به صورت $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t)=۰$ است:

در اینجا نیز می‌توان نشان داد که اگر $\vec{A}$ شرط کولن را ارضا نکند، می‌توان $F(\vec{r},t)$ در رابطه (۲-۱-۱۶) را به قسمی انتخاب نمود که $\vec{A}'$ این شرط را برآورده کند (پیمانه لورنتس).

۲-۱-۳ امواج الکترومغناطیسی

اگر روابط (۲-۱-۱۲) و (۲-۱-۱۳)را در معادله (۲-۱-۲) جایگذاری کنیم خواهیم داشت :

$$\left(\frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}-\nabla^{۲}\right)\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{۱}{\varepsilon_{\circ}c^{۲}}j(\vec{r},t)-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t)\right)-\frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi(\vec{r},t) \quad (۲-۱-۱۸)$$

دو معادله اخیر معادلات دیفرانسیلی جفت شده و از مرتبه دو در زمان و مکـان را تشـکیل می‌دهند [۳۳]. از آنجا که $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ در روابـط (۲-۱-۱۵) و (۲- ۱-۱۶) ظـاهر نشـده اسـت، ایـن معادلات، معادله حرکت برای φ نمی‌باشد ولی φ را به $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ مربوط می‌سازند.

با استفاده از شرط لورنتس، معادلات (۲-۱-۱۵) و (۲-۱-۱۸) به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\varphi(\vec{r},t)=\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (۲-۱-۱۹)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}(\vec{r},t) \qquad (۲-۱-۲۰)$$

چنانچه مشاهده می‌شود، این دو معادله ساختار یکسانی داشته و شکل آن ناوردای لورنتس است. دو معادله اخیر نشان می‌دهند که پتانسیل‌های الکترومغناطیسی (و در نتیجه میدان‌های الکترومغناطیسی) رفتاری موجی داشته و در خلا با سرعت $\left(c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right)$ منتشر می‌شوند.

از طرف دیگر با استفاده از شرط کولن، روابـط (۲-۱-۱۵) و (۲-۱-۲۰) بـه دو رابطـه زیـر تبدیل شوند:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t)=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (۲-۱-۲۱)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) \qquad (۲-۱-۲۲)$$

توجه می‌شود که رابطه (۲-۱-۲۱) همان معادله پواسـون در الکتروسـتاتیک مـی‌باشـد. در غیاب بار خالص و عدم وجود کرانه‌های محدود جواب این معادله را می‌توان صفر انتخـاب نمـود که در نتیجه پتانسیل برداری در معادله (۲-۱-۲۲) به صـورت امـواج تختـی کـه بـا سـرعت c منتشر می‌شوند، ظاهر خواهد شد.

بنابراین در خلا و هنگامیکه $j=\rho=0$ باشد، می‌توان نوشت :

$$-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0 \qquad (۲-۱-۲۳)$$

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (۲-۱-۲۴)$$

ساده‌ترین جواب معادله (۲-۱-۲۴) برای میدان آزاد و شرایط مرزی متناوب، $\varphi=0$ اسـت مجموعه شرط کولن و واقعیت اخیر به پیمانه تابش مشهور است. با استفاده از پیمانه تـابش در معادله (۲-۱-۲۳) داریم:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0 \qquad (۲-۱-۲۵)$$

جواب معادله (۲-۱-۲۵) با استفاده از جدا سازی متغیرها در هر لحظه، t و در هر مکان، $\vec{r}$، به صورت زیر است:

$$\vec{A}_{\vec{K}}(\vec{r},t) = A_K \ \exp\left(i\ \vec{k}.\vec{r} - \omega_k t\right) \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۲۶)$$

که در آن $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$، فرکانس میدان، $\vec{k}$، بردار موج و $\vec{A}_{\vec{k}}$ دامنه (ثابت) است. با فرض اینکه میدان الکترومغناطیسی در یک جعبه مکعبی به ابعاد l و حجم $V = l^۳$ محصور است و با استفاده از شرایط مرزی متناوب؛

$$\exp\left(ik_r r - \omega t\right) = \exp\left(ik_r(r+l) - \omega t\right) \qquad ; r = x., y, z. \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۲۷)$$

خواهیم داشت:

$$k_r = \frac{۲\pi n_r}{l} \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۲۸)$$

که در آن $n_r = ۰, \pm۱, ...$ می‌باشد . از آنجا که کمیت‌های $\vec{B}$ و $\vec{E}$ قابل اندازه‌گیری اند، پس حقیقی هستند و در نتیجه کمیت $\vec{A}$ نیز بایستی حقیقی می‌باشد. با توجه به آنکه معادله (۲-۱-۲۶) یک معادله خطی و حقیقی است، پس هر ترکیب خطی از جواب این معادله و همیوغ مختلط آن نیز جواب معادله است:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left(A_{\vec{k}} \exp i\left(\vec{k}.\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t\right) + C.C.\right) \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۲۹)$$

که در آن .C.C معرف همیوغ مختلط[۱] است. با استفاده از شرط کولن داریم:

$$\vec{k}.\vec{A} = ۰ \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۳۰)$$

این معادله نشان می‌دهد که موج کاملا عرضی است و در صفحه‌ای عمود بر بردار انتشار قرار دارد، بنابراین دو جهت قطبش $\hat{\varepsilon}_{k.\lambda}\ (\lambda = ۱,۲)$ برای هر بردار $\vec{k}$ در نظر می‌گیریم بطوریکه هر سه با هم، یک دستگاه متعامد راستگرد تشکیل دهند. پس جهت انتشار $\hat{k}$ و $\hat{\varepsilon}_{\vec{k},۱}$ و $\hat{\varepsilon}_{\vec{k},۲}$ شرایط زیر را ارضا می‌کنند:

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}.\hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۳۱)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}.\hat{k} = ۰ \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۳۲)$$

به این ترتیب، کلی‌ترین حل در فضای تهی و قطبش تخت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \left(A_{\vec{k},\lambda} \exp i\left(\vec{k}.\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t\right) + C.C.\right) \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۳۳)$$

با قرار دادن معادله اخیر در معادلات (۲-۱-۹) و (۲-۱-۱۲) میدان الکتریکی و مغناطیسی، به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\sum_{\vec{k},\lambda=۱}^{۲} \hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\,\omega_{\vec{k}} \left(A_{\vec{k},\lambda} \ \exp\ i\left(\vec{k}.\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t\right) - C.C.\right) \qquad (۲\text{-}۱\text{-}۳۴)$$

[۱] - Complex Conjugate