دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بعد کرول دو—مدول‌ها و بعد کرول زیرمدول‌های کوچک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

مریم ملاکریمی

استاد راهنما

دکتر محمود بهبودی

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر) خانم مریم ملاکریمی

تحت عنوان

بعد کرول دو—مدول‌ها و بعد کرول زیرمدول‌های کوچک

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۲۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱— استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمود بهبودی
۲— استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر حسین خبازیان
۳— استاد داور ۱	دکتر منصور معتمدی (دانشگاه شهید چمران اهواز)
۴— استاد داور ۲	دکتر احمد حقانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر اعظم اعتماد دهکردی

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه ابتدا بعد کرول دو$-$مدول‌ها مطالعه و بررسی شده است. بعد کرول دو$-$مدول ${}_SM_R$ با $\mathrm{K.dim}({}_SM_R)$ نشان داده می‌شود. به خصوص نتایجی از جبر تعویض‌پذیر تحت شرایطی به دو$-$مدول‌ها تعمیم داده شده است. مدول ناصفر M، $\alpha-$بحرانی (α عدد ترتیبی است) نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{K.dim}(M) = \alpha$ و به ازای هر زیرمدول ناصفر N ازM، $\mathrm{K.dim}(M/N) < \alpha$. نشان داده شده است اگر R یک حلقه‌ی FBN راست و S یک حلقه‌ی FBN چپ باشد و ${}_SM_R$ یک دو$-$مدول باشد به طوری که M_R و ${}_SM$ متناهی$-$تولید باشند آن‌گاه $R-$مدول $\alpha-$بحرانی اول M' موجود است که $\mathrm{K.dim}(M_R) = \mathrm{K.dim}(M'_R)$ که در آن M' تصویر همریخت $R-$مدول راست M است. در ادامه دو$-$مدول‌های آرتینی و همچنین مدول‌هایی که زیرمدول‌های کوچک آن دارای بعد کرول هستند بررسی شده‌اند. در پایان ارتباط بین بعد کرول و بعد کرول کلاسیک در مدول‌های ضربی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر بررسی شده است. به خصوص اگر R حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M مدول ضربی و دارای بعد کرول باشد آن‌گاه شرایط زیر برقرار است

(۱) M متناهی$-$تولید است.

(۲) M دارای تعداد متناهی زیرمدول اول مینیمال $P_1M, ..., P_nM$ می‌باشد ($P_1, ..., P_n$ ایدال‌های اول حلقه‌ی R هستند) به طوری که عدد صحیح $k \geq 1$ موجود است که $P_1^k, ..., P_n^kM = (0)$.

(۳) M دارای بعد کرول کلاسیک است و زیرمدول اول PM از M موجود است که

$$\mathrm{Cl.K.dim}(M) = \mathrm{K.dim}(M) = \mathrm{K.dim}(M/PM) = \mathrm{Cl.K.dim}(M/PM).$$

کد رده‌بندی: $16D80; 16P60; 16P20; 16P70$.

واژه‌های کلیدی: بعد کرول، بعد کرول کلاسیک، بعد پوک، بعد یکنواخت، مدول ضربی.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ تاریخچه و مروری بر فصل‌ها

این پایان‌نامه بر اساس مراجع [۴۰] و [۳۱] نوشته شده است. بعد کرول توسط کرول (با مفهوم طول بزرگترین زنجیر ایدال‌های اول) برای یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر نویتری مطرح شد (مرجع [۲۶] را ببینید). بعد کرول یک مدول برای اولین بار توسط رنچلر و گابریل در سال ۱۹۶۷ در [۳۷] برای یک عدد ترتیبی متناهی تعریف شده است. کراس در [۲۵] این تعریف را برای هر عدد ترتیبی دلخواه تعمیم داد. گردان و رابسن در سال ۱۹۷۳ در مرجع [۲۰] بعد کرول را به طور وسیع‌تری مورد بررسی قرار دادند. در فصل دوم پیش‌نیازهایی ارائه شده است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت، همچنین مدول‌های ضربی مطرح می‌شوند که برای اولین بار توسط اسمیت در سال ۱۹۶۹ در [۳۹] مطرح شد. در فصل سوم ابتدا بعد کرول مدول‌ها را یادآوری می‌کنیم. بعد کرول مدول ${}_RM$ (M_R) را در صورت وجود با $\mathrm{K.dim}({}_RM)$ ($\mathrm{K.dim}(M_R)$) نمایش می‌دهیم. همچنین بعد کرول چپ (راست) حلقه‌ی R را برابر بعد کرول ${}_RR$ (R_R) در نظر می‌گیریم. در ادامه قضایای مورد نیاز و مربوط به بعد کرول را می‌آوریم. گوییم دو—مدول ${}_SM_R$ دارای بعد کرول است هرگاه هم به عنوان S—مدول چپ و هم به عنوان R—مدول راست دارای بعد کرول باشد. در ادامه‌ی فصل سوم مشخص می‌کنیم تحت چه شرایطی یک دو—مدول دارای بعد کرول متقارن است. سپس با مفهوم مدول بحرانی آشنا می‌شویم که اولین بار توسط هارت در سال ۱۹۷۱ در مرجع [۲۲] تحت عنوان مدول‌های محدود مطرح شد. البته قبل از آن گابریل در سال

۱۹۶۲ در [۱۳] اشاره‌هایی به این مبحث داشته است. سپس گلدی در سال ۱۹۷۲ در [۱٦] این مدول‌ها را تحت عنوان مدول‌های بحرانی، مطرح نمود. کاربردهایی از مدول‌های بحرانی توسط رابسن و گردان در سال ۱۹۷۳ در مرجع [۲۰] روشن شد. بعد پوک متناهی به عنوان دوگان بعد گلدی در فصل چهارم معرفی می‌شود. دوگان بعد یکنواخت متناهی (بعد گلدی)، برای اولین بار توسط فلری در سال ۱۹۷۴ در [۱۲] تعریف شد و به دنبال آن فلری مفهوم مدول پوک را به عنوان دوگان مدول یکنواخت معرفی کرد. تاکِشی در سال ۱۹۷۵ در [۴۳] مفهوم خانواده‌ی هم$-$مستقل زیرمدول‌ها را به عنوان دوگان یک خانواده‌ی مستقل از زیرمدول‌ها تعریف کرد و به کمک مفهوم خانواده‌ی هم$-$مستقل زیرمدول‌ها توانست دوگان قضیه‌ی زیر را به دست آورد.

قضیه. $R-$مدول چپ M دارای بعد گلدی متناهی است اگر و تنها اگر M شامل هیچ مجموع مستقیم از تعداد نامتناهی زیرمدول ناصفر نباشد.

در سال ۱۹۷۹ وردراجان در [۴۴] و سپس در سال ۱۹۸۱ ریتر در [۳٦]، تعاریف دیگری از دوگان بعد گلدی را ارائه کردند. در سال ۱۹۸۴ گریزسوک و پوزیلوسکی در[۲۱] تمام دوگان‌های ارائه شده در طول این سال‌ها را با هم مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که تعاریف تاکِشی، وردراجان و ریتر با یکدیگر معادل هستند.

همان‌طور که در مطالعه‌ی مدول‌های دارای بعد یکنواخت متناهی، وجود متمم نقش مهمی دارد، پس در بررسی مدول‌های پوک، مفهوم مکمل به عنوان دوگان مفهوم متمم، نقش به سزایی دارد که در فصل چهارم به آن می‌پردازیم. در حقیقت در فصل چهارم ابتدا با خاصیت $\mathrm{AB}۵^*$ آشنا می‌شویم و خواهیم دید، هر خانواده‌ی کاملاً هم$-$مستقل، هم$-$مستقل است، اما عکس آن همیشه برقرار نیست، مگر با اضافه کردن شرط $\mathrm{AB}۵^*$. پوزیلوسکی در مرجع [۳۵] حدس زد $\mathrm{Rad}(M)$ دارای بعد کرول است اگر هر زیرمدول کوچک M دارای بعد کرول باشد، سپس ثابت کرد این حکم در صورتی برقرار است که مدول M دارای خاصیت $\mathrm{AB}۵^*$ باشد ($\mathrm{Rad}(M)$ برابر اشتراک زیر مدول‌های ماکسیمال M است). هربرا و شمسعودین در مرجع [۲۳] نشان دادند برای $R-$مدول M با خاصیت $\mathrm{AB}۵^*$ شرایط زیر معادل‌اند.

(۱) هر خارج قسمت M دارای بعد یکنواخت متناهی است.

(۲) هر زیرمدول M دارای بعد پوک متناهی است.

نتیجه‌ی فوق در پیدا کردن مدول‌هایی که دارای خاصیت $\mathrm{AB}۵^*$ نیستند نقش مهمی دارد. این نتیجه در اثبات بسیاری از قضایا، از جمله قضیه‌ی پوزیلوسکی که در بند قبل به آن اشاره شد، نیز کاربرد دارد. رنچلر و گابریل در [۳۷] بعد کرول کلاسیک متناهی حلقه‌ی R را که با $\mathrm{Cl.K.dim}(R)$ نمایش داده می‌شود، در صورت وجود به عنوان طول بزرگترین زنجیر از ایدال‌های اول R در نظر گرفتند. سپس این حدس را مطرح کردند که برای یک حلقه‌ی نویتری چپ $\mathrm{Cl.K.dim}(R) \leq \mathrm{K.dim}(R)$ و در حالتی که

حلقه، نویتری و تعویض‌پذیر باشد تساوی رخ می‌دهد. کراس در سال ۱۹۷۰، این حدس را برای یک حلقه‌ی نویتری چپ ثابت کرد و همچنین در سال ۱۹۷۲ در [۲۵] نشان داد، هرگاه R یک حلقه‌ی به طور کامل کراندار و دارای بعد کرول چپ باشد آن‌گاه $\mathrm{Cl.K.dim}(R) \leq \mathrm{K.dim}(R)$ و اگر R به طور کامل کراندار و نویتری چپ باشد آن‌گاه تساوی رخ می‌دهد. سرانجام گردان و رابسن در سال ۱۹۷۳ در [۲۰] به طور مستقل از کراس نشان دادند $\mathrm{Cl.K.dim}(R) = \mathrm{K.dim}(R)$ جایی که R یک حلقه‌ی به طور کامل کراندار و دارای بعد کرول چپ باشد. مفهوم بعد کرول کلاسیک یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، حدود ۳۵ سال پیش توسط آلبو معرفی شد و مقالاتی در این زمینه توسط کراس و تپلای منتشر شد. یکی از گزاره‌های معروف که توسط آلبو ارائه شده است به صورت زیر است

" مجموعه‌ی مرتب جزئی X دارای بعد کرول کلاسیک است اگر و تنها اگر X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی نویتری باشد (یعنی در شرط زنجیر افزایشی صدق کند)".

بعد کرول کلاسیک برای مدول (به عنوان طول بزرگترین زنجیر قوی از زیرمدول‌های اول) توسط بهبودی در مرجع [۴] تعریف شده است، علاوه بر این در همان مرجع بهبودی قضایای مربوط به بعد کرول کلاسیک یک حلقه را برای مدول گسترش داده است. بعد کرول کلاسیک مدول ${}_RM$ (M_R) در صورت وجود با $\mathrm{Cl.K.dim}({}_RM)$ ($\mathrm{Cl.K.dim}(M_R)$) نمایش داده می‌شود. در فصل پنجم نشان می‌دهیم، اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R−مدول ضربی و دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M متناهی−تولید است، همچنین M دارای تعداد متناهی زیرمدول اول مینیمال $P_1M, ..., P_nM$ می‌باشد ($P_1, ..., P_n$ ایدال‌های اول حلقه‌ی R هستند) به طوری که عدد صحیح $k \geq 1$ موجود است که $P_1^k, ..., P_n^kM = (0)$ و M دارای بعد کرول کلاسیک است و زیرمدول اول PM از M موجود است که

$$\mathrm{Cl.K.dim}(M) = \mathrm{K.dim}(M) = \mathrm{K.dim}(M/PM) = \mathrm{Cl.K.dim}(M/PM).$$

نتایج فصل آخر به عنوان یک مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه برای چاپ ارسال شده است (مرجع [٦] را ببینید).

فصل ۲

پیش نیازها

در این پایان‌نامه، R نشان دهنده‌ی یک حلقه‌ی یکدار و شرکت‌پذیر است منظور از یک مدول روی R یا یک $R-$مدول، $R-$مدول چپ و یکانی است مگر خلاف آن ذکر شود. برخی از مفاهیم مقدماتی حلقه‌ها و مدول‌ها در این پایان‌نامه دانسته فرض شده است. این فصل به بیان برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز اختصاص داده شده است. در بخش اول مقدماتی از نظریه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها بیان شده است. بخش دوم به یادآوری تعاریف ایدال اول، ایدال نیم‌اول، ایدال اولیه‌ی چپ، حلقه‌ی اول، حلقه‌ی نیم‌اول، حلقه‌ی اولیه، مدول اول، مدول نیم‌اول، رادیکال اول، عنصر پوچ توان و قویاً پوچ توان در یک مدول و رادیکال پوچ پایینی بئر مدول اختصاص دارد. در بخش سوم، علاوه بر معرفی بعد گلدی، برخی ویژگی‌های اولیه بعد گلدی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. با توجه به این‌که در فصل آخر پایان‌نامه مدول‌های ضربی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، در پایان این فصل، خواص مقدماتی یک مدول ضربی و بعضی قضایای مورد نیاز فصل آخر را بیان کرده‌ایم.

۲–۱ مباحث مقدماتی از نظریه‌ی حلقه و مدول

تعریف ۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکدار باشد. R–جبر (یا جبر روی R) M حلقه‌ای است که در شرایط زیر صدق می‌کند
(۱) $(M,+)$ یک R–مدول (چپ) یکانی باشد.
(۲) به ازای هر $r \in R$ و $a,b \in M$، $r(ab) = (ra)b = a(rb)$.

مثال ۲.۲ هر حلقه‌ی R، یک گروه آبلی جمعی در نتیجه یک $\mathbb{Z}$–مدول است. به آسانی دیده می‌شود که R یک $\mathbb{Z}$–جبر است.

مثال ۳.۲ فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار باشد. در این صورت حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x_1, ..., x_n]$ و حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$، R–جبر هستند (با ساختارهای R–مدولی که به طریق معمول به آن‌ها داده می‌شود).

تعریف ۴.۲ رسته، رده ایست مانند $\mathcal{C}$ از اشیائی که با $A, B, C, D, ...$ نمایش داده می‌شود (مجموعه‌ی این اشیاء را با $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ نشان می‌دهند) به طوری که
(۱) برای هر زوج مرتب (A,B) از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک مجموعه‌ی $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ از ریخت‌های از A به B وجود داشته باشد به طوری که برای $(A,B) \neq (A',B')$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$$

(۲) به ازای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک تابع

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

با ضابطه‌ی $(f,g) \longmapsto fg$ وجود دارد که در دو اصل زیر صدق می‌کند.
(i) شرکت پذیری : برای هر $A,B,C,D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ و $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$، $(fg)h = f(gh)$.
(ii) همانی : برای هر $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$، ریخت همانی $id_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ و $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $id_A f = f id_B = f$.
مثالی از یک رسته، رسته‌ی R–مدول‌های چپ است که با $R - \mathrm{Mod}$ نمایش می‌دهند. اشیاء این رسته، رده همه‌ی R–مدول‌های چپ یکانی است. ریخت‌ها در این رسته، همریختی‌های R–مدولی و ترکیب ریخت‌ها، ترکیب نگاشت‌هاست. بنابراین مجموعه‌ی ریخت‌های بین دو شی A,B در این رسته همان $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ است.

لم ۵.۲ **(قانون مدولی)** فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ و A،B و C زیرمدول‌هایی از M باشند که $A \leq C$. در این صورت

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap C.$$

اثبات. ساده است. ■

تعریف ۶.۲ فرض کنیم M و P دو $R-$مدول باشند. مدول M، **تصویری** نامیده می‌شود هرگاه برای هر نمودار زیر در رسته‌ی $R-$مدول‌های چپ، با سطر کامل

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow g & & \\ P & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & (0) \end{array}$$

یک $R-$همریختی $\widehat{f} : M \longrightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار بالا را جابه‌جا کند، یعنی $f \circ \widehat{f} = g$.

قضیه ۷.۲ هر $R-$مدول آزاد M تصویری است.

اثبات. [مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۲.۳]. ■

گزاره ۸.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ باشد. در این صورت M تصویری است اگر و تنها اگر با جمعوندی از یک $R-$مدول آزاد یکریخت باشد.

اثبات. [مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۴.۳]. ■

تعریف ۹.۲ فرض کنیم M و U دو $R-$مدول باشند. مدول M، **تزریقی** نامیده می‌شود هرگاه برای هر نمودار زیر در رسته‌ی $R-$مدول‌های چپ، با سطر کامل

$$\begin{array}{ccccc} (0) & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & U \\ & & \downarrow g & & \\ & & M & & \end{array}$$

یک $R-$همریختی $\widehat{f} : U \longrightarrow M$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار بالا را جابه‌جا کند، یعنی $\widehat{f} \circ f = g$.

قضیه ۱۰.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ و $N_1, N_2, ..., N_n$ زیرمدول‌هایی از آن باشند. در این صورت یک تکریختی R−مدولی مانند

$$\theta : M/(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) \longrightarrow M/N_1 \times M/N_2 \times ... \times M/N_n$$

وجود دارد. با اضافه کردن شرط $N_i + (N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_n) = M$ (به ازای هر $1 \leq i \leq n$)، θ یکریختی R−مدولی می‌شود.

اثبات. به راحتی اثبات می‌شود. ■

تعریف ۱۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه و M یک R−مدول چپ باشد.

(۱) **مدول** M **نویتری** نامیده می‌شود، هرگاه هر زنجیر افزایشی $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq ...$ از زیرمدول‌های M، بعد از یک تعداد متناهی مرحله متوقف شود، یعنی عددی چون k موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$. در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر افزایشی بر زیرمدول‌های چپ صدق می‌کند.

(۲) **مدول** M **آرتینی** نامیده می‌شود، هرگاه هر زنجیر کاهشی $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq ...$ از زیرمدول‌های M، بعد از یک تعداد متناهی مرحله متوقف شود، یعنی عددی چون k موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$. در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر کاهشی بر زیرمدول‌های چپ صدق می‌کند.

تعریف ۱۲.۲ حلقه‌ی R مفروض است.

(۱) **حلقه‌ی** R **نویتری چپ** نامیده می‌شود، هرگاه R به عنوان یک R−مدول چپ، نویتری باشد.

(۲) **حلقه‌ی** R **آرتینی چپ** نامیده می‌شود، هرگاه R به عنوان یک R−مدول چپ، آرتینی باشد.

مشابه با تعریف فوق حلقه‌ی نویتری راست و آرتینی راست نیز تعریف می‌شود. اگر R هم نویتری (آرتینی) راست و هم نویتری (آرتینی) چپ باشد، آن‌گاه R را یک **حلقه‌ی نویتری (آرتینی)** می‌نامند.

گزاره ۱۳.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) M نویتری است.

(۲) هر زیرمدول از M متناهی−تولید شده است.

(۳) هر مجموعه‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M یک عضو ماکسیمال دارد.

اثبات. [مرجع [۴۹] گزاره‌ی ۳.۴.۲]. ■

گزاره ۱۴.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ و $N \leq M$ زیرمدولی از M باشد. در این صورت
(۱) M نویتری است اگر و تنها اگر N و M/N نویتری باشند.
(۲) M آرتینی است اگر و تنها اگر N و M/N آرتینی باشند.

اثبات. [مرجع [۴۹] گزاره‌ی ۵.۴.۲]. ■

قضیه ۱۵.۲ فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار و F یک $R-$مدول چپ آزاد با پایه‌ی متناهی n عضوی باشد. در این صورت، یک یکریختی حلقه‌ای به صورت $\mathrm{End}(F) \overset{\phi}{\cong} M_n(R)$ موجود می‌باشد.

اثبات. [مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۴.۱]. ■

گزاره ۱۶.۲ $M_n(R)$ نویتری چپ (راست) است اگر و تنها اگر R نویتری چپ (راست) باشد.

اثبات. [مرجع [۳۴] گزاره‌ی ۱.۱.۲]. ■

گزاره ۱۷.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ و یک $S-$مدول راست باشد. در این صورت ماتریس زیر

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ \circ & S \end{pmatrix}$$

نویتری (آرتینی) چپ است اگر و تنها اگر دو حلقه‌ی R و S نویتری (آرتینی) چپ و M نیز به عنوان $R-$مدول چپ نویتری (آرتینی) باشد.

اثبات. [مرجع [۲۷] قضیه‌ی ۱.۲۲]. ■

تذکر ۱۸.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ و یک $S-$مدول راست باشد. در این صورت ماتریس زیر

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ \circ & S \end{pmatrix}$$

نویتری (آرتینی) راست است اگر و تنها اگر دو حلقه‌ی R و S نویتری (آرتینی) راست و M نیز به عنوان $S-$مدول راست نویتری (آرتینی) باشد.

تعریف ۱۹.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ باشد و $X \subseteq M$. در این صورت پوچساز X که با $\mathrm{Ann}_R(X)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{r \in R \quad : \quad rx = \circ \qquad \forall\, x \in X\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(X)$ یک ایدال چپ R است. به خصوص اگر X زیرمدول M باشد آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R(X)$ یک ایدال دو طرفه‌ی R است. مدول M **وفادار** نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{Ann}_R(M) = (۰)$. در صورتی که $X = \{m\}$ تک عضوی باشد $\mathrm{Ann}_R(X)$ را با $\mathrm{Ann}_R(m)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $c \in R$ باشد، $\mathrm{Ann}_l(c)$ ($\mathrm{Ann}_r(c)$) نشان دهنده‌ی پوچ ساز چپ (پوچ ساز راست) عضو c می‌باشد.

تعریف ۲۰.۲ R—مدول چپ M را **تماماً وفادار** می‌نامند هرگاه هر زیرمدول ناصفر M وفادار باشد.

تعریف ۲۱.۲ حلقه‌ی R مفروض است.
(۱) چند جمله‌ای $P(x_۱, ..., x_n)$ با متغیرهای تعویض‌ناپذیر $x_۱, ..., x_n$ و ضرایب در $\mathbb{Z}$ را یک **اتحاد چند جمله‌ای به روی حلقه‌ی** R گوییم، هرگاه برای هر $r_۱, ..., r_n \in R$ داشته باشیم

$$P(r_۱, ..., r_n) = ۰$$

(۲) حلقه‌ی R حلقه‌ی اتحاد چند جمله‌ای یا به اختصار PI—**حلقه** نامیده می‌شود، هرگاه یک اتحاد چند جمله‌ای با ضرایب پیشرو ۱ به روی حلقه‌ی R موجود باشد.
هر حلقه‌ی تعویض‌پذیر R یک PI—حلقه است، چون چندجمله‌ای $P(x,y) = xy - yx$ یک اتحاد چندجمله‌ای روی R است.

تعریف ۲۲.۲ مدول M **ساده** نامیده می‌شود هرگاه $M \neq (۰)$ و زیرمدول‌های آن تنها (۰) و خود M باشند.

مثال ۲۳.۲ فرض کنیم p عددی اول باشد. در این صورت گروه آبلی $\mathbb{Z}_p$ زیرگروه نابدیهی ندارد. وقتی $\mathbb{Z}_p$ را به عنوان $\mathbb{Z}$—مدول در نظر می‌گیریم، زیرمدول‌هایش دقیقاً همان زیرگروه‌های $\mathbb{Z}_p$، به عنوان گروه هستند. پس $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}$—مدول زیرمدول نابدیهی ندارد و در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}$—مدول ساده است.

تعریف ۲۴.۲ حلقه‌ی R ساده نامیده می‌شود هرگاه ایدال ناصفر و سره نداشته باشد.

تعریف ۲۵.۲ **ایدال** چپ I در حلقه‌ی R را **ماکسیمال** می‌نامند، هرگاه $I \neq R$ و به ازای هر ایدال چپ I که $I \subseteq J \subseteq R$، $J = I$ یا $J = R$. برای مثال ایدال $۳\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ ماکسیمال است ولی ایدال $۴\mathbb{Z}$ ماکسیمال نیست، زیرا $۴\mathbb{Z} \subsetneq ۲\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

تعریف ۲۶.۲ ایدال چپ I در حلقه‌ی R یک ایدال چپ مینیمال است اگر به ازای هر ایدال چپ J که $(۰) \subset J \subset I$، $J = I$ یا $J = (۰)$. ایدال چپ I در R ($RI \neq (۰)$) یک R—مدول چپ ساده است اگر و تنها اگر I یک ایدال چپ مینیمال باشد.

تعریف ۲۷.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ باشد.
(۱) زیرمدول N از M یک **زیرمدول ماکسیمال** نامیده می‌شود، هرگاه $N \neq M$ و برای هر زیرمدول K که $N \leq K \leq M$، $K = N$ یا $K = M$. یک مدول را موضعی می‌نامند هرگاه تنها یک زیرمدول ماکسیمال داشته باشد. به سادگی دیده می‌شود که: $N \lneq M$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر M/N ساده باشد.
(۲) زیرمدول N از M یک **زیرمدول مینیمال** نامیده می‌شود، هرگاه $N \neq (0)$ و برای هر زیرمدول K با $(0) \leq K \leq N$، $K = (0)$ یا $K = N$.

گزاره ۲۸.۲ هر مدول متناهی−تولید شده‌ی ناصفر دارای زیرمدول ماکسیمال است.

اثبات. [مرجع [۴۲] لم ۶.۸]. ■

تعریف ۲۹.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ باشد. اشتراک تمام زیرمدول‌های ماکسیمال M را، **رادیکال جیکوبسن** M می‌نامند و آن را با $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهند. اگر M هیچ زیرمدول ماکسیمالی نداشته باشد، آن‌گاه $\mathrm{Rad}(M) = M$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳۰.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ باشد.
(۱) **زیرمدول** N از M **اساسی** (**بزرگ**) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر K از M، $N \cap K \neq (0)$. به راحتی می‌توان دید که N اساسی است اگر و تنها اگر

$$\forall\ 0 \neq m \in M \quad \exists\ r \in R\ \ ;\ \ 0 \neq rm \in N.$$

در این حالت M یک **توسیع اساسی** N نامیده می‌شود و آن را با نماد $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم.
ایدال چپ E از R **اساسی** نامیده می‌شود، هرگاه به عنوان R−زیرمدول چپ در ${}_RR$ اساسی باشد.
(۲) **زیرمدول** N از M **کوچک** (**اضافی**) نامیده می‌شود، هرگاه برای تمام زیرمدول‌های سره‌ی K از M، $N + K \neq M$، به عبارت دیگر اگر برای هر زیرمدول K از M، $N + K = M$، آن‌گاه $K = M$.

گزاره ۳۱.۲ فرض کنیم M یک R−مدول چپ باشد. در این صورت

$$Rad(M) = \sum\{\ K < M \mid \text{است } M \text{ یک زیرمدول کوچک } K\ \}$$
$$= \bigcap\{\ L < M \mid \text{است } M \text{ یک زیرمدول ماکسیمال } L\ \}.$$

اثبات. [مرجع [۱] گزاره‌ی ۹.۱۳]. ■

تعریف ۳۲.۲ مدول M نیم‌ساده نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر زیرمدول M مثل K، زیرمدولی از M مثل P موجود باشد که $M = K \oplus P$. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. اما مدول (0) ساده نیست در حالی که نیم‌ساده است.

قضیه ۳۳.۲ فرض کنیم M، یک $R-$مدول ناصفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.

(۱) M مجموعی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.

(۲) M مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.

(۳) M نیم‌ساده است.

اثبات. [مرجع [۲۴] قضیه‌ی ٦.۳]. ■

تعریف ۳۴.۲ حلقه‌ی R نیم‌ساده چپ (راست) نامیده می‌شود هرگاه R به عنوان $R-$مدول چپ (راست) نیم‌ساده باشد.

مثال ۳۵.۲ هر حلقه‌ی بخشی نیم‌ساده است. به طور کلی‌تر حلقه‌ی $M_n(R)$ که در آن R یک حلقه‌ی بخشی است نیز نیم‌ساده می‌باشد.

تذکر ۳٦.۲ هر زیرمدول و مدول خارج قسمتی یک مدول نیم‌ساده، نیم‌ساده است.

قضیه ۳۷.۲ حلقه‌ی R مفروض است. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) هر $R-$مدول چپ نیم‌ساده است.

(۲) هر $R-$مدول متناهی $-$تولید شده نیم‌ساده است.

(۳) هر $R-$مدول چپ دوری نیم‌ساده است.

(۴) R به عنوان $R-$مدول چپ نیم‌ساده است.

اثبات. [مرجع [۲۷] قضیه‌ی ۲.۵]. ■

تعریف ۳۸.۲ **مدول نیم‌ساده‌ی** $_RM$ **همگن** نامیده می‌شود، هرگاه هر دو زیرمدول ساده‌ی $_RM$ یکریخت باشند.

مثال ۳۹.۲ هر فضای برداری روی حلقه‌ی تقسیم D، یک مدول نیم‌ساده‌ی همگن است چون هر زیرمدول ساده‌ی آن با D یکریخت است.

۲—۲ ایدال‌ها و زیرمدول‌های اول و نیم‌اول

تعریف ۴۰.۲ ایدال (چپ) سره‌ی P در حلقه‌ی R یک **ایدال اول (ایدال چپ اول)** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو ایدال (چپ) $A, B \subseteq R$، $AB \subseteq P$ نتیجه دهد $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

در حالت تعویض‌پذیر اول بودن ایدال P معادل است با این‌که، به ازای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ داشته باشیم $a \in P$ یا $b \in P$.

برای یک عضو $a \in R$، ایدال تولید شده توسط a در R را با (a) نشان می‌دهیم. در گزاره‌ی زیر چندین مشخصه از ایدال‌های اول ارائه شده است.

گزاره ۴۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایدال سره از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند.

(۱) P یک ایدال اول است.

(۲) برای $a, b \in R$، اگر $(a)(b) \subseteq P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

(۳) برای $a, b \in R$، اگر $aRb \subseteq P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

(۴) برای ایدال‌های چپ A و B در R، اگر $AB \subseteq P$ آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

(۵) برای ایدال‌های راست A و B در R، اگر $AB \subseteq P$ آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

اثبات. [مرجع [۲۷] گزاره‌ی ۱۰.۲]. ■

گزاره ۴۲.۲ هر ایدال اول از حلقه‌ی R شامل یک ایدال اول مینیمال است.

اثبات. [مرجع [۱۸] گزاره‌ی ۳.۳]. ■

تعریف ۴۳.۲ حلقه‌ی R اول نامیده می‌شود هرگاه $(\circ) \subseteq R$ اول باشد.

تعریف ۴۴.۲ **ایدال** I در حلقه‌ی R **نیم‌اول** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر ایدال J از R، $J^{2} \subseteq I$ نتیجه دهد $J \subseteq I$. برای مثال هر ایدال اول، نیم‌اول است.

در گزاره‌ی زیر چندین مشخصه از ایدال‌های نیم‌اول ارائه شده است.

گزاره ۴۵.۲ فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایدال از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) I یک ایدال نیم‌اول است.

(۲) برای هر $a \in R$، اگر $(a)^{2} \subseteq I$ آن‌گاه $a \in I$.

(۳) برای هر $a \in R$، اگر $aRa \subseteq I$ آن‌گاه $a \in I$.

(۴) برای هر ایدال چپ J در R، اگر $J^{2} \subseteq I$ آن‌گاه $J \subseteq I$.

(۵) برای هر ایدال راست J در R، اگر $J^{2} \subseteq I$ آن‌گاه $J \subseteq I$.

اثبات. [مرجع [۲۷] گزاره‌ی ۱۰.۹]. ■

تعریف ۴۶.۲ حلقه‌ی R **نیم‌اول** نامیده می‌شود هرگاه $(0) \subseteq R$ نیم‌اول باشد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که ایدال I از R اول (نیم‌اول) است اگر و تنها اگر R/I یک حلقه‌ی اول (نیم‌اول) باشد.

تعریف ۴۷.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد.

(۱) **حلقه‌ی** R را **اولیه** (چپ) می‌نامند، اگر یک $R-$مدول چپ وفادار ساده وجود داشته باشد. هر حلقه‌ی ساده‌ی یک‌دار، اولیه می‌باشد.

(۲) **ایدال** P از حلقه‌ی R را **اولیه‌ی چپ** (راست) می‌نامند، هرگاه حلقه‌ی خارج قسمتی R/P یک حلقه‌ی اولیه‌ی چپ (راست) باشد.

گزاره ۴۸.۲ ایدال P در حلقه‌ی R اولیه‌ی چپ است اگر و تنها اگر P پوچ ساز چپ یک $R-$مدول چپ ساده باشد.

اثبات. [مرجع [۲۴] لم ۷.۲]. ■

قضیه ۴۹.۲ شرایط زیر بر حلقه‌ی آرتینی چپ R با هم معادل‌اند.

(۱) R ساده است.

(۲) R اولیه است.

اثبات. [مرجع [۲۴] قضیه‌ی ۱۴.۱]. ■

تعریف ۵۰.۲ فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول چپ باشد. در این صورت **زیرمدول** سره‌ی P از M را **اول** می‌نامند، هرگاه برای هر $r \in R$ و $N \leq M$، اگر $rN \leq P$، آن‌گاه $N \leq P$ یا $rM \leq P$. $R-$**مدول** چپ M را **اول** می‌نامند، هرگاه $M \lneqq (0)$ یک زیرمدول اول باشد.

به سادگی دیده می‌شود که زیرمدول سره‌ی P از M اول است اگر و تنها اگر $(M/P) \lneqq (0)$ اول باشد.

گزاره ۵۱.۲ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در این صورت M یک مدول اول است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول ناصفر N از M، $\mathrm{Ann}_R(N) = \mathrm{Ann}_R(M)$.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $M \lneqq (\circ)$ یک زیرمدول اول باشد و $(\circ) \neq N \leq M$. به وضوح $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathrm{Ann}_R(N)$. اگر $\mathrm{Ann}_R(N) = (\circ)$ که در این صورت اثبات تمام است. بنابراین فرض می‌کنیم $\circ \neq r \in \mathrm{Ann}_R(N)$. از این رو $rN = (\circ)$ و چون $(\circ)$ یک زیرمدول اول است، پس $rM = (\circ)$. بنابراین $\mathrm{Ann}_R(N) \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. از این رو $\mathrm{Ann}_R(N) = \mathrm{Ann}_R(M)$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $r \in R$ و N زیرمدول ناصفری از M باشد به طوری که $rRN = (\circ)$. چون R حلقه‌ی یکدار است، پس $rN = (\circ)$ یعنی $r \in \mathrm{Ann}_R(N)$. از طرفی طبق فرض $\mathrm{Ann}_R(N) = \mathrm{Ann}_R(M)$. بنابراین $rM = (\circ)$. پس M یک مدول اول است. ■

گزاره ۵۲.۲ زیرمدول N از R—مدول M اول است اگر و تنها اگر $P = \mathrm{Ann}_R(M/N)$ ایدال اولی از حلقه‌ی R باشد و M/N R/P—مدول تماماً وفادار باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم N زیرمدول اولی از M باشد و A و B دو ایدال ناصفر حلقه‌ی R باشند که $AB \subseteq P$. فرض می‌کنیم $A \nsubseteq P$. M/N یک R—مدول اول است پس با توجه به گزاره‌ی ۵۱.۲ داریم $\mathrm{Ann}_R(MA/N) = \mathrm{Ann}_R(M/N)$. $MAB \subseteq N$ در نتیجه $B \subseteq P$ پس P یک ایدال اول حلقه‌ی R است. فرض کنیم $r \in R$ و K/N زیرمدول ناصفری از M/N باشد به طوری که $(r+P) \in \mathrm{Ann}_{R/P}(K/N)$ پس $rK \subseteq N$. N اول است و $K/N \neq (\circ)$ پس $rM \subseteq N$ بنابراین $r \in P$ پس M/N یک R/P—مدول تماماً وفادار است.

($\Rightarrow$) به راحتی قابل بررسی است. ■

تبصره ۵۳.۲ فرض کنیم R یک حلقه‌ی ساده باشد. در این صورت چون پوچ ساز هر R—مدول ناصفر، صفر است در نتیجه هر R—مدول ناصفر، اول است (یادآوری می‌کنیم حلقه‌ی R را ساده می‌نامند، هرگاه ایدال دو طرفه‌ای به غیر از $(\circ)$ و R نداشته باشد).

هر حلقه‌ی یکدار دارای ایدال (چپ) ماکسیمال و در نتیجه دارای ایدال (چپ) اول است. اما یک مدول لزوماً دارای زیرمدول ماکسیمال نیست. برای مثال $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$—مدول دارای زیرمدول ماکسیمال نیست اما به راحتی می‌توان دید صفر در $\mathbb{Q}$ اول است.

تعریف ۵۴.۲ R—مدول چپ M بدون اول نامیده می‌شود هرگاه دارای هیچ زیرمدول اولی نباشد.

گزاره ۵۵.۲ اگر R یک حوزه‌ی صحیح تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه هر R—مدول تاب‌دار و بخش‌پذیر بدون اول است.

اثبات. [مرجع [۵] نتیجه‌ی ۸ – ۱.۱]. ■