بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش جبر

توصیفی بر جبرهای گرنشتاین مجازی

استاد راهنما:

دکتر شکراله سالاریان

پژوهشگر:

فاطمه زارع زاده مهریزی

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مـادی مترتـب بـر نتـایج مطالعـات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیـق موضـوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم فاطمه زارع زاده

تحت عنوان:

زیر رسته های تیک و جبرهای گرنشتاین مجازی

در تاریخ ۹۰/۲/۲۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی........ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر شکرا.. سالاریان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد اسدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر عبدالناصر بهلکه	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

الهی!

کیست که مزه ی شیرینی دوستیت را چشیده باشد و غیر تو را به جای تو اختیار کند؟ و آن کیست که به مقام قرب تو انس یافته و لحظه ای از تو روی گردانیده باشد؟

خدایا!

نقصان و کسر من جبران نشود مگر به لطف و عنایت تو و غم زدگیم را بر طرف نکند جز رحمت و بدحالیم را نگشاید جز مهرت و وحشت و هراسم از بین نرود جز در پناه تو و سوز سینه‌ام را خنک نکند جز وصال تو.

پس اکنون من به در خانه ی کرمت ایستاده‌ام و برای نسیم نیکی تو منتظرم و به حلقه ی مطمئن و محکم تو درآویخته‌ام.

معبودا!

رحم کن بر بنده ی ذلیلت، که زبانی گنگ و عملی اندک دارد و منّت بنه بر او به بخشش فراوان خود و پناهش بده در زیر سایه ی بلندت ای کریم، ای بسیار زیبا و ای مهربان ترین مهربانان.

تشکّر و قدردانی

سپاس و ستایش پروردگار یکتا را که شوق آموختن را در قلبم نهاد و ذهن و اندیشه ام را به ابزاری مجهّز نمود تا جهان و نظم آن را بیشتر درک کنم. و باز هم سپاس آن یکتا را که چشمه سار زلال مهربانی و عشق را با حضور خانواده و دوستانم در کنارم، به من ارزانی داشت تا وجودشان حامی و امید بخشم باشد و زندگی ام را به نور حضور اساتیدی روشن کرد که راهنما و مشوّقم باشند و یاریم نمود تا در فضایی حضور یابم که برایم بهترین بود.

حال که به کمک همه ی آنانی که همواره پشتیبان و راهنمایم بودند قدم کوچکی در راهی طولانی برداشته ام، بر خود لازم می دانم از تمام کسانی که مرا در این مسیر یاری نمودند تقدیر و تشکّر کنم.

ابتدا از دو اقیانوس بی کران محبّت، عزیزترین و گرانبهاترین هدیه های آسمانی، **پدر و مادر عزیزم** که حضور گرمشان آرامش زندگیم، وجودشان امید زیستنم، نگاهشان و بودنشان امید خاطرم است کمال سپاس و قدردانی را دارم. و از **همسر مهربانم** که در تمامی این مسیر و نیز در مشقت های راه زندگی پشتیبان و امید بخش من بوده است صمیمانه سپاسگذاری می کنم.

از استاد راهنمای بزرگوارم، **جناب آقای دکتر شکرالله سالاریان** که در طول تحصیلم در این مقطع و این رساله همواره راهنمایم بودند و فراتر از یک استاد راهنما با نهایت صبر و شکیبایی من را از راهنمایی های بی دریغ خود بهره مند ساختند، صادقانه نهایت تشکّر را دارم و برایشان سلامتی، بهروزی و توفیق روزافزون را آرزومندم.

هم چنین از، **جناب آقای دکتر جواد اسدالهی** که در طول دوره ی کارشناسی ارشد از محضرشان کسب فیض نموده ام و همواره با گشاده رویی مشوّق من بوده اند و زحمت داوری این پایان نامه را نیز بر عهده داشته اند نهایت تشکّر و قدردانی را می نمایم.

از **جناب آقای دکتر عبدالناصر بهلگه** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، سپاس گذارم.

در پایان از کمک های صادقانه ی دوستان عزیزم سرکار خانم دکتر راضیه واحد و مرجان شفیعی فرد سپاس گذاری می نمایم و از برادر و خواهران عزیز و مهربانم که همیشه دوست، مشوّق، یار و همراه دلسوز من در رسیدن به اهدافم هستند، تشکّر فراوان دارم.

فاطمه زارع زاده

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

ساحت مقدس ولیّ عصر حضرت

حجّة ابن الحسن العسکری عجّل الله تعالی فرجه

و تمام آنانی که از جان خویش گذشتند تا دین الهی، معنویت و دینداری پایمال نگردد.

چکیده

فرض کنید R- جبر آرتینی Λ چنان باشد که، برای هر Λ- مدول X، اگر تابعگون $Ext_{\Lambda}^{i}(X,-)$ برای هر $i > 0$ روی همه‌ی Λ- مدول‌های تزریقی گرنشتاین صفر شود، آن‌گاه تابعگون $Ext_{\Lambda}^{i}(-,X)$ برای هر $i > 0$ روی همه‌ی Λ- مدول‌های تصویری گرنشتاین صفر شود و برعکس. دراین‌صورت Λ را جبر گرنشتاین مجازی نامیم.

فرض کنید Λ جبر آرتین و mod_{Λ} رسته‌ی Λ- مدول‌های راست با تولید متناهی باشد. دراین‌صورت زیررسته‌ی $\mathcal{X}$ از mod_{Λ} به طور ناهمورد متناهی است، اگر هر Λ- مدول با تولید متناهی مانند M، $\mathcal{X}$- تقریب راست داشته باشد؛ یعنی، $X \in \mathcal{X}$ و ریخت $\varphi: X \longrightarrow M$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $X' \in \mathcal{X}$، نگاشت القایی $Hom_{\Lambda}(X',X) \longrightarrow Hom_{\Lambda}(X',M)$ پوشا باشد؛ به‌عبارت دیگر، هر Λ- مدول با تولید متناهی مانند M، $\mathcal{X}$-پیش‌پوشش داشته باشد.

در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم اگر Λ جبر گرنشتاین مجازی باشد، آن‌گاه زیررسته‌ی $mod_{\Lambda} \cap {}^{\perp}(GInj\Lambda)$ از mod_{Λ} به طور ناهمورد متناهی است.

واژه های کلیدی: جبر آرتین، مدول تزریقی گرنشتاین، مدول تصویری گرنشتاین، جبر گرنشتاین مجازی، زیررسته‌ی به طور ناهمورد متناهی، تقریب راست، پیش‌پوشش.

فهرست مطالب

فهرست نمادها **پ**

مقدمه **ج**

۱ مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها **۱**
۱.۱ مفاهیم اولیه ۱
۲.۱ رسته و تابعگون ۵

۲ مطالبی از جبر جابه‌جایی و همولوژی **۲۰**
۱.۲ جبر جابه‌جایی ۲۰
۲.۲ جبرهمولوژیک ۲۲
۱.۲.۲ جبر همولوژیک گرنشتاین ۳۶
۳.۲ نظریه‌ی هم‌تاب، پوش و پوشش ۴۳

۳ مطالعه رسته‌ی هموتوپی مدول‌های تزریقی **۵۰**
۱.۳ رسته‌ی هموتوپی ۵۰
۲.۳ $\mathrm{K}(\mathrm{Inj}\, R)$ به طور فشرده تولید شده است. ۶۱

۴ رسته‌ی پایا **۷۰**
۱.۴ رسته‌ی پایا ۷۰

۵ توصیفی برای جبرهای گرنشتاین مجازی **۷۸**
۱.۵ جبر آرتینی ۷۸
۲.۵ جبر گرنشتاین مجازی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۹۳**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۰

مراجع ۱۰۷

فهرست نمادها

مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\mathbb{Z}$
مجموعه‌ی اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموع مستقیم M و N	$M \oplus N$
مجموع مستقیم M_iها	$\oplus M_i$
حاصل‌ضرب مستقیم M_iها	ΠM_i
حاصل‌ضرب تانسوری $\mathbb{Z}$-مدول‌های M و N	$M \otimes N$
حاصل‌ضرب دو شیء M و N	$M \prod N$
هم‌حاصل‌ضرب دو شیء M و N	$M \coprod N$
هسته	$\ker$
هم‌هسته	coker
تصویر	im
هم‌تصویر	coim
مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R	$\operatorname{Spec}(R)$
ارتفاع ایده‌آل اول P	$\operatorname{ht}_R(P)$
دامنه‌ی ایده‌آل اصلی	PID
بُعد حلقه‌ی R	$\dim R$
بُعد کلی تصویری چپ حلقه‌ی R	$l_p\,\mathrm{D(R)}$
بُعد کلی تزریقی چپ حلقه‌ی R	$l_i\,\mathrm{D(R)}$
بُعد کلی چپ حلقه‌ی R	$l\,\mathrm{D(R)}$
مدول n-دورها برای هم‌بافت $\mathbf{X_\bullet}$	$Z_n(\mathbf{X_\bullet})$
مدول n-مرزها برای هم‌بافت $\mathbf{X_\bullet}$	$B_n(\mathbf{X_\bullet})$
هم‌بافت هم‌ریختی $\mathbf{X_\bullet}$ و $\mathbf{Y_\bullet}$	$\operatorname{Hom}_R(\mathbf{X_\bullet}, \mathbf{Y_\bullet})$
n-امین مدول همولوژی از هم‌بافت $\mathbf{X_\bullet}$	$H^n(\mathbf{X_\bullet})$

$\Omega_n^{\mathbf{X}_\bullet}$	n-امین مدول مرابطه از هم‌بافت $\mathbf{X}_\bullet$
$\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$	n-امین گروه همولوژی مدول‌های M و N
$con(\mathbf{f}_\bullet)$	نگاشت مخروطی برای نگاشت زنجیری $\mathbf{f}_\bullet$
$\mathbf{f}_\bullet \simeq \mathbf{g}_\bullet$	نگاشت زنجیری $\mathbf{f}_\bullet$ با $\mathbf{g}_\bullet$ هموتوپ است.
$\mathrm{E}(M)$	پوش تزریقی R-مدول M
$\mathrm{id}_R(M)$	بُعد تزریقی R-مدول M
$\mathrm{pd}_R(M)$	بُعد تصویری R-مدول M
$l(M)$	طول شیء M
$Ob(\mathcal{C})$	کلاسی از اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$	مجموعه‌ی ریخت‌ها از M به N در رسته‌ی $\mathcal{C}$
$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$	مجموعه‌ی درون‌ریختی A در رسته‌ی $\mathcal{C}$
$Sets$	رسته‌ی مجموعه‌ها
$Groups$	رسته‌ی گروه‌ها
Ab	رسته‌ی گروه‌های آبلی
$\mathrm{Ch}(R)$	رسته‌ی هم‌بافت‌ها
${}_R\mathrm{Mod}$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ
Mod_R	رسته‌ی R-مدول‌های راست
${}_R\mathrm{mod}$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ با تولید متناهی
mod_R	رسته‌ی R-مدول‌های راست با تولید متناهی
$\mathrm{mod}_{R^{op}}$	رسته‌ی R^{op}-مدول‌های راست با تولید متناهی
$\mathrm{Inj}\,R$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ تزریقی
$\mathrm{Proj}\,R$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ تصویری
$\mathrm{GInj}\,R$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ تزریقی گرنشتاین
$\mathrm{GProj}\,R$	رسته‌ی R-مدول‌های چپ تصویری گرنشتاین
$\mathrm{K}(R)$	رسته‌ی هموتوپی R-مدول‌های چپ
$\mathrm{K}(\mathrm{Inj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی R-مدول‌های چپ تزریقی
$\mathrm{K}(\mathrm{Proj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی R-مدول‌های چپ تصویری
$\mathrm{K}_{\mathrm{tac}}(\mathrm{Inj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی هم‌بافت‌های کاملاً دقیق از R-مدول‌های چپ تزریقی
$\mathrm{K}_{\mathrm{tac}}(\mathrm{Proj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی هم‌بافت‌های کاملاً دقیق از R-مدول‌های چپ تصویری
$\mathrm{K}_{\mathrm{tac}}(\mathrm{inj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی هم‌بافت‌های کاملاً دقیق از R-مدول‌های چپ تزریقی با تولید متناهی
$\mathrm{K}_{\mathrm{tac}}(\mathrm{proj}\,R)$	رسته‌ی هموتوپی هم‌بافت‌های کاملاً دقیق از R-مدول‌های چپ تصویری با تولید متناهی

رسته‌ی هموتوپی از R-مدول‌های چپ تزریقی فشرده	$\mathrm{K}^c(\mathrm{Inj}\, R)$
رسته‌ی پایای R-مدول‌های چپ به پیمانه‌ی مدول‌های تزریقی	${}_R\overline{\mathrm{Mod}}$
رسته‌ی پایای R-مدول‌های چپ به پیمانه‌ی مدول‌های تصویری	${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$
رسته‌ی پایای R-مدول‌های چپ گرنشتاین تزریقی به پیمانه‌ی مدول‌های تزریقی	$\overline{\mathrm{GInj}}\, R$
رسته‌ی پایای R-مدول‌های چپ گرنشتاین تصویری به پیمانه‌ی مدول‌های تصویری	$\underline{\mathrm{GProj}}\, R$
R-جبر آرتین	Λ
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست	Mod_Λ
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست با تولید متناهی	mod_Λ
رسته‌ی Λ^{op}-مدول‌های راست با تولید متناهی	$\mathrm{mod}_{\Lambda^{op}}$
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست تزریقی با تولید متناهی	$\mathrm{inj}\Lambda$
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست تصویری با تولید متناهی	$\mathrm{proj}\Lambda$
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست گرنشتاین تزریقی	$\mathrm{GInj}\Lambda$
رسته‌ی Λ-مدول‌های راست گرنشتاین تصویری	$\mathrm{GProj}\Lambda$
رسته‌ی پایای Λ-مدول‌های راست به پیمانه‌ی Λ-مدول‌های تزریقی	$\overline{\mathrm{Mod}}_\Lambda$
رسته‌ی پایای Λ-مدول‌های راست به پیمانه‌ی Λ-مدول‌های تصویری	$\underline{\mathrm{Mod}}_\Lambda$
رسته‌ی پایای Λ-مدول‌های راست گرنشتاین تزریقی به پیمانه‌ی Λ-مدول‌های تزریقی	$\overline{\mathrm{GInj}}\, \Lambda$
رسته‌ی پایای Λ-مدول‌های راست گرنشتاین تصویری به پیمانه‌ی Λ-مدول‌های تصویری	$\underline{\mathrm{GProj}}\, \Lambda$
رسته‌ی Λ-مدول‌های چپ	${}_\Lambda\mathrm{Mod}$
رسته‌ی Λ-مدول‌های چپ با تولید متناهی	${}_\Lambda\mathrm{mod}$
رسته‌ی Λ^{op}-مدول‌های چپ با تولید متناهی	${}_{\Lambda^{op}}\mathrm{mod}$

مقدمه

مفهوم جبرهای گرنشتاین مجازی ابتدا در سال ۲۰۰۲، توسط بلیجیانیس[1] و ریتن[2] مورد مطالعه قرار گرفت [۸]. جبرهای گرنشتاین مجازی تعمیمی طبیعی از جبرهای گرنشتاین می‌باشند. در سال ۲۰۰۵ بلیجیانیس به مطالعه‌ی بیشتر جبرهای گرنشتاین مجازی و ارتباط آن‌ها با زوج‌های پیچشی کوهن‌مکالی می‌پردازد [۶]. پس از این در سال ۲۰۰۷ بلیجیانیس و کروزه[3]، ارتباط بین زیررسته‌های تیک و جبرهای گرنشتاین مجازی را مورد بررسی قرار دادند [۷].

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است.

فصل اول:

شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. منابع مورد استفاده در این فصل [۵]، [۱۵]، [۱۹]، [۲۵]، [۲۸] و [۳۳]، می‌باشند.

فصل دوم:

این فصل شامل مطالبی از جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی می‌باشد که در سه بخش تدوین گردیده است. بخش دوم شامل یک زیر بخش نیز می‌باشد، که در آن مطالبی را از جبر همولوژیک گرنشتاین بیان می‌کنیم. برای نوشتن این فصل از منابع [۱]، [۱۰]، [۱۳]، [۱۵]، [۱۷]، [۲۸] و [۳۱]، استفاده شده است.

فصل سوم:

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول به معرفی و مطالعه‌ی رسته‌ی هموتوپی R-مدول‌ها پرداخته و ثابت خواهیم کرد، هر هم‌بافت از پایین کراندار از R-مدول‌های تزریقی، یک تحلیل تزریقی است. در بخش دوم مفهوم شیء فشرده در رسته‌ی مثلثی و رسته‌ی به‌طور فشرده تولید شده را معرفی نموده و نشان می‌دهیم اگر حلقه‌ی R نوتری باشد، آن‌گاه رسته‌ی هموتوپی R-مدول‌های تزریقی، $\mathrm{K}(\mathrm{Inj}\ R)$ به طور فشرده تولید شده است. منبع مورد استفاده در این فصل، [۳۰] می‌باشد.

فصل چهارم:

[1] Beligiannis

[2] Reiten

[3] Krause

در این فصل به معرفی رسته‌ی پایا پرداخته و ثابت می‌کنیم رسته‌ی هموتوپی هم‌بافت‌های کاملاً دقیق از R-مدول‌های تزریقی، $\mathrm{K}_{\mathrm{tac}}(\mathrm{Inj}\, R)$ و رسته‌ی پایای R-مدول‌های تزریقی گرنشتاین به پیمانه‌ی مدول‌های تزریقی، $\overline{\mathrm{GInj}}\, R$ با هم هم‌ارزند. منبع مورد استفاده در این فصل، [۲۲] می‌باشد.

فصل پنجم:

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول به معرفی جبرهای آرتینی و برخی از خواص مهم آن‌ها می‌پردازیم. در بخش دوم جبرهای گرنشتاین مجازی و زیررسته‌ی به‌طور ناهمورد متناهی را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم اگر Λ جبر گرنشتاین مجازی باشد، آن‌گاه زیررسته‌ی $\mathrm{mod}_\Lambda \cap (\mathrm{GInj}\Lambda)^{\perp}$ از mod_Λ به طور ناهمورد متناهی است. در این فصل از منابع [۵]، [۶]، [۲۳] و [۳۲] استفاده شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند به طور گذرا بیان کرده و از اثبات قضایا صرف‌نظر می‌کنیم.
در این پایان‌نامه همواره حلقه‌ها را یکدار و شرکت‌پذیر در نظر گرفته و معمولاً نمادهای R و S را برای نمایش حلقه‌ها به کار می‌بریم و منظور از R-مدول، R-مدول یکانی چپ است مگر این‌که غیر از این بیان شود.

۱.۱ مفاهیم اولیه

گزاره ۱.۱.۱. *(لم پنج). فرض کنید نمودار*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"'] & A_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

یک نمودار جابه‌جایی از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها با سطرهای دقیق باشد. دراین‌صورت:

۱. *اگر h_5 تک‌ریختی باشد و h_2 و h_4 بروریختی باشند، آن‌گاه h_3 بروریختی است.*

۲. *اگر h_1 بروریختی باشد و h_2 و h_4 تک‌ریختی باشند، آن‌گاه h_3 تک‌ریختی است.*

۳. *اگر h_1، h_2، h_4 و h_5 یک‌ریختی باشند، آن‌گاه h_3 یک‌ریختی است.*

اثبات. به [۲۸، گزاره‌ی ۷۲.۲] رجوع کنید. □

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

دنباله‌ی متناهی یا نامتناهی از R-نگاشت‌ها و R-مدول‌ها باشد و برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$. دراین‌صورت این دنباله را *دقیق* نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید A و B و C، R-مدول‌هایی دلخواه باشند. دراین‌صورت دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

را *دنباله‌ی دقیق کوتاه* گوییم.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از R-مدول‌ها باشد. دراین‌صورت شرایط زیر با هم معادلند:*

۱. *R-هم‌ریختی $h : C \longrightarrow B$ موجود است به‌طوری‌که، $gh = 1_C$.*

۲. *R-هم‌ریختی $k : B \longrightarrow A$ موجود است به‌طوری‌که، $kf = 1_A$.*

۳. *$B \cong A \oplus C$.*

اثبات. به [۱۹، فصل چهارم، قضیه‌ی ۱۸.۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۵.۱.۱. دنباله‌ی دقیق کوتاهی را که در شرایط قضیه‌ی قبل صدق کند، *دنباله‌ی دقیق شکافته‌شدنی* گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید برای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از R-هم‌ریختی‌ها که سطر پایین آن دقیق باشد (یعنی، g برووریختی باشد)، R-هم‌ریختی مانند $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

را جابه‌جا کند (یعنی، $gh = f$). دراین‌صورت R-مدول P را *تصویری* نامیم.

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه باشد، دراین‌صورت:*

۱ . *هر R- مدول آزاد، تصویری است.*

۲ . *هر R- مدول مانند M ، تصویرهمریخت یک R- مدول تصویری است.*

اثبات. به [۱۹، فصل چهارم، قضیه‌ی ۲.۳ و نتیجه‌ی ۳.۳] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید برای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

از R-هم‌ریختی‌ها که سطر بالای آن دقیق باشد (یعنی، f تک‌ریختی باشد)، R-هم‌ریختی مانند $h : B \longrightarrow E$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

را جابه‌جا کند (یعنی، $hf = g$). دراین‌صورت R-مدول E را *تزریقی* نامیم.

قضیه ۹.۱.۱. *هر R- مدول مانند M ، در یک R- مدول تزریقی مانند E نشانده می‌شود.*

اثبات. به [۱۵، قضیه‌ی ۷.۱.۳] رجوع کنید. □

قضیه ۱۰.۱.۱. (محک بئر[۱]). *اگر E ، R- مدول چپ باشد و به ازای هر ایده‌آل چپ مثل I از R ، هر R- هم‌ریختی مثل $f : I \longrightarrow E$ را بتوان به R- هم‌ریختی‌ای از R به E توسعه داد (یعنی، بتوان R- هم‌ریختی‌ای مثل $g : R \longrightarrow E$ یافت که $g |_I = f$)، آن‌گاه E تزریقی است.*

اثبات. به [۳۳، فصل نهم، قضیه‌ی ۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید M زیرمدولی از M' باشد. در این‌صورت R-مدول M' را *توسیع R- مدول M* نامیم. حال فرض کنید M زیرمدول سره‌ی M' باشد. دراین‌صورت M' را *توسیع سره از M* نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید R-مدول تزریقی E، توسیع R-مدول M باشد. دراین‌صورت E را *توسیع تزریقی R- مدول* M نامیم.

[۱] Bear

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید N یک R-مدول راست باشد و برای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از R-مدول‌های چپ مانند

$$\circ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ی

$$\circ \longrightarrow N \otimes_R A \longrightarrow N \otimes_R B \longrightarrow N \otimes_R C \longrightarrow \circ$$

یک دنباله‌ی دقیق از گروه‌های آبلی باشد. دراین‌صورت R-مدول راست N را **یکدست** نامیم. R-مدول چپ یکدست به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید A یک R-مدول باشد. هم‌چنین فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ موجود باشند به‌طوری‌که دنباله‌ی $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow A \longrightarrow \circ$ دقیق باشد. دراین‌صورت R-مدول A را *با نمایش متناهی* گوییم.

گزاره ۱۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری چپ باشد. دراین‌صورت هر R-مدول چپ با تولید متناهی، با نمایش متناهی است.*

اثبات. به [۲۸، نتیجه‌ی ۱۹.۳] رجوع کنید. □

قضیه ۱۶.۱.۱. *R-مدول با نمایش متناهی M، یکدست است، اگروتنهااگر تصویری باشد.*

اثبات. به [۲۸، قضیه‌ی ۵۶.۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه، A، R-مدول راست، B، R-مدول چپ، G، گروه آبلی (جمعی) و $f : A \times B \longrightarrow G$ یک نگاشت باشد و برای هر $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ و $r \in R$ داشته باشیم:

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b),$$
$$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b'),$$
$$f(ar, b) = f(a, rb).$$

دراین‌صورت نگاشت f، R-*دوجمعی* نامیده می‌شود.
حال فرض کنید A, B, M، R-مدول باشند و R جابه‌جایی و نگاشت $f : A \times B \longrightarrow M$، R-دوجمعی باشد و داشته باشیم:

$$f(ar, b) = f(a, rb) = rf(a, b).$$

دراین‌صورت نگاشت f، R-*دوخطی* نامیده می‌شود.

۲.۱ رسته و تابعگون

تعریف ۱.۲.۱. یک رسته خانواده‌ای است مانند $\mathcal{C}$، متشکل از:

۱. کلاسی از اشیاء مانند A و B و ... که با نماد $Ob(\mathcal{C})$ نمایش داده می‌شود،

۲. برای هر زوج A و B از اشیاء $\mathcal{C}$، یک مجموعه نظیر شده که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود و در شرط مجزا بودن صدق می‌کند؛ یعنی، برای هر $A,B,C,D \in Ob(\mathcal{C})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset \qquad \text{اگروتنهااگر} \qquad (A,B) \neq (C,D)$$

اعضای این مجموعه را ریخت‌ها از A به B می‌نامیم و نماد $f : A \longrightarrow B$ یعنی، f ریختی از A به B است،

۳. برای هر سه شیء A، B و C از $\mathcal{C}$، قانون ترکیبی به صورت

$$\cdot : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$(f,g) \mapsto f \cdot g$$

موجود باشد به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) شرکت پذیری: برای هر $A,B,C,D \in Ob(\mathcal{C})$ اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$، داشته باشیم:

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f,$$

(ب) وجود عضو همانی: برای هر $A \in Ob(\mathcal{C})$ ریخت $۱_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$،

$$f۱_A = f \qquad , \qquad ۱_A g = g.$$

مثال ۲.۲.۱. رسته‌ی مجموعه‌ها $(Sets)$:
اشیاء در این رسته: کلاسی از همه مجموعه‌ها،
ریخت‌ها در این رسته: مجموعه‌ی همه‌ی توابع، که در شرط مجزا بودن صدق می‌کند،
قانون ترکیب ریخت‌ها: همان قانون ترکیب معمولی توابع، که شرایط ذکر شده در تعریف رسته برای آن برقرار است.