
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهراء(س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

عنوان

# موجکها و کاربرد آن در حل معادلات انتگرال غیرخطی همرشتاین

استاد راهنما
دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور
دکتر سهرابعلی یوسفی

دانشجو
سمانه پنجه علی بیک

آذرماه ۱۳۸۷

# قدردانی و تشکر

اکنون که با یاری پروردگار نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم میدانم از ستاد گرانقدرم جناب آقای دکتر یداله اردوخانی که در پیمودن این راه همواره همراه من بودند و راهنمایی های بی دریغ و ارزشمند ایشان راهگشای من بوده تشکر وقدردانی نمایم .

همچنینی با سپاس از جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی که وقت خویش را بی مضایقه در اختیار من قرار داده و زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان و جناب آقای دکتر داریوش بهمردی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده داشتند کمال تشکر را دارم .

در خاتمه از همسر عزیزم که همواره مشوق من بوده ودر تمامی مراحل انجام این پایان نامه از هیچگونه حمایتی دریغ نکردند متشکرم .

# چکیده


هدف اصلی در این رساله حل معادلات انتگرال ولترا – فرد هلم همرشتاین به شکل زیر با استفاده از موجک لژاندر می باشد

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x k_1(x,t) g_1(t, y(t)) dt + \lambda_2 \int_0^1 k_2(x,t) g_2(t, y(t)) dt, \qquad 0 \leq t, x \leq 1,$$

که در آن $y$ تابعی مجهول، $k_1$، $k_2$، $g_1$ و $g_2$ توابعی معلوم در $L^2([0,1] \times [0,1])$ و $f$ تابعی معلوم در $L^2([0,1])$ و توابع $g_1(t,y(t))$ و $g_1(t,y(t))$ بر حسب $y$ غیر خطی و $\lambda_1$ و $\lambda_2$ ثابت های دلخواه می باشند.

در این روش، جواب را بصورت $C^T \Psi(x)$ تقریب می زنیم که در آن $C$ بردار مجهول و $\Psi(x)$ بردار پایه‌ی موجک لژاندر است. سپس با استفاده از خواص موجک لژاندر و انتگرال گیری گاوس، بردار $C$ از حل یک دستگاه معادلات غیر خطی بدست می آید. همچنین در ادامه این روش را برا ی حل دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی به شکل

$$\begin{aligned} & y_i(x) = f_i(x) + \textstyle\int_0^x k_{i1}(x,t) g_{i1}(y(t)) dt + \int_0^1 k_{i2}(x,t) g_{i2}(y(t)) dt, \qquad 0 \leq t, x \leq 1, \\ & i = 1, \ldots, s, \qquad y(x) = [y_1(x), \ldots, y_s(x)]^T. \end{aligned}$$

و معادلات انتگرال– دیفرانسیل ولترا–فردهلم غیر خطی به شکل

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda_1 \textstyle\int_0^x k_1(x,t) g_1(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) dt \\ & \qquad\qquad + \lambda_2 \textstyle\int_0^1 k_2(x,t) g_2(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) dt, \\ & 0 \leq t, x \leq 1, \\ & y^{(i)}(0) = a_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

و در نهایت برای حل دستگاه معادلات انتگرال– دیفرانسیل ولترا–فردهلم غیرخطی به شکل

$$\sum_{i=0}^{n} p_{ji}(x)y_j^{(i)}(x) = f_j(x) + \lambda_{j1}\int_0^x k_{j2}(x,t)g_{j1}(y_1(t),y_2(t),\dots,y_s(t))dt$$
$$+\lambda_{j2}\int_0^1 k_{j2}(x,t)g_{j2}(y_1(t),y_2(t),\dots,y_s(t))dt,$$
$$0 \le t, x \le 1,$$
$$j = 1,\dots,s,$$
$$y_j^{(i)}(0) = a_i, \qquad i = 0,\dots,n-1.$$

به کار می بریم .

**کلمات کلیدی:** معادلات انتگرال ولترا—فرد هلم، دستگاه معادلات انتگرال، معادلات انتگرال — دیفرانسیل، موجک لژاندر، همرشتاین.

# فهرست مندرجات

# مقدمه

معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، شیمی و بیولوژی ظاهر می شوند. روش های تحلیلی بر حسب اینکه معادلات انتگرال از چه نوعی باشند برای تعیین جواب آنها بکار می رود. با توجه به اینکه حل بسیاری از معادلات انتگرال با روش های تحلیلی امکان پذیر نیست در نتیجه روشهای عددی مختلفی برای آنها بیا ن شده است.

از جمله در [1] روش هایی را برای تقریب معادلات انتگرال فردهلم همرشتاین بیان شده است و در [2] روش نیستروم بیان گردیده است. پتپت [3] از جمله کسانی است که معادلات انتگرال ولترا—فرد هلم آمیخته را مورد بررسی قرار داد، در [4] روش هم محلی برای معادلات انتگرال ولترا—فرد هلم بیان شده و در [5] روش هم محلی برای معادلات انتگرال ولترا— فرد هلم غیر خطی مورد بحث و بررسی قرار داده شده است. همچنین در[6] روش نیستروم برای حل معادلات انتگرال فرد هلم— ولترای خطی به کار گرفته شده است .

امروزه استفاده از توابع متعامد جهت حل معادلات انتگرال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است . ویژگی اصلی این تکنیک آن است که این گونه معادلات را به دستگاه‌های با معادلات جبری تبدیل می کند . برای این منظور سری قطع شده توابع متعامد با ضرایب مجهول را به عنوان تقریبی از جواب مسأله در نظر گرفته سپس با استفاده از نقاط مناسب، دستگاه را به یک دستگاه جبری خطی یا غیر خطی تبدیل می کنند.

در سالهای اخیر مطالعه و تحقیق در زمینه موجکها به طورجدی شروع شده. سابقه این نظریه‌ی حداقل به سال های ۱۹۱۰میلادی بر می گردد ولی از سال ۱۹۸۵ریاضیدانان زیادی آنالیز

موجکی را مورد توجه قرار دادند. محتوای غنی ریاضی و توانایی بالای کاربرد موجکها آنقدر راضی کننده و مطمئن بود که به سرعت توجه مهندسین و افراد با تخصص های گوناگون را برای حل مسائل مختلف با استفاده از آن جلب کرد . ایده اصلی این مساله نمایش توابع به قسمت های ساده تر است . همه ساله آثار بسیاری با عنوان موجک منتشر می شود [10 − 7].

از سال ۱۹۹۱روش موجکها برای حل معادلات انتگرال بکار گرفته شد. پایه های موجکی مختلفی چون موجک دابیشز [11]، اسپلاین خطی [12]، توابع والش [13] استفاده شده است. این حل ها اغلب دشوار و پیچیده بوده. یک حل ساده استفاده از موجکهای دیگری چون هار[14]، چبیشف [15] و لژاندر[16] می باشد که معادله‌ی انتگرال را به صورت یک دستگاه جبری تبدیل می کنند.

این پایان نامه مشتمل بر ۵ فصل می باشد. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل های بعدی می باشند ارائه می گردد. در فصل دوم، نظریه‌ی موجکها و موجک لژاندر را معرفی می کنیم . در فصل سوم، به بررسی وجود جواب معادله انتگرال همرشتاین می پردازیم. در فصل چهارم، حل عددی معادلات انتگرال ولترا− فردهلم همرشتاین و دستگاه معادلات انتگرال ولترا− فردهلم غیرخطی را بیان و با ارائه مثال های عددی روش مورد ارزیابی قرار می گیرد. در فصل پنجم، حل عددی معادلات انتگرال − دیفرانسیل ولترا − فردهلم غیرخطی و دستگاه آن را به کمک موجک لژاندر مورد بررسی قرار می دهیم .

# فصل ۱

# پیش‌نیازها

دراین فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز از آنالیز حقیقی و عددی می پردازیم [17,18] که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند .

## ۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

**تعریف ۱.۱** یک خانواده غیر تهی از زیر مجموعه های X چون $m$ را یک جبر گویند، هرگاه برای هر $A$ و $B$ در m داشته باشیم

۱) $A \cup B \in m$ ،

۲) $X - A \in m$ .

**تعریف ۲.۱** یک خانواده غیر تهی از زیر مجموعه‌های $X$ چون $m$ رایک $\sigma-$ جبر گویند، هرگاه اجتماع شمارش پذیراز عناصر$m$ در مجموعه $m$ قرار داشته باشد.

**تعریف ۳.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه دلخواه و$m$ یک $\sigma-$ جبر روی $X$ باشد$\mu : m \to [0,\infty)$ را یک اندازه گوییم، هر گاه داشته باشیم :

۱)$\mu(\emptyset)=0$،

۲)اگر$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه های مجزا در$\mathrm{m}$ باشد آنگاه $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

**تعریف ۴.۱** مجموعه $B\in m$ را اندازه پذیر گوییم هرگاه برای هر مجموعه دلخواه$A\in m$ داشته باشیم ،

$$\mu(A)=\mu(A\cap B)+\mu(A\cap \bar{B}).$$

که در آن $\bar{B}$ متمم $B$ نسبت به $X$ است.

**تعریف ۵.۱** تابع$f:X\to R$ را در نظر می گیریم. اگر برای هر زیر مجموعه‌ی باز $O$ از $R$ ، $f^{-1}(O)$ اندازه پذیر باشد، آنگاه $f$ را اندازه پذیر می گوییم .

**تعریف ۶.۱** برای تابع $f:X\to R$ عبارات زیر معادل هستند :

۱)$f$ اندازه پذیر است .

۲)برای هر بازه‌ی باز کراندار$(a,b)$ از $R$، $f^{-1}((a,b))$ اندازه پذیر است .

۳)برای هرزیر مجموعه بسته $C$ از $R$، $f^{-1}(C)$ اندازه پذیر است .

۴)برای هر$a\in R$، $f^{-1}([a,\infty)$ اندازه پذیر است .

۵)برای هر$a\in R$، $f^{-1}((-\infty,a])$ اندازه پذیر است .

۶)برای هر زیر مجموعه‌ی بورل $B$ از $R$، $f^{-1}(B)$ اندازه پذیر است .

**تعریف ۷.۱** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری (خطی) روی $R$ باشد. به تابع $\|.\|$ از $V$ به $R$ یک نرم گوییم هرگاه :

۱)به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$،

۲)به‌ازای هر $\alpha \in R$ ، $x \in V$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$،

۳)به‌ازای هر $x, y \in V$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**تعریف ۸.۱** به فضای خطی $X$ که دارای یک نرم است فضای خطی نرم دار گوییم .

اگر $X$ یک فضای خطی نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$ به $d$ یک متر روی X گوییم ($d$ یک متر تولید شده به وسیله نرم است ) بنابر این هر فضای نرم دار یک فضای متری است .

**تعریف ۹.۱** دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم دار $X$ به $x$ نرم همگرا گوییم هرگاه ،

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

**تعریف ۱۰.۱** دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم دار $X$ کشی[1] گوییم هرگاه :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \in Z^{+} \quad m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

---

[1] Cauchy

**تعریف ۱۱.۱** فرض کنیم $f$ بر$[a,b]$ پیوسته باشد نرم $\|\cdot\|_c$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|f\|_c = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| .$$

**تعریف ۱۲.۱** هرگاه هر دنباله کشی در فضای خطی نرم دار $X$، همگرا به نقطه‌ای در $X$ باشد، $X$ را فضای کامل گوییم .

**تعریف ۱۳.۱** فضای خطی نرم دار $X$ را یک فضای باناخ[2] گوییم هر گاه $X$ نسبت به متریک تولید شده کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

**مثال ۱.۱** ساده ترین فضای باناخ ، فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با متریک زیر می باشد ،

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad d(x,y) = |x-y| .$$

**تعریف ۱۴.۱** برای $1 \leq p < \infty$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(x)|^p < \infty$، فضای$L^p[a,b]$ گوییم پس

$$L^p[a,b] = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{C} \ , \ \text{f اندازه پذیر} \ , \ \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

Banach[2]

**قضیه ۱.۱** $L^p[a,b]$، $1 \leq p < \infty$ فضای کامل است.

$L^p[a,b]$ فضایی برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

درحالت خاص$L^2[a,b]$، یعنی

$$L^2[a,b] = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{C}\ ,\ \text{f اندازه پذیر}\ ,\ (\int_a^b |f(x)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

بانرم$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است .

**تعریف ۱۵.۱** اگر$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای در فضای نرم دار $X$ باشد گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در $X$ همگرا به $x$ است ، هر گاه دنباله $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ به $x$ همگرا باشد در این صورت می نویسیم، $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق گوییم هر گاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

**قضیه ۲.۱** فضای نرم دار $X$ باناخ است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق، همگرا باشد.

**تعریف ۱۶.۱** فضای خطی مختلط (یاحقیقی ) $X$ را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط ( یا حقیقی ) روی $X \times X$ که آن را با نماد ( , ) نشان می دهیم وجود داشته باشد، به طوری که برای هر$x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$،

۲) $(x,y)=\overline{(y,x)}$،

۳) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$،

۴) $(x,x)=0) \quad \Leftrightarrow \quad (x=0$ و $(x,x)\geq 0$.

آنگاه $(x,y)$ ضرب داخلی $x$ و $y$ نامیده می شود .

**تذکر ۱.۱** این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می کند

$$\forall x\in X, \quad \|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

**قضیه ۳.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای ضرب داخلی باشد . آنگاه به ازای هر $x,y\in X$ داریم

۱ )نامساوی کشی – شوارتز[3] $|(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\|$ ،

۲ ) نامساوی مثلثی $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ ،

۳ )اتحاد متوازی الاضلاع $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\,\|x\|^2+2\,\|y\|^2$ .

**مثال ۲.۱** فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای ضرب داخلی است

$$\forall f,g\in L^2(a,b), \qquad (f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

همچنین فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر نسبت به تابع وزن $\omega$ روی $[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است .

$$\forall f,g\in L^2(a,b), \qquad (f,g)_\omega=\int_a^b \omega(t)f(t)\overline{g(t)}dt.$$

---

[3] Cauchy-Schowarz

**تعریف ۱۷.۱** اگر $k(x,y)$ تابعی در $L^2((a,b)\times(a,b))$ باشد آنگاه تابع

$$|k|_2 = (\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}}.$$

یک نرم است .

**قضیه ۴.۱** اگر $k(x,y)$ تابعی در $L^p((a,b)\times(a,b))$ باشد و $p>1$ آنگاه

$$(\int_a^b(\int_a^b |k(x,y)|dy)^p)dx)^{1/p} \leq \int_a^b(\int_a^b |k(x,y)|^p dx)^{1/p})dy.$$

معادله‌ی فوق را فرم انتگرالی نامساوی مینکوفسکی[4] گوییم.

**تعریف ۱۸.۱** فضای ضرب داخلی $H$ را یک فضای هیلبرت[5] گوییم هرگاه $H$ نسبت به نرم تولید شده از ضرب داخلی $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ یک فضای باناخ باشد .

**مثال ۳.۱** $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است ،

$$\forall f,g\in L^2(a,b), \qquad (f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

[4] Minkowski Inequality

[5] Hilbert

**تعریف ۱۹.۱** دنباله $\{x_n\}$ در فضای هیلبرت $X$ ضعیف همگرا به $x$ است اگر

$$\forall z \in X, \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = (x, z).$$

**تعریف ۲۰.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ فضای خطی نرم دار باشند عملگر خطی $T : X \to Y$ را پیوسته گوییم هر گاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ که به $x$ همگرا باشد داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - Tx\| = 0.$$

**تعریف ۲۱.۱** یک زیر مجموعه از فضای نرم دار $X$ را نسبتاً فشرده گوییم هرگاه بستار آن فشرده باشد .

**تعریف ۲۲.۱** فرض کنیم $X$ و $Y$ دو فضای نرم دار خطی باشند ، عملگر خطی $T : X \to Y$ را فشرده گوییم هرگاه تصویر هر مجموعه‌ی کراندار تحت $T$ مجموعه ای نسبتاً فشرده باشد.

**تعریف ۲۳.۱** عملگر خطی $T : X \to Y$ را کاملاً پیوسته گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی ضعیف همگرا چون $\{x_n\}$ در $X$ ، دنباله‌ی $\{T(x_n)\}$ در $Y$ نرم همگرا باشد.

## ۲.۱ تعامد

**تعریف ۲۴.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای ضرب داخلی بوده و$x, y \in X$ متمایز باشند $x$ را بر$y$ عمود گوییم هرگاه برای $x \neq y$ داشته باشیم $(x, y) = 0$ وآن را با نماد $x \perp y$ نمایش می دهیم.
اگر به ازای هر $x, y \in A$ و $x \neq y$

$$(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ \alpha > 0, & x = y, \end{cases}$$

آنگاه زیر مجموعه $A \subset X$ را متعامد گوییم .
اگر برای هر$x \in A$ داشته باشیم$\|x\| = 1$ مجموعه $A$ را متعامد یکه یا نرمال گوییم .

**قضیه ۵.۱** اگر$A$ زیر مجموعه متعامد یکه از فضای ضرب داخلی $X$ باشد و$y \in X$ ، آنگاه
۱) $\{x \in A | (y, x) \neq 0\}$ شمارش پذیر است،
۲) $\sum_{x \in A} |(y, x)|^2 \leq \|y\|^2$ (نامساوی بسل[6]).

**قضیه ۶.۱** اگر $A$ یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت $H$ باشد، آنگاه سری فوریه$\sum_{x \in A} (y, x)x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست .

**تعریف ۲۵.۱** فرض کنید A یک زیر فضای ضرب داخلی $X$ باشد. متمم متعامد A، که با$A^{\perp}$ ، نشان داده می شود مجموعه همه ی بردار هایی‌از $X$ می باشد که به $A$ عمود هستند.

---
[6]Bessel

**تعریف ۲۶.۱** اگر $X$ یک فضای ضرب داخلی و $A$ زیر مجموعه‌ای از $X$ باشد $A$ را کامل گوییم هرگاه

$$A^{\perp} = \{0\}.$$

**تعریف ۲۷.۱** اگر $X$ یک فضای ضرب داخلی و $A$ یک زیر مجموعه متعامد یکه از $X$ باشد ، آنگاه $A$ را یک پایه متعامد یکه برای $X$ گوییم، هرگاه به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم،

$$y \doteq \sum_{x \in A} (y, x)x.$$

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می باشد.

**تعریف ۲۸.۱** فرض کنید $A$ یک زیر فضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی $X$ باشد. برای هر بردار $y \in X$ تصویر متعامد $y$ بر روی $A$، بردار یکتای $x \in A$ است که نزدیکترین بردار به $y$می باشد، یعنی :

$$\|y - x\| = \min_{z \in A} \|y - z\|.$$

**قضیه ۷.۱** فرض کنید $A$ زیر فضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی $X$ باشد. و فرض کنید $y \in X$ و $x$ تصویر متعامد$y$ روی $A$ باشد، در این صورت بردار $y - x$ بر هر بردار در $A$ عمود است .