بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

## تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب رضا میرزایی متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.



رضا میرزایی

امضاء

دانشکده علوم پایه

# سیستم‌های نظاره‌گر در گراف‌ها: توسیعی از کدهای شناساگر


نگارش

رضا میرزائی

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا میمنی

دکتر علی زعیم‌باشی

استاد مشاور: عبدالرضا اسکوئی


پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

شهریور ماه ۱۳۹۳

شماره: ۱۰۶/۱۴
تاریخ: ۹۳/۷/۵
پیوست: ..................

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

## صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای رضا میرزایی رشته ریاضی محض تحت عنوان «سیستم های نظاره گر در گراف ها : توسیعی از کدهای شناساگر» در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۲۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☐ قبول (با درجه بسیار خوب امتیاز ۱۸/۲۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱. عالی (۲۰-۱۹)
۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)
۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)
۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)
۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

| اعضاء | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| استاد راهنمای اول | دکتر حمید رضا میمنی | استاد | |
| استاد راهنمای دوم | دکتر علی زعیم باشی تاج آبادی | استادیار | |
| استاد مشاور | عبدالرضا اسکوئی | مربی | |
| داور داخلی | دکتر حمید مسگرانی | دانشیار | |
| داور خارجی | دکتر رضا نیک اندیش | استادیار | |
| نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه | دکتر حمید مسگرانی | دانشیار | |

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران،لویزان،کد پستی:۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email: sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

ساحت مقدس حضرت ولی عصر عج الله تعالی فرجه

# تشکر

اینک که به فضل خداوند این پایان‌نامه به سرانجام رسیده، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان گرامی دکتر میمنی و دکتر زعیم‌باشی به خاطر راهنمایی‌ها و زحمات فراوانشان با سمت استاد راهنما و همچنین استاد اسکوئی با سمت مشاور تشکر کنم.

## چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف همبند غیرجهتدار و $\mathcal{C}\subseteq V$ یک زیرمجموعه از رئوس باشد. اگر به ازای هر رأس $v\in V$، مجموعه‌های $N_G[v]\cap\mathcal{C}$ غیرتهی و متفاوت باشند، آنگاه $\mathcal{C}$ را یک کدشناساگر می‌نامیم.

در ادامه ویژگی‌های اساسی کدهای شناساگر را بررسی خواهیم کرد، یک کران بالا برای کدشناساگر مینیمم ارائه خواهیم داد و گراف‌هایی که این کران را بدست می‌دهند، بررسی خواهیم کرد. همچنین سیستم‌های نظاره‌گر در گراف را معرفی می‌کنیم، که یک توسیع از کدهای شناساگر است.

مجموعه متناهی $X$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $\mathcal{S}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $X$ باشد و همچنین فرض کنید مجموعه‌ی معین $S\subseteq X$ عضوی از $\mathcal{S}$ باشد. برای $x\in X$، $\mathcal{S}$-مجموعه شناساگر یا $\mathcal{S}$-برچسب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{\mathcal{S}}(x)=\left\{S\in\mathcal{S} : \mathrm{x}\in \mathrm{S}\right\}$$

$\mathcal{S}$ را یک سیستم شناساگر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x\in X$، $L_{\mathcal{S}}(x)$ ها غیرتهی و دوبه‌دو مجزا باشند.

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. مجموعه متناهی $\mathcal{W}=\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$، مجموعه‌ای از دوتایی های $w_i=(v_i,Z_i)$ است به گونه‌ای که $v_i$ یک رأس و $Z_i\subseteq N_G[v_i]$ است. $\mathcal{W}$ را یک سیستم نظاره‌گر در $G$ گوییم، اگر $\{Z_1,Z_2,\dots,Z_k\}$ یک سیستم شناساگر باشد.

همچنین در ادامه ویژگی‌های اساسی سیستم‌های نظاره‌گر را بررسی خواهیم کرد، یک کران بالا برای سیستم‌نظاره‌گر مینیمم ارائه خواهیم داد و گراف‌هایی که این کران را بدست می‌دهند، بررسی خواهیم کرد.



**کلمات کلیدی:** نظریه گراف، سیستم‌های نظاره‌گر، کدهای شناساگر، گراف‌های خطی

## فهرست مطالب

## فهرست اشکال

# ۱- فصل اول

## تعاریف و نمادگذاری

### ۱-۱- مقدمه

در این بخش به طور خلاصه به بررسی تعاریف اولیه مورد نیاز در این پایان‌نامه و نمادگذاری‌ها می‌پردازیم، که شامل مفاهیم گراف می‌گردد. نمادگذاری‌ها و تعاریف به کار رفته در این پایان‌نامه مطابق با مرجع [1]، است.

### ۱-۲- گراف

**تعریف ۱-۲-۱-** گراف $G$ دوتایی $G=(V,E)$ است که $V$ یک مجموعه‌ی غیرتهی از عناصر به‌نام مجموعه رئوس بوده و $E$ یک مجموعه (نه لزوماً غیرتهی) از زوج‌های غیرمرتب از رئوس مجزا $G$ است که یال نامیده می‌شوند. مجموعه رئوس $G$ را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های $G$ را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

یال $e=\{u\ ,\ v\}$ بیان می‌کند که رئوس $u$ و $v$ به یکدیگر متصل‌اند. اگر $e=\{u\ ,\ v\}$ یک یال از گراف $G$ باشد، آنگاه $u$ و $v$ رئوس مجاور هستند، همچنین رأس $u$ و رأس $v$ بر یال $e$ واقعند. بعلاوه اگر $e_1$ و $e_2$ یال‌های مجزا $G$ واقع بر یک رأس مشترک باشند، آنگاه $e_1$ و $e_2$ یال‌های مجاور هستند. یال $e=\{u\ ,\ v\}$ را می‌توان به صورت $uv$ و یا $vu$ نیز نوشت.

گرافی که تنها یک رأس داشته باشد را گراف بدیهی می‌گوییم و نیز گراف بدون یال را گراف تهی گوییم.

**تعریف ۱-۲-۲-** اندازه مجموعه رئوس گراف $G$ را مرتبه گراف $G$ می‌نامند و با $n(G)$ نمایش می‌دهند. اندازه مجموعه یال‌های گراف $G$ را اندازه گراف $G$ می‌نامند و با $m(G)$ نمایش می‌دهند. درجه رأس $v$ در گراف $G$ عبارت است از تعداد یال‌های گراف $G$ که بر رأس $v$ واقعند و آن را با $deg_G v$ یا به‌طور ساده $deg\ v$ نمایش می‌دهند.

براساس زوج یا فرد بودن درجه رئوس، رئوس را زوج یا فرد می‌نامیم. یک رأس از درجه صفر در گراف $G$ را رأس ایزوله می‌نامیم و همچنین یک رأس از درجه یک را رأس پایانی می‌نامیم. مینیمم درجه در گراف $G$، مینیمم درجه در میان رئوس گراف $G$ است و با $\delta(G)$ نمایش داده می‌شود. ماکزیمم درجه هم به‌طور مشابه تعریف می‌شود و با $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۱-۲-۳-** گراف $H$ را زیرگراف از گراف $G$ می‌گوییم و می‌نویسیم $H \subseteq G$، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. چنانچه در این تعریف $V(H) = V(G)$ باشد، آنگاه $H$ را زیرگراف فراگیر $G$ می‌نامیم.

**تعریف ۱-۲-۴-** گراف $G$ را منتظم از درجه $r$ (یا به‌عبارتی $r$- منتظم) گوییم هرگاه برای هر رأس $v$ از $G$ داشته باشیم $deg\, v = r$.

**تعریف ۱-۲-۵-** یک گراف کامل است هرگاه هر دو رأس از آن به یکدیگر متصل باشند. یک $(n, m)$ گراف کامل، گراف منتظمی از درجه $n-1$ و تعداد یال $m = {n(n-1)}/{2}$ است و آن را با $K_n$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱-۲-۶-** گراف $G$ را $k$- بخشی $(k \geq 1)$ گوییم هرگاه بتوان $V(G)$ را به $k$ زیرمجموعه $v_1, v_2, \ldots, v_k$ طوری افراز کرد که هر یال در $E(G)$، یک رأس از $v_i$ را به یک رأس از $v_j$ متصل کند و $i \neq j$ باشد.

گراف ۱- بخشی گراف تهی است. اگر $G$ یک گراف ۲- بخشی $r$- منتظم $(r \geq 1)$ با زیرمجموعه رئوس $V_1, V_2$ باشد، آنگاه $|V_1| = |V_2|$، زیرا اندازه $G$ برابر است با $m = r|V_1| = r|V_2|$.

**تعریف ۱-۲-۷-** گراف $G$ را $k$- بخشی کامل $(k \geq 1)$ گوییم هرگاه $G$ گراف $k$- بخشی با زیرمجموعه رئوس $V_1, V_2, \ldots, V_k$ باشد و همچنین این ویژگی را داشته باشیم که اگر $u \in V_i$ و $v \in V_j$ و همچنین $i \neq j$ آنگاه $uv \in E(G)$. اگر $|V_i| = n_i$ آنگاه این گراف را با $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ نمایش می‌دهیم.

یک گراف $k$- بخشی کامل، کامل است اگر و فقط اگر به ازای هر $i$ داشته باشیم $n_i = 1$، که در این صورت گراف کامل $K_k$ را خواهیم داشت. اگر به ازای هر $i$ داشته باشیم $n_i = t$، آنگاه گراف $k$- بخشی کامل، منتظم خواهد بود و آن را با $K_{k(t)}$ نشان می‌دهیم. گراف ۲- بخشی کامل با زیرمجموعه رئوس $V_1$ و $V_2$ که در آن $|V_1| = r$ و $|V_2| = s$ است را با $K_{r,s}$ نمایش می‌دهیم. یک گراف چند بخشی کامل، همان گراف $k$- بخشی کامل برای $k \geq 2$ است.

**تعریف ۱-۲-۸-** گراف $K_{1,s}$ را ستاره گوییم.

**تعریف ۱-۲-۹-** گراف‌های $G_1$ و $G_2$ را یکریخت گوییم اگر نگاشت یک به یک $\phi$ از $V(G_1)$ به $V(G_2)$ موجود باشد به‌طوری‌که مجاورت‌ها را حفظ کند. بنابراین به ازای هر دو رأس $x, y \in V(G_1)$ داریم:

$$xy \in E_{G_1} \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_{G_2}$$

**تعریف ۱-۲-۱۰**- دنباله $d_1, d_2, \dots, d_n$ از اعداد صحیح نامنفی را دنباله درجات رئوس گراف $G$ می‌نامیم اگر رئوس گراف $G$ را بتوان با $v_1, v_2, \dots, v_n$ طوری برچسب‌گذاری کرد که به ازای هر $i$ داشته باشیم $deg\, v_i = d_i$.

**تعریف ۱-۲-۱۱**- فرض کنید $u$ و $v$ رئوس (نه لزوماً مجزا) گراف $G$ باشند. یک $u - v$ گشت از $G$، یک دنباله متناوب متناهی $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$ از رئوس و یال‌هاست که با رأس $u$ آغاز و به رأس $v$ پایان می‌یابد و در آن $e_i = u_{i-1}u_i$ برای هر $i = 1,2,3, \dots, k$.

$k$ (تعداد یال‌های طی شده) را طول گشت می‌گوییم. اگر $u = v$، $u - v$ گشت را بسته و اگر $u \neq v$، $u - v$ گشت را باز می‌گوییم. گشت بدیهی فاقد یال است و در نتیجه $k = 0$. توجه کنید که در یک گشت ممکن است رئوس و یال‌ها تکرار شود.

دو $u - v$ گشت $u = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = v$ و $u = v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, v_l = v$ برابرند اگر و فقط اگر $k = l$ و $u_i = v_i$ برای هر $0 \leq i \leq k$؛ در غیر این‌صورت آنها متمایزند.

یک $u - v$ گشت را که در آن یال تکراری نباشد، $u - v$ گذر می‌گوییم. یک $u - v$ گشت را که در آن رأس تکراری نباشد، $u - v$ مسیر می‌گوییم. بنابراین هر مسیر یک گذر است. در یک مسیر اگر فقط رأس ابتدا و انتها یکسان باشند، آن را دور می‌گوییم. اگر طول یک دور زوج باشد، دور را زوج و در غیر این‌صورت دور را فرد می‌گوییم.

**تعریف ۱-۲-۱۲**- گراف از مرتبه $n$ که یک مسیر است را گراف مسیر می‌گوییم و با $P_n$ نمایش می‌دهیم. گراف از مرتبه $n$ که یک دور است را گراف دور می‌گوییم و با $C_n$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱-۲-۱۳**- رأس $u$ را با رأس $v$ همبند گوییم اگر یک $u - v$ مسیر در $G$ وجود داشته باشد. گراف $G$ را همبند گوییم اگر هر دو رأس از آن همبند باشند. گرافی که همبند نیست را ناهمبند گوییم. یک گراف ناهمبند را می‌توان به صورت چند مؤلفه همبندی در نظر گرفت.

**تعریف ۱-۲-۱۴**- گراف همبند $G$ را در نظر بگیرید. فاصله $d(u,v)$ بین دو رأس $u$ و $v$، مینیمم طول $u - v$ در $G$ است.

برای $d(u,v)$ داریم:

۱) برای هر دوتایی $u, v$ از رئوس $G$ داریم: $d(u,v) \geq 0$؛ و $d(u,v) = 0$ اگر و فقط اگر $u = v$.

۲) برای هر دوتایی $u, v$ از رئوس $G$ داریم: $d(u,v) = d(v,u)$

۳) برای هر سه‌تایی $u, v, w$ از رئوس $G$ داریم: $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

**تعریف ۱-۲-۱۵-** مجموعه $N_G[v]$، همسایگی‌های بسته رأس $v$ از گراف $G$ است که شامل رأس $v$ و همسایگی‌های بسته آن در گراف $G$ می‌باشد. برای $r \geq 0$ و $v \in V(G)$، مجموعه $B_G(v,r)$ را قرص از شعاع $r$ و مرکز $v$ می‌گوییم که شامل همه رئوس $x \in V(G)$ است به‌طوری که $d_G(v,x) \leq r$ ؛ $d_G$ همان فاصله در $G$ است. بوضوح $B_G(v,1) = N_G[v]$.

اگر گراف $G$ ناهمبند باشد، مفهوم فاصله در مؤلفه‌های همبند آن تعریف می‌شود و اگر $u$ و $v$ رئوسی در مؤلفه‌های مجزا $G$ باشند آن‌گاه $d(u,v)$ تعریف نشده است یا می‌توان گفت $d(u,v) = \infty$.

**تعریف ۱-۲-۱۶-** خروج از مرکز $e(v)$، یک رأس از گراف همبند $G$ برابر است با $max_{u \in V(G)} d(u,v)$. بعبارت دیگر $e(v)$ برابر است با فاصله بین $v$ و دورترین رأس از $v$ در گراف $G$. شعاع $rad(G)$ خروج از مرکز مینیمم در میان رئوس گراف $G$ است.

گراف $G$ دارای شعاع ۱ است اگر و فقط اگر $G$ دارای یک رأس متصل به همه‌ی رئوس دیگر $G$ باشد.

قطر $diam(G)$ ماکزیمم خروج از مرکز در میان رئوس گراف $G$ است. بعبارت دیگر $diam(G)$ بیشترین فاصله بین هر دو رأس از گراف $G$ است. رأس $v$ را رأس مرکزی گوییم اگر $e(v) = rad(G)$؛ و مرکز $Cen(G)$ زیرگراف تولید شده توسط رئوس مرکزی $G$ است. رأس $v$ را رأس محیطی گوییم اگر $e(v) = diam(G)$؛ و محیط $Per(G)$ زیرگراف تولید شده توسط رئوس محیطی $G$ است.

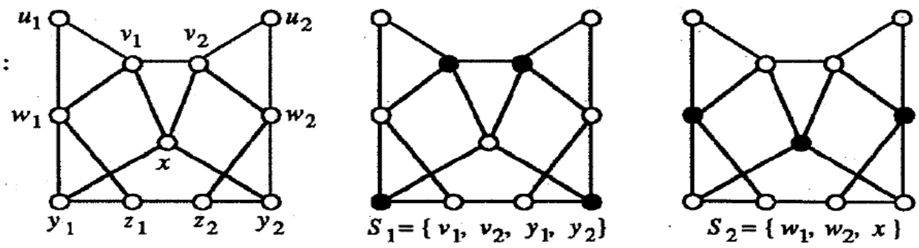
**تعریف ۱-۲-۱۷-** گراف همبند بدون دور را درخت می‌گوییم. گراف بدون دور را جنگل می‌گوییم. رأس از درجه یک در درخت‌ها را برگ می‌گوییم. زیرگراف فراگیر از گراف $G$ که درخت باشد را یک درخت فراگیر از گراف G می‌گوییم.

هر مؤلفه از جنگل را یک درخت می‌گوییم. هر گراف همبند مانند $G$ دارای یک درخت فراگیر است. مسیرها $(P_n)$ و ستاره $(K_{1,s})$ درخت هستند.

**تعریف ۱-۲-۱۸-** مجموعه‌ی $S$ از رئوس گراف $G$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گری گوییم اگر هر رأس در $V(G) - S$ حداقل به یک رأس از $S$ متصل باشد.

اندازه مینیمم در میان مجموعه‌های احاطه‌گر $G$ را عدد احاطه‌گری گوییم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مجموعه‌ی احاطه‌گری از اندازه $\gamma(G)$، مجموعه احاطه‌گری مینیمم است.

**مثال ۱-۲-۱۹**- شکل زیر، گراف $G$ را به همراه دو مجموعه احاطه‌گری $S_1 = \{v_1, v_2, y_1, y_2\}$ و $S_2 = \{w_1, w_2, x\}$ را معرفی می‌کند. از آنجایی که $S_2$ مجموعه‌ی احاطه‌گری از کاردینالیتی مینیمم است، بنابراین $\gamma(G) = 3$.




**شکل ۱-۲-۱ : گراف $G$ به همراه دو مجموعه احاطه‌گری $S_1$ و $S_2$**

# ۲- فصل دوم

# کدهای شناساگر

## ۲-۱- مقدمه

در این فصل ما به تعریف و مطالعه مفهوم کدهای شناساگر می‌پردازیم. در ادامه قضایای مربوط به کدهای شناساگر را بیان می‌کنیم. همچنین در این فصل کدشناساگر را برای خانواده‌هایی از گراف‌ها بررسی می‌کنیم و به بیان قضایای مربوط به هریک از این خانواده‌ها می‌پردازیم. گراف دور، گراف مسیر، گراف کامل، گراف ستاره و درخت، گراف‌هایی هستند که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند. مطالب به کار رفته در این فصل مطابق با مراجع [2]، [3]، [4]، [5]، [6] و [7] است.

## ۲-۲- کدهای شناساگر

**تعریف ۲-۲-۱**- مجموعه متناهی $X$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $\mathcal{S}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $X$ باشد و همچنین فرض کنید مجموعه‌ی معین $S \subseteq X$ عضوی از $\mathcal{S}$ باشد. برای $x \in X$، $\mathcal{S}$-مجموعه شناساگر یا $\mathcal{S}$-برچسب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{\mathcal{S}}(x) = \left\{S \in \mathcal{S} : \mathrm{x} \in \mathrm{S}\right\}$$

$\mathcal{S}$ را یک سیستم شناساگر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $L_{\mathcal{S}}(x)$ ها غیرتهی و دوبه‌دو مجزا باشند.

به سادگی می‌توان دید که اگر به ازای عضوی مانند $x$، برای هر $S \in \mathcal{S}$ ، $x$ در $S$ نباشد، آنگاه $x \notin X$. و همین‌طور اگر $x$ در چند $S$ وجود داشته باشد، آنگاه این $S$ ها مشابه‌اند و یک مکان را برای $x$ نشان می‌دهند.

یک گراف سیستم شناساگر دارد اگر و فقط اگر رئوس مجزا در گراف، همسایگی‌های بسته مجزا داشته باشند.گرافی که این خصوصیت را داراست جفت آزاد یا قابل شناسایی می‌گوییم.

**تعریف ۲-۲-۲**- فرض کنید $G$ یک گراف باشد. زیرمجموعه $\mathcal{C} \subseteq V(G)$ را یک کدشناساگر از $G$ گوییم، اگر به ازای هر $v \in V(G)$ ، داشته باشیم: $\mathcal{C} \cap N_G[v] \neq \emptyset$ و همچنین به ازای هر جفت رأس $u, v \in V(G), (u \neq v)$، داشته باشیم: $\mathcal{C} \cap N_G[u] \neq \mathcal{C} \cap N_G[v]$. عناصر $\mathcal{C}$ را کلمه‌کد می‌گوییم.

گوییم رئوس $x$ و $y$ یکدیگر را می‌پوشانند هرگاه داشته باشیم: $d(x, y) \leq 1$. گوییم مجموعه $X \subseteq V$ مجموعه $Y \subseteq V$ را می‌پوشاند اگر هر رأس $Y$ توسط حداقل یک رأس از $X$ پوشیده شده باشد. مجموعه‌ای از کلمه‌کدها که $v$ را می‌پوشاند با $K_{\mathcal{C}}(v)$ نمایش می‌دهیم و داریم: $K_{\mathcal{C}}(v) = \mathcal{C} \cap N_G[v]$. گوییم کد $\mathcal{C}$ رئوس $v_1$ و $v_2$ را مجزا یا جدا می‌کند اگر $K_{\mathcal{C}}(v_1) \neq K_{\mathcal{C}}(v_2)$.

اندازه مینیمم، در میان مجموعه‌های کدشناساگر (در صورت وجود) را عدد شناساگری می‌گوییم و با $i(G)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین کدشناساگر از اندازه $i(G)$، مجموعه شناساگری مینیمم است.

در لم زیر شرط لازم و کافی برای وجود یک کدشناساگر در گراف را بیان می‌کنیم؛

**لم ۲-۲-۳-** فرض کنید $G$ یک گراف باشد. کدشناساگر $\mathcal{C} \subseteq V(G)$ موجود است اگر و فقط اگر:

$$\forall v_1, v_2 \in V(v_1 \neq v_2): N_G[v_1] \neq N_G[v_2]$$

**اثبات.** اگر به ازای هر $v_1, v_2 \in V$ ، $N_G[v_1] \neq N_G[v_2]$ را داشته باشیم آنگاه $\mathcal{C} = V$ یک کدشناساگر برای گراف $G$ خواهد بود.

برای اثبات عکس، عکس نقیض را در نظر می‌گیریم. اگر به ازای هر $v_1, v_2 \in V$ ، $N_G[v_1] = N_G[v_2]$ را داشته باشیم آنگاه به ازای هر کد $\mathcal{C}$، داریم $\mathcal{C} \cap N_G[v_1] = \mathcal{C} \cap N_G[v_2]$، بنابراین هیچ کدی برای گراف $G$ وجود نخواهد داشت. ■

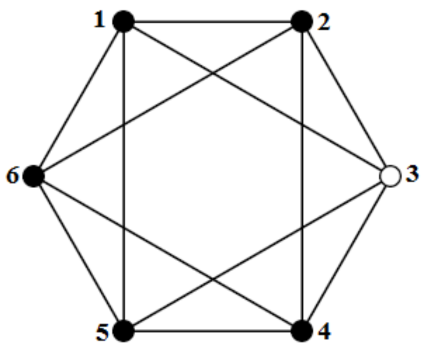
بنابراین به عنوان مثال، چون در گراف‌های کامل داریم:

$$\forall v_1, v_2 \in V(K_n): N_{K_n}[v_1] = N_{K_n}[v_2]$$

در نتیجه برای گراف‌های کامل کدشناساگر وجود ندارد.

در ادامه چندین مثال در این زمینه را بررسی خواهیم کرد.

**مثال ۲-۲-۳-۱-** گراف زیر را ببینید. کدشناساگر مینیمم در این گراف ۵ کلمه‌کد دارد.



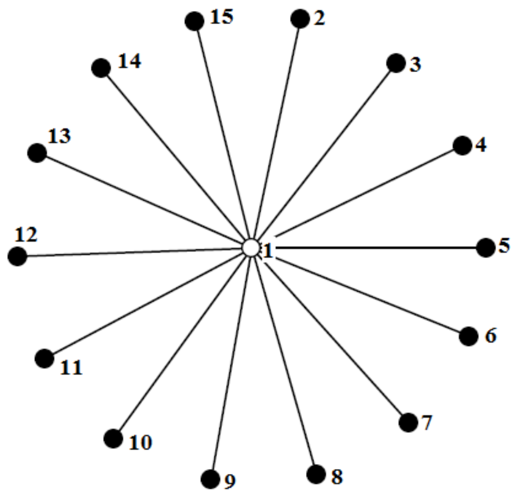

**شکل ۲-۲-۱ : گراف $G$ با ۵ کلمه‌کد**

$\mathcal{C} = \{1,2,4,5,6\}$

$\mathcal{C} \cap N_G[1] = \{1,2,5,6\}, \mathcal{C} \cap N_G[2] = \{1,2,4,6\}, \mathcal{C} \cap N_G[3] = \{1,2,4,5\}$

$\mathcal{C} \cap N_G[4] = \{2,4,5,6\}, \mathcal{C} \cap N_G[5] = \{1,4,5,6\}, \mathcal{C} \cap N_G[6] = \{1,2,4,5,6\}$

**مثال ۲-۲-۳-۲**- گراف زیر را ببینید. این گراف یک ستاره ۱۵ رأسـی اسـت. کدشناسـاگر مینـیمم در ایـن گراف ۱۴ کلمه‌کد دارد.




**شکل ۲-۲-۲ : ستاره ۱۵ رأسی با ۱۴ کلمه‌کد**

$\mathcal{C} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

$\mathcal{C} \cap N_G[1] = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\},$

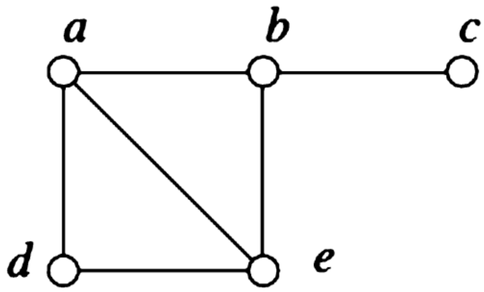
$\mathcal{C} \cap N_G[2] = \{2\}, \mathcal{C} \cap N_G[3] = \{3\}, \mathcal{C} \cap N_G[4] = \{4\}, \mathcal{C} \cap N_G[5] = \{5\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[6] = \{6\}, \mathcal{C} \cap N_G[7] = \{7\}, \mathcal{C} \cap N_G[8] = \{8\}, \mathcal{C} \cap N_G[9] = \{9\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[10] = \{10\}, \mathcal{C} \cap N_G[11] = \{11\}, \mathcal{C} \cap N_G[12] = \{12\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[13] = \{13\}, \mathcal{C} \cap N_G[14] = \{14\}, \mathcal{C} \cap N_G[15] = \{15\}$

**مثال ۲-۲-۳-۳**- گراف شکل زیر را ببینید.



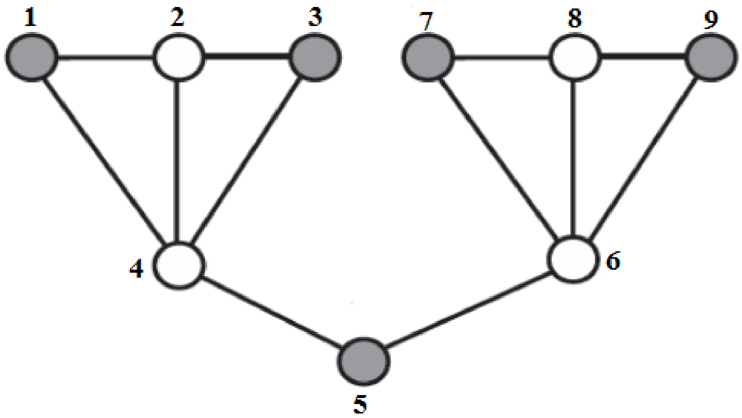

**شکل ۲-۲-۳ : گراف $G$ فاقد کدشناساگر**

$N[a] = \{a, b, d, e\}, N[b] = \{a, b, c, e\},$

$N[c] = \{b, c\}, N[d] = \{a, d, e\}, N[e] = \{a, b, d, e\}.$

از آنجایی‌که $N[a] = N[e]$، بنابراین بر اساس لم ۲-۲-۳- این گراف کدشناساگر ندارد.

**مثال۲-۲-۳-۴**- گراف زیر را ببینید. کدشناساگر مینیمم در این گراف ۵ کلمه‌کد دارد.




**شکل ۲-۲-۴ : گراف با کدشناساگر مینیمم از اندازه ۵**

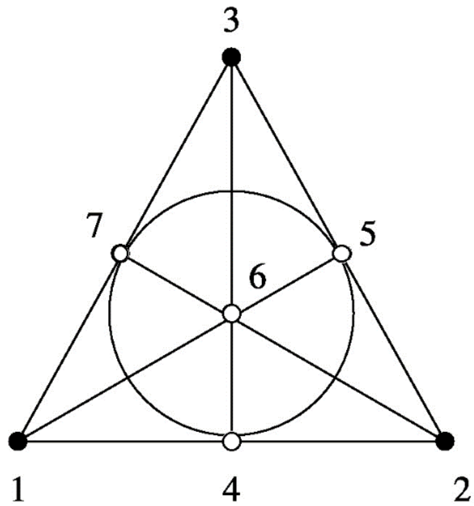
$\mathcal{C} = \{1,3,5,7,9\}$

$\mathcal{C} \cap N_G[1] = \{1\}, \mathcal{C} \cap N_G[2] = \{1,3\}, \mathcal{C} \cap N_G[3] = \{3\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[4] = \{1,3,5\}, \mathcal{C} \cap N_G[5] = \{5\}, \mathcal{C} \cap N_G[6] = \{5,7,9\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[7] = \{7\}, \mathcal{C} \cap N_G[8] = \{7,9\}, \mathcal{C} \cap N_G[9] = \{9\}.$

**مثال۲-۲-۳-۵**- گراف زیر را ببینید. کدشناساگر مینیمم در این گراف ۳ کلمه‌کد دارد.




**شکل ۲-۲-۵ : گراف با کدشناساگر مینیمم از اندازه ۳**

$\mathcal{C} = \{1,2,3\}$

$\mathcal{C} \cap N_G[1] = \{1\}, \mathcal{C} \cap N_G[2] = \{2\}, \mathcal{C} \cap N_G[3] = \{3\}, \mathcal{C} \cap N_G[4] = \{1,2\},$

$\mathcal{C} \cap N_G[5] = \{2,3\}, \mathcal{C} \cap N_G[6] = \{1,2,3\}, \mathcal{C} \cap N_G[7] = \{1,3\}$

## ۲-۳- قضایای کلی برای کدهای شناساگر

قضیه زیر بین $|V(G)|$ و عدد شناساگری رابطه‌ای تعریف می‌کند؛

**قضیه ۲-۳-۱-** فرض کنید $G$ یک گراف با کدشناساگر $\mathcal{C}$ باشد. آنگاه:

$$\left|\mathcal{C}\right| \geq \lceil log_2(|V(G)| + 1)\rceil$$

**اثبات.** با توجه به تعریف کدهای شناساگر، به هر رأس از گراف $G$ مجموعه‌ای یکتا از کلمه‌کدها نظیر می‌شود. بوضوح این مجموعه کلمه‌کدها، زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}$ است. از طرفی می‌دانیم هر مجموعه $n$ عضوی، بدون احتساب مجموعه تهی، $2^n - 1$ زیر مجموعه دارد. لذا

$$|V(G)| \leq 2^{|\mathcal{C}|} - 1$$

پس در نتیجه

$$\left|\mathcal{C}\right| \geq \lceil log_2(|V(G)| + 1)\rceil$$

و اثبات به پایان می‌رسد. ■

در گراف مسیر $P_n$، برای $n$ های فرد داریم:

$$\left|\mathcal{C}\right| = \lceil log_2(|V(P_n)| + 1)\rceil$$

قضیه زیر کران بالایی برای کدشناساگر مینیمم در یک گراف (در صورت وجود) معرفی می‌کند؛

**قضیه ۲-۳-۲-** فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد. اگر $\mathcal{C}$ کدشناساگر مینیمم از گراف همبند و غیرجهتدار $n$ رأسی $G$ باشد، آنگاه:

$$\left|\mathcal{C}\right| \leq n - 1$$

**اثبات.** فرض کنید $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. با توجه به لم ۲-۲-۳- داریم:

$$\forall v_1, v_2 \in V(v_1 \neq v_2): N_G[v_1] \neq N_G[v_2]$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{C}_1 = V(G)$. لذا یک کدشناساگر برای $G$ مجموعه $V(G)$ است. نشان می‌دهیم که اگر $x$ یک رأس دلخواه از $G$ باشد، آنگاه

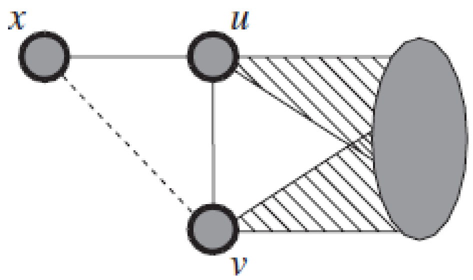
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \{x\}$$

نیز یک کدشناساگر برای $G$ است. برای این کار بررسی می‌کنیم که رئوس $N_G[x]$ از رئوس $V(G) - N_G[x]$ مجزاست. از آنجایی‌که گراف $G$ همبند است، رئوس $G$ توسط $\mathcal{C}$ پوشیده می‌شود. $\mathcal{C}_1$ یک کدشناساگر از $G$ است، لذا رئوس $N_G[x]$ را از یکدیگر جدا می‌کند، داریم:

$$\forall u, v \in N_G[x]: N_G[u] \neq N_G[v] \Longrightarrow N_G[u] - \{x\} \neq N_G[v] - \{x\}$$

لذا $\mathcal{C}$ رئوس $N_G[x]$ را از یکدیگر جدا می‌کند. به‌طور مشابه، $\mathcal{C}$ رئوس $V(G) - N_G[x]$ را نیز از یکدیگر جدا می‌کند. بنابراین تنها وضعیتی که ممکن است روی دهد حالتی است که $u \in N_G[x]$ و $v \notin N_G[x]$ موجود باشد که توسط $\mathcal{C}$ از یکدیگر مجزا نشوند. در این حالت داریم: (شکل ۲-۳-۱)

$$N_G[u] = N_G[v] \cup \{x\}$$




**شکل ۲-۳-۱ : رئوس $u$ و $v$ به‌طوری‌که $N_G[u] = N_G[v] \cup \{x\}$**

بنابراین به ازای هر رأس $w$ مجزا از $x$، $u$ و $v$ داریم:

$$uw \in E \Leftrightarrow vw \in E$$

به بیانی دیگر، به ازای هر $w_1, w_2 \neq u, v, w$، $u$ رئوس $w_1$ و $w_2$ را از یکدیگر جدا می‌کند اگر و فقط اگر $v$ رئوس $w_1$ و $w_2$ را از یکدیگر جدا کند.

حال فرض کنید $a$ رأسی از $G$ است که ماکزیمم درجه را دارد. اگر $V(G) - \{a\}$ یک کدشناساگر برای $G$ باشد که کار تمام است، در غیراین‌صورت دو رأس $b, b'$ موجود است که $N_G[b] = N_G[b'] \cup \{a\}$. ادعا می‌کنیم که $V(G) - \{b'\}$ یک کدشناساگر از $G$ است. بررسی می‌کنیم که هر رأس از $N_G[b']$ از هر رأس از $V(G) - N_G[b']$ مجزاست:

- $b$ هر رأس از $\{V(G) - N_G[b']\} - \{a\}$ را از هر رأس از $N_G[b']$ جدا می‌کند، زیرا $N_G[b] = N_G[b'] \cup \{a\}$.
- $a$ خودش را از $b'$ جدا می‌کند.
- $a$ هیچ رأسی چون $a' \in N_G[b'] - \{b'\}$ را جدا نمی‌کند: اگر رأس $a' \in N_G[b'] - \{b'\}$ موجود باشد که $N_G[a'] = N_G[a] \cup \{b'\}$، آنگاه درجه رأس $a'$ از درجه رأس $a$ بیشتر خواهد شد که این تناقض است.

بنابراین اثبات به پایان می‌رسد. در نتیجه $|\mathcal{C}| = n - 1$. ■

برای گراف‌های ستاره، $|\mathcal{C}| = n - 1$ است. در مرجع [4] گراف‌هایی که کدشناساگر مینیمم آنها از اندازه $n - 1$ است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.