دانشکده‌ی علوم

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی محض(جبر)

زیرمدول‌های اول

توسط

رباب کهنسال

استاد راهنما

دکتر عبدالرسول عزیزی

بهمن ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب رباب کهنسال(۸۷۰۸۶۲) دانشجوی رشته‌ی ریاضی گرایش جبر و توپولوژی دانشکده علوم اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام. همچنین اظهار می‌کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه‌ی حقوق این اثر مطابق با آیین نامه‌ی مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: رباب کهنسال

تاریخ و امضا: بهمن ماه ۱۳۸۹

به نام خدا

زیرمدول‌های اول

به وسیله‌ی:

رباب کهنسال

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض گرایش جبر و توپولوژی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته‌ی پایان نامه با درجه‌ی : عالی

دکتر عبدالرسول عزیزی، دانشیار بخش ریاضی(رئیس کمیته)........ عبدالرسول عزیزی

دکتر افشین امینی، استادیار بخش ریاضی ....

دکتر بابک امینی، استادیار بخش ریاضی..................

بهمن‌ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

"مادرم

تو را سپاس

تو را برای نادیده گرفتن این همه بی‌سپاسی من سپاس.

سپاسگزاری

بدینوسیله زحمات بی دریغ استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر عزیزی را ارج نهاده و از استادان ارجمند جناب آقای دکتر افشین امینی و جناب آقای دکتر بابک امینی به دلیل همکاری صمیمانه و پربار ایشان کمال تشکر و امتنان را دارم.

چکیده

زیرمدول‌های اول

به وسیله‌ی

رباب کهنسال

در این پایان نامه همه ی حلقه ها جابجایی و یکدار و همه‌ی مدول ها، یکانی می‌باشند.

در فصل اول، به بررسی مفاهیم و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

در فصل دوم، بعضی از خواص زیرمدول‌های اول مجزا شده از مدول‌ها را می‌یابیم و قضایایی در مورد بعد مدول‌ها ثابت می‌کنیم.

فصل سوم، به بررسی مدول‌ها و حلقه‌هایی می‌پردازد که در فرمول رادیکال صدق می‌کنند.

در فصل چهارم، به مطالعه‌ی ارتباط بین اول‌های وابسته‌ی M ($Att(M)$) و زیرمدول‌های اول از R-مدول M می‌پردازیم و بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی یک مدول نمایش‌پذیر در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

درفصل پنجم، نشان داده می‌شود که برای هر زیرمدول B از هر R-مدول M، روابط شمول زیر برقرار است:

$$(rad\ R)M \subseteq \sqrt{(B:M)}M \subseteq RE_M(B) \subseteq rad_M(B). \qquad (*)$$

همچنین به این سوال که تحت چه شرایطی در (*) تساوی اتفاق می‌افتد، پاسخ می‌دهیم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست علائم و نشانه‌ها

زیرمدول کوچکتر یا مساوی	$\leq$
زیرمدول سره	$\lneqq$
متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه‌ی سره	$\subsetneq$
زیرمجموعه نبودن	$\nsubseteq$
دو نقطه از زیرمدول B در M	$(B:M)$
پوچساز M در حلقه‌ی R	$Ann_R(M)$
پوش زیرمدول B در M	$E_M(B)$
زیرمدول تولید شده به وسیله‌ی $E_M(B)$	$RE_M(B)$
رادیکال زیرمدول B از مدول M	$Rad_M(B)$
رادیکال ایده‌آل I	$\sqrt{I}$
صفر مدول	0
صفر حلقه	∘
پایان اثبات	■
بعد حلقه‌ی R	$dim\, R$
موضعی‌سازی مدول M در ایده‌آل $\mathscr{M}$	$M_{\mathscr{M}}$
مجموع مستقیم داخلی	$\bigoplus$
مخالف است	$\neq$
هسته‌ی φ	$Ker\ \varphi$
یکریخت است با	$\cong$
مجموع	$\sum$
حلقه‌ی خارج قسمتی R بر S	$S^{-1}R$

فصل اول

مقدمه

مطالب این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۳] و [۴] می‌باشد.

در ابتدای این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می شوند با این وصف که دانستن مفاهیم حلقه و مدول مفروض است.

۱-۱- تعاریف و قضایای مقدماتی

در این پایان نامه همه ی حلقه ها جابجایی و یکدار و همه‌ی مدول ها، یکانی می‌باشند.

با فرض اینکه B یک R-زیرمدول M، مجموعه ی $\{r \in R : rM \subseteq B\}$ با $(B:M)$ نمایش داده می شود که همان $Ann(\frac{M}{B})$ است. همچنین $Ann(M) = (0:M)$.

تعریف ۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. زیرمدول محض N از M را اول می نامند هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$، چنانچه $rm \in N$، آنگاه $m \in M$ یا $r \in (N:M)$. در این حالت اگر $P = (N:M)$ آنگاه N را یک زیرمدول P-اول M می نامند.

اثبات لم زیر ساده است و از بیان آن خودداری می‌کنیم.

لم ۲.۱. هرگاه N یک زیرمدول اول از R–مدول M باشد، آنگاه $(N:M)$ یک ایده‌آل اول R است.

لم ۳.۱. فرض کنید M یک R–مدول ناصفر باشد. در این صورت زیرمدول محض N از M اول است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول K از M که $N \subsetneq K$ داشته باشیم $(N:K) = (N:M)$.

اثبات. ابتدا فرض کنید که N یک زیرمدول اول M باشد. هرگاه K یک زیرمدول دلخواه از M باشد به طوری که $N \subsetneq K$، آنگاه $\frac{K}{N}$ زیرمدول $\frac{M}{N}$ است و

$$(N:M) = Ann\left(\frac{M}{N}\right) \subseteq Ann\left(\frac{K}{N}\right) = (N:K) \ .$$

حال فرض کنید $r \in (N:K)$. چون $N \subsetneq K$، پس یک عنصر $x \in K$ وجود دارد به طوری که $x \notin N$. بنابراین $rx \in N$ و از اینکه N یک زیرمدول اول M است، لذا $r \in (N:M)$. در نتیجه $(N:K) \subseteq (N:M)$.

حال فرض کنید برای هر زیرمدول K از M که $N \subsetneq K$ داشته باشیم $(N:K) = (N:M)$. نشان می‌دهیم که N یک زیرمدول اول M است. اگر برای هر $r \in R$ و $x \in M\backslash N$ داشته باشیم $rx \in N$، آنگاه $N \subsetneq N + Rx \subseteq M$.

با توجه به فرض داریم $(N:(N+Rx)) = (N:M)$. چون $rx \in N$، لذا

$$r(N+Rx) = rN + Rrx \subseteq N \ .$$

بنابراین $r \in \big(N:(N+Rx)\big) = (N:M)$. ■

با توجه به مثال زیر هر مدول لزوما زیرمدول اول ندارد.

مثال ۴.۱. Z-مدول $Z(p^\infty)$ هیچ زیرمدول اولی ندارد.

اثبات. زیرمدول‌های $Z(p^\infty)$ به صورت $\langle \frac{1}{p^n} + Z \rangle$، جایی که n یک عدد طبیعی است. از اینکه برای ایده‌آل $p^{n+1}Z$ از حلقه‌ی Z، داریم $p^{n+1}Z\langle \frac{1}{p^{n+1}} + Z \rangle = 0 \subseteq \langle \frac{1}{p^n} + Z \rangle$ و $(p^{n+1}Z)Z(p^\infty) \neq 0$، چون $p^{n+1}Z\left(\frac{1}{p^{n+1}} + Z\right) = \frac{1}{p} + Z \neq 0$ و همچنین از آنجا که $\langle \frac{1}{p^{n+1}} + Z \rangle \nsubseteq \langle \frac{1}{p^n} + Z \rangle$، چون $\frac{1}{p^{n+1}} + Z \notin \langle \frac{1}{p^n} + Z \rangle$ ، لذا $Z(p^\infty)$ هیچ Z-زیرمدول اول ندارد. ■

تعریف ۵.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. زیرمدول محض Q از M را اولیه می‌نامند هرگاه برای هر $r \in R$ و $x \in Q$، چنانچه $rx \in Q$، آنگاه $x \in Q$ یا $r \in \sqrt{(Q:M)}$. در این حالت اگر $\sqrt{(Q:M)} = P$، آنگاه Q را یک زیرمدول P-اولیه ی M می‌نامند.

اثبات لم زیر نیز بدیهی است و از بیان آن صرف نظر می‌کنیم.

لم ۶.۱. هرگاه Q یک زیرمدول اولیه از R-مدول M باشد، آنگاه $\sqrt{(Q:M)}$ یک ایده‌آل اول R است.

تعریف ۷.۱. R-مدول غیر صفر M را ثانویه گویند، هرگاه برای هر $r \in R$، $rM = M$ یا عدد صحیح مثبت غیر صفر n موجود باشد به طوریکه $r^nM = 0$. در این حالت اگر $\sqrt{(0:M)} = P$، آنگاه M را یک مدول P-ثانویه می‌نامند.

لم ۸.۱. هرگاه M یک مدول P-ثانویه باشد، آنگاه $\sqrt{(0:M)} = P$ یک ایده آل اول R است.

اثبات. فرض کنید $r_1r_2 \in \sqrt{(0:M)}$ و $r_1 \notin \sqrt{(0:M)}$، برای هر $r_1, r_2 \in R$. در این صورت یک عدد صحیح مثبت غیر صفر n وجود دارد به طوری که $r_1^n r_2^n M = (r_1r_2)^n \in (0:M)$. پس $r_1^n r_2^n M = 0$. همچنین از اینکه $r_1 \notin \sqrt{(0:M)}$، لذا هیچ عدد صحیح مثبت غیر صفر k وجود ندارد به طوری که $r_1^k \in (0:M)$. از جمله برای n، $r_1^n \notin (0:M)$. از این رو $r_1^n M \neq 0$ و از آنجا که M ثانویه است، پس $r_1 M = M$. در نتیجه $r_1^n M = M$. پس

$$o = r_1^n r_2^n M = r_2^n r_1^n M = r_2^n M.$$

بنابراین $r_2 \in \sqrt{(0:M)}$. در نتیجه $\sqrt{(0:M)} = P$ یک ایده‌آل اول R است.

تعریف ۹.۱. فرض کنید R یک دامنه ی صحیح باشد. یک R-مدول M بخش‌پذیر نامیده می شود، هرگاه برای هر عنصر غیر صفر $r \in R$، داشته باشیم $M = rM$.

بدیهی است که هر R-مدول M بخش‌پذیر، یک مدول ثانویه است.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. مدول M را ضربی می‌نامند هرگاه هر زیرمدول آن به فرم IM باشد، جایی که I یک ایده آل R است. همچنین M ضربی ضعیف نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمدول اول آن به فرم IM باشد، جایی که I یک ایده‌آل R است. واضح است که هر R-مدول ضربی، ضربی ضعیف است. اما با توجه به مثال زیر عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱۱.۱. Z-مدول Q یک مدول ضربی ضعیف است اما ضربی نیست.

اثبات. فرض کنید که N یک زیرمدول اول غیر صفر Q باشد. پس $N \neq Q$. همچنین فرض کنید $x \in Q \backslash N$ و $o \neq y \in N$. در این صورت اعداد صحیح غیر صفر k,l,r,s وجود دارند به طوری که $x = \frac{k}{l}$ و $y = \frac{r}{s}$. بنابراین $rlx = rk = \left(\frac{r}{s}\right) sk = (sk)y \in N$. پس $rl \in (N:Q)$.

لذا $rlQ \subseteq N$. از طرفی Z-مدول Q بخش‌پذیر است، پس $rlQ = Q$. لذا $Q = N$ که این با زیرمدول محض بودن N در تناقض است. بنابراین زیرمدول صفر تنها زیرمدول اول Q می باشد و از آنجا که $M(0) = (0)$، لذا Z-مدول Q ضربی ضعیف است. از طرفی برای هر ایده‌آل I از Z، داریم که $IQ = Q$ و چون Z زیرمدول محض Q است، لذا $Z \neq Q$، از این رو برای هر ایده‌آل I از Z، $Z \neq IQ$. بنابراین Z-مدول Q ضربی نیست. ■

مثال ۱.۱۲. هر مدول دوری، ضربی است.

اثبات. فرض کنید M یک R-مدول دوری باشد. واضح است که $M \cong \frac{R}{I}$ که I ایده‌آلی از R است. حال چون هر ایده‌آل $\frac{R}{I}$ به صورت $\frac{J}{I}$ است که J ایده‌آلی از R است پس $\frac{J}{I} = J.\frac{R}{I}$ و در نتیجه M یک مدول ضربی است. ■

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید M یک R-مدول، P یک ایده‌آل اول حلقه‌ی R و $S_P = R\backslash P$ باشد. در این صورت زیرمدول $PM(S_P)$، اشباع PM نسبت به P، به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$PM(S_P) = \{x \in M : \exists s \in S_P\,, sx \in PM\}.$$

همچنین از آنجا که برای هر عنصر $x \in PM$، داریم که $1.x = x \in PM$ و چون $1 \in S_P$، پس $x \in PM(S_P)$. یعنی، $PM(S_P)$ یک زیرمدول M شامل PM است و

$$P \subseteq (PM : M) \subseteq (PM(S_P) : M)\,.$$

تعریف ۱.۱۴. زیرمدول P-اول N از R-مدول M را یک زیرمدول P-اول مجزا شده می‌نامند اگر و تنها اگر $N = PM(S_P)$.

یادآور می‌شویم که بعد کرول کلاسیک حلقه‌ی R که با $cl.k.dim\,R$ نمایش داده می‌شود نامتناهی است یا $cl.k.dim\,R = n$، جایی که n سوپریمم طول زنجیرهای اکیدا صعودی از ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R است. بعد کرول کلاسیک R-مدول M ($cl.k.dim\,M$)، بعد کرول کلاسیک حلقه‌ی $\frac{R}{Ann\,M}$ تعریف می‌شود. به عنوان مثال؛ بعد کرول کلاسیک حلقه‌ی اعداد صحیح Z برابر با یک است و بعد کرول کلاسیک Z-مدول Q برابر با بعد کرول کلاسیک حلقه‌ی $Z = \frac{Z}{(0)} = \frac{Z}{Ann\,Q}$ که برابر با یک است، می‌باشد.

تعریف ۱.۱۵. بعد مدول M که با $dim\,M$ نمایش داده می‌شود متناهی است و $dim\,M = n$،

جایی که n سوپریمم طول زنجیرهای اکیدا صعودی از زیرمدول‌های اول مجزا شده‌ی M می باشد و می‌گوییم $dim\,M = \infty$ است، اگر دارای یک زنجیر اکیدا صعودی از زیرمدول‌های اول مجزا شده با هر طول n باشد.

تعریف ۱.۱۶. فرض کنید M یک R-مدول باشد. مدول M را محتوا نامند هرگاه برای هر عنصر $x \in M$ داشته باشیم $x \in C(x)M$، جایی که $C(x) = \bigcap\{I : x \in IM,$ یک ایده‌آل از حلقه R است $I\}$.

تعریف ۱.۱۷. رادیکال زیرمدول B از R-مدول M با $rad_M(B)$ نمایش داده می‌شود و به صورت اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M که شامل B هستند تعریف می‌شود، در صورتی که M دارای زیرمدولی اول شامل B باشد. در غیر این صورت $rad_M(B) = M$ فرض می‌شود. همچنین $rad\,R$ به صورت اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول R تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید B یک زیرمدول از R-مدول M باشد. در این صورت پوش B در M که با $E_M(B)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\{rm : \exists n \in \mathrm{N}, r^n m \in N\text{،} \ r \in R \text{ و } m \in M \text{ جاییکه}\}.$$

همچنین زیرمدول تولید شده به وسیله‌ی $E_M(B)$ با $RE_M(B)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱.۱۹. فرض کنید M یک R-مدول و B یک زیرمدول M باشد. در این صورت

$$B \subseteq RE_M(B) \subseteq rad_M(B).$$

اثبات. به ازای هر $x \in B$، $1_R^1 . x = x \in B$. بنابراین $x \in E_M(B) \subseteq RE_M(B)$. لذا $B \subseteq RE_M(B)$. حال فرض کنید $x \in E_M(B)$ دلخواه باشد. در نتیجه عناصر $r \in R$، $m \in M$ و عدد صحیح مثبت غیر صفر n به طوری موجودند که $x = rm$ و $r^n m \in B$. هرگاه N یک زیرمدول اول دلخواه از M باشد به طوری که $B \subseteq N$، آنگاه $r^n m \in N$. اگر $m \in N$، آنگاه $x = rm \in N$ و اگر $m \notin N$، آنگاه $r^n \in (N:M)$. از طرفی طبق لم ۱.۲، $(N:M)$ یک ایده‌آل اول R است، لذا $r \in (N:M)$. پس $rM \subseteq N$. از این رو $x = rm \in rM \subseteq N$. بنابراین $x \in \bigcap_{B \subseteq N \leq_{\text{اول}} M} N = rad_M B$ یعنی، $E_M(B) \subseteq rad_M(B)$. در نتیجه

$$RE_M(B) = \langle E_M(B) \rangle \subseteq rad_M(B) \ .$$

■

تعریف ۱.۲۰. گوییم زیرمدول B از R-مدول M در فرمول رادیکال صدق می‌کند (یا B یک زیرمدول $McCasland$ است)، هرگاه $RE_M(B) = rad_M(B)$. همچنین اگر همه‌ی زیرمدول های R-مدول M در فرمول رادیکال صدق کنند، در این صورت گوییم مدول M در فرمول رادیکال صدق می‌کند (یا M یک مدول $McCasland$ است). اگر همه‌ی R-مدول‌ها در فرمول رادیکال صدق کنند، در این صورت گوییم حلقه‌ی R در فرمول رادیکال صدق می‌کند (یا R یک حلقه‌ی $McCasland$ است).

قضیه ۲۱.۱. فرض کنید M و M' دو R-مدول، $\varphi: M \to M'$ یک بروریختی R-مدولی و B یک زیرمدول M باشد به طوری که $Ker\varphi = K \subseteq B$. در این صورت یک تناظر یک به یک بین زیرمدول‌های محض M که شامل B هستند و زیرمدول‌های محض M' که شامل $\varphi(B)$ هستند وجود دارد. علاوه بر این برای هر زیرمدول B' از M' یک زیرمدول C از M موجود است به طوری که $K \subseteq C$ و $\varphi(C) = B'$.

اثبات. (۱.۱) از [۱۳]. ■

لم ۲۲.۱. فرض کنید M و M' دو R-مدول، $\varphi: M \to M'$ یک بروریختی R-مدولی و B یک زیرمدول M باشد. در این صورت $\varphi(rad_M(B)) \subseteq rad_{M'}(\varphi(B))$.

اثبات. فرض کنید $K = Ker\ \varphi$. در این صورت چون $B \subseteq B + K$، لذا به وضوح

$rad_M(B) \subseteq rad_M(B+K)$. از این رو $\varphi(rad_M(B)) \subseteq \varphi(rad_M(B+K))$. از طرفی از آنجا که $\varphi(K) = \varphi(Ker\ \varphi) = (0)$، لذا $\varphi(B+K) = \varphi(B) + \varphi(K) = \varphi(B)$. از این رو $rad_{M'}(\varphi(B+K)) = rad_{M'}(\varphi(B))$. حال از آنجا که $Ker\ \varphi = K \subseteq B + K$ و نگاشت φ، یک بروریختی است، لذا طبق قضیه‌ی ۲۱.۱، داریم که

$\varphi(rad_M(B+K)) = rad_{M'}\big(\varphi(B+K)\big) = rad_{M'}(\varphi(B))$. بنابراین

$$\varphi(rad_M(B)) \subseteq \varphi(rad_M(B+K)) = rad_{M'}\big(\varphi(B+K)\big) = rad_{M'}(\varphi(B)).$$

در نتیجه $\varphi(rad_M(B)) \subseteq rad_{M'}(\varphi(B))$. ■

لم ۲۳.۱. فرض کنید B_1 و B_2 زیرمدول‌های R-مدول M باشند به طوری که $B_1 \subseteq B_2$. در این صورت

(۱) $RE_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{RE_M(B_2)}{B_1}$.

(۲) $rad_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{rad_M(B_2)}{B_1}$.

اثبات. (۱) فرض کنید $r(m+B_1) \in RE_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$ یک عنصر دلخواه غیر صفر باشد، جایی‌که $m \in M$ و $r \in R$. لذا یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $r^n(m+B_1) \in \frac{B_2}{B_1}$. پس

$$r^n m + B_1 = r^n(m+B_1) \in \frac{B_2}{B_1} .$$

از این رو $r^n m + B_1 \in \frac{B_2}{B_1}$ و از اینکه $B_1 \subseteq B_2$، لذا $r^n m \in B_2$ و $r^n m \notin B_1$. در نتیجه $rm \notin B_1$. بنابراین طبق تعریف ۱.۱۸، $rm \in E_M(B_2)$ و $rm \notin B_1$. یعنی، $rm \in \frac{RE_M(B_2)}{B_1}$. پس $RE_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \subseteq \frac{RE_M(B_2)}{B_1}$. مشابه همین اثبات با عضوگیری ثابت می‌شود که $\frac{RE_M(B_2)}{B_1} \subseteq RE_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$. پس $RE_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{RE_M(B_2)}{B_1}$.

(۲) طبق تعریف ۱.۱۷، $rad_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$ به صورت اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول $\frac{M}{B_1}$ شامل $\frac{B_2}{B_1}$ است و هر زیرمدول اول $\frac{M}{B_1}$ به فرم $\frac{N}{B_1}$ است، جایی که N زیرمدول اول M شامل B_1 است. حال از اینکه $B_1 \subseteq B_2$ است لذا هر زیرمدول اول N از M که B_2 را در بر داشته باشد، B_1 را نیز شامل می‌شود. بنابراین اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M شامل B_2 یعنی، $rad_M(B_2)$، B_1 را در بر دارد. لذا $rad_{\frac{M}{B_1}}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{rad_M(B_2)}{B_1}$.

نتیجه ۱.۲۴. فرض کنید M یک R-مدول و B یک زیرمدول از M باشد. در این صورت

(۱) $RE_{\frac{M}{B}}(0) = \frac{RE_M(B)}{B}$.

(۲) $rad_{\frac{M}{B}}(0) = \frac{rad_M(B)}{B}$.

اثبات. (۱.۴) از [۱۶]. ■

قضیه ۲۵.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. همچنین B و K زیرمدول‌های M باشند به طوری که $M = B + K$ و $RE_K(B \cap K) = rad_K(B \cap K)$. در این صورت

$$RE_M(B) = rad_M(B).$$

اثبات. از اینکه $RE_K(B \cap K) = rad_K(B \cap K)$، لذا $\frac{RE_K(B\cap K)}{B\cap K} = \frac{rad_K(B\cap K)}{B\cap K}$.

در این صورت $RE_{\frac{K}{B\cap K}}(0) = \frac{RE_K(B\cap K)}{B\cap K} = \frac{rad_K(B\cap K)}{B\cap K} = rad_{\frac{K}{B\cap K}}(0)$.

بنابراین $RE_{\frac{K}{B\cap K}}(0) = rad_{\frac{K}{B\cap K}}(0)$. چون طبق قضیه‌ی سوم یکریختی $\frac{K}{B\cap K} \cong \frac{B+K}{B} = \frac{M}{B}$، لذا $RE_{\frac{M}{B}}(0) = rad_{\frac{M}{B}}(0)$. در نتیجه طبق نتیجه‌ی ۲۴.۱، $\frac{RE_M(B)}{B} = \frac{rad_M(B)}{B}$. لذا $RE_M(B) = rad_M(B)$.■

لم ۲۶.۱. هرگاه R-مدول M در فرمول رادیکال صدق کند، آنگاه هر تصویر همریخت M نیز در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

اثبات. (۱.۱) از [۱۶]. ■

تعریف ۲۷.۱. R-مدول ناصفر M را ساده می‌نامند، هرگاه هیچ زیرمدول غیر سره نداشته باشد.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌های ساده‌ی R-مدول M باشد. در این صورت اگر M مجموع مستقیم این خانواده باشد، آنگاه $M = \bigoplus_{\alpha\in I} T_\alpha$ را یک تجزیه‌ی نیم‌ساده از M می‌نامند. همچنین یک R-مدول M نیم‌ساده نامیده می‌شود در صورتی که دارای یک تجزیه‌ی نیم‌ساده باشد.