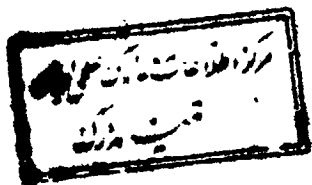


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي  
خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ  
وَالَّذِي يُضَوِّبُ الْمَوْتِ  
الَّذِينَ فِيهَا أُولَىٰ  
وَالَّذِينَ فِيهَا أُولَىٰ  
وَالَّذِينَ فِيهَا أُولَىٰ



۲۵ / ۱۰ / ۱۳۷۸



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

مدولهای ضربی و ددکیند

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

۱۴۶۲۸

مؤلف:

محمدعلی احسنت

تیر ۱۳۷۸

ب

۲۷۴۷۶

موضوع:

## مدولهای ضربی و ددکیند

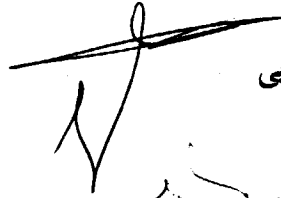
توسط:

محمدعلی احسنت

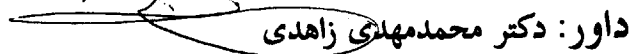
پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۷۸/۴/۲۶ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

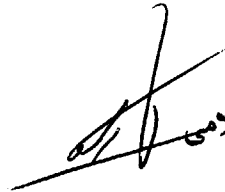
### اعضاء هیئت داوران:



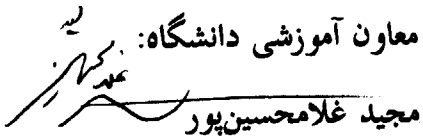
استاد راهنما: دکتر رضا نکویی



داور: دکتر محمدمهملدی زاهدی



استاد مشاور: دکتر اسفندیار اسلامی



معاون آموزشی دانشگاه:

مجید غلامحسین پور

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد:

دکتر اسفندیار اسلامی

رئیس دانشگاه:

دکتر محمدحسین متقی

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:

دکتر محمدحسین متقی

## سپاسگزاری

خداوند منان را سپاسگزارم که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود و به لطف و عنایت او توانستم قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و دانش را بچشم.

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بوده‌اند صمیمانه تشکر کنم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا نکویی که قبول زحمت نموده و راهنمایی این رساله را بعهدہ گرفته و با کمال صبر و متانت و گشاده‌روی پاسخگویی مشکلات اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمد مهدی زاهدی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را بعهدہ داشته‌اند و از راهنمائیهایشان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری می‌کنم.

از خانم باقری نیز که زحمت تایپ این پایان‌نامه را به عهده گرفتند سپاسگزاری می‌کنم.

در خاتمه از همسر مهربانم که با صبر و شکیبایی مرا در مراحل مختلف تحصیل همراهی کرده است کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

محمدعلی احسنت

تیرماه ۱۳۷۸

تقدیم به:

همسر مهربان

و

پدر و مادر فداکارم

## چکیده

در این رساله ابتدا مدولهای ضربی را روی حلقه جابجایی و یکدار  $R$  تعریف می‌کنیم و پس از شناخت مقدماتی مدولهای ضربی به بررسی آنها در حالت دوری یا با تولید متناهی می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم هر مدول ضربی آریتی، یک مدول دوری است و نشان می‌دهیم اگر حلقه  $R$  در شرط زنجیر صعودی روی ایده‌آل‌های نیم‌اول صدق کند آنگاه هر  $R$ -مدول ضربی، با تولید متناهی است.

در ادامه ایده‌آل‌ها و زیرمدولهای وارونپذیر را تعریف می‌کنیم و بعضی از خواص ایده‌آل‌های وارونپذیر یک حلقه را به زیرمدولهای وارونپذیر یک مدول تعمیم خواهیم داد. همچنین مدول ددکیند را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم یک  $R$ -مدول ضربی باوفا، ددکیند است اگر و تنها اگر  $R$  یک دامنه ددکیند باشد.

سپس ثابت می‌کنیم اگر  $R$  حلقه‌ای نیم‌اول باشد آنگاه حلقه  $R$ -درونریختی‌های یک  $D_1$ -مدول دوگانپذیر، یک دامنه صحیح جابجایی است.

در پایان با استفاده از مفهوم وارونپذیری در مدولها به شرایطی برای وجود یک تکریختی در  $Hom(A, B)$  دست می‌یابیم که در آن  $A$  و  $B$ ،  $R$ -مدول می‌باشند. همچنین با این فرض که  $A$  یک  $R$ -مدول ضربی باوفاست نشان می‌دهیم اگر  $A$  یک دامنه ددکیند باشد آنگاه  $A$  با یک ایده‌آل وارونپذیر در  $R$  یکرخت است.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه
۳	فصل اول : مدولهای ضریبی
۴	۱.۱ مدولهای ضریبی
۲۲	۲.۱ برخی خواص مدولهای ضریبی
۴۵	۳.۱ مدولهای با تولید متناهی
۶۲	فصل دوم : مدولهای ددکینند
۶۳	۱.۲ زیرمدولهای وارونپذیر
۷۳	۲.۲ حلقه درونریختی‌های بین $D_1$ -مدولها
۸۰	۳.۲ مدولهای ضریبی ددکینند
۸۷	۴.۲ نشانندن مدولها
۹۳	واژه‌نامه فارسی-انگلیسی
۹۵	مراجع

## مقدمه

این رساله برگرفته از مقالات، مدولهای ضربی [۲۱] و مدولهای ددکیند [۶] می‌باشد. لازم به ذکر است که در این نوشتار تمام حلقه‌ها جابجایی و یکدار (جز قسمتی از بخش ۳ فصل ۱) و تمام مدولها یکانی می‌باشند.

در فصل اول نشان می‌دهیم که اگر  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی و  $N$  زیرمدولی از  $M$  باشد آنگاه  $N = (N : M)M$ . سپس ثابت می‌کنیم یک  $R$ -مدول  $M$ ، ضربی است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل بیشین  $P$  از  $R$ ،  $M = T_P(M)$  یا  $M = P$  دوری باشد. از این قضیه نتایج بسیار مهمی در مدولهای ضربی حاصل می‌شود. بعنوان مثال اگر فرض کنیم  $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$  یک گردایه از  $R$ -مدولها باشد ثابت

می‌کنیم  $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر:

(۱) برای هر  $\lambda \in \Lambda$ ،  $M_\lambda$  یک مدول ضربی باشد.

(۲) برای هر  $\lambda \in \Lambda$ ، ایده‌آل  $A_\lambda$  از  $R$  موجود باشد بطوریکه  $A_\lambda M_\lambda = M_\lambda$  و  $A_\lambda \hat{M}_\lambda = 0$  که

$$\hat{M}_\lambda = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M_\mu.$$

همچنین ثابت می‌کنیم هرگاه  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی غیرصفر باشد، آنگاه:

(۱) هر زیرمدول سره از  $M$  در یک زیرمدول بیشین از  $M$  قرار دارد.

(۲)  $K$  یک زیرمدول بیشین از  $M$  است اگر و تنها اگر یک ایده‌آل بیشین  $P$  از  $R$  موجود باشد

بطوریکه  $K = PM \neq M$ . در ادامه ثابت می‌کنیم  $R$ -مدول ضربی  $M$  که تنها تعداد متناهی زیرمدول

بیشین داشته باشد یک مدول دوری است.

در این فصل همچنین زیرمدول اول یک مدول غیرصفر را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم زیرمدول سره

$N$  از  $R$ -مدول ضربی  $M$  اول است اگر و تنها اگر  $\text{ann}(\frac{M}{N})$  یک ایده‌آل اول از  $R$  بوده، اگر و تنها

اگر برای بعضی ایده‌آل اول  $P$  از  $R$ ،  $N = PM$  که  $\text{ann}(M) \subseteq P$ . سپس ثابت می‌کنیم  $R$ -مدول

ضربی باوفای  $M$ ، با تولید متناهی است اگر و تنها اگر  $M \neq PM$ ، برای تمام ایده‌آلهای اول کمین  $P$



از  $R$ . همچنین نشان می‌دهیم در حلقه  $R$  که در شرط  $ACC_{sp}$  صدق می‌کند هر  $R$ -مدول ضربی، با تولید متناهی است.

در فصل دوم مجموعه  $S$ ، شامل عضوهایی از حلقه  $R$  که مقسوم علیه صفر نیستند و حلقه کسرهای  $R_0$  از  $R$  را در نظر می‌گیریم. سپس ایده‌آل و مدول وارونپذیر را تعریف می‌کنیم. در صورتی که  $M$  یک  $R$ -مدول غیرصفر و  $N$  یک زیرمدول از  $M$  باشد، نشان می‌دهیم:

(۱) اگر  $N$  وارونپذیر باشد آنگاه

$$\forall m \in M, \exists t \in T, n \in N : tm = n$$

(۲) فرض کنید  $N$  یک زیرمدول دوری غیرصفر از  $M$  باشد،  $N = Rn$ . در این صورت  $N$  وارونپذیر است اگر و تنها اگر

$$\forall m \in M, \exists t \in T, r \in R : tm = rn$$

اس.اچ. کوکس ثابت کرد که حلقه  $R$ -درونریختی‌های یک مدول بدون تاب، یک دامنه صحیح جابجایی است.

در این فصل عادل.جی.نعوم و فیراس.اچ. الوان ثابت کرده‌اند که در حلقه نیم اول  $R$ ، حلقه  $R$ -درونریختی‌های یک  $D$ -مدول دوگان‌پذیر، یک دامنه صحیح جابجایی است. پس از تعریف دامنه و مدول ددکیند، ثابت می‌کنیم  $R$ -مدول ضربی باوفای  $M$ ، یک مدول ددکیند است اگر و تنها اگر  $R$  یک دامنه ددکیند باشد. همچنین ثابت می‌کنیم  $R$ -مدول ضربی باوفای  $M$ ، یک مدول پروفور است اگر و تنها اگر  $R$  یک دامنه پروفور باشد.

جی.ام.لو و پی.اف. اسمیت ثابت کردند، هر  $R$ -مدول ضربی بدون تاب  $M$  با یک ایده‌آل از  $R$  یکرخت است اگر و تنها اگر  $\alpha \in M^*$  موجود باشد بطوریکه  $ann(M) = ann(R\alpha)$ .

در این فصل جی.نعوم و فیراس.اچ. الوان ثابت کرده‌اند،  $R$ -مدول ضربی باوفای  $M$ ، اگر ددکیند باشد آنگاه با یک ایده‌آل وارونپذیر در  $R$  یکرخت است.

در پایان با استفاده از مفهوم وارونپذیری در مدولها به شرایطی برای وجود یک تکریختی در

$$H = Hom(A, B)$$

دست می‌یابیم، که در آن  $A$  و  $B$ ،  $R$ -مدول هستند.

# فصل ۱

## مدولهای ضربی

در این فصل تمام حلقه‌ها جابجایی یک‌دار (جز برای قسمت کوتاهی از بخش ۳) و تمام مدولها یکانی می‌باشند. هدف ما بررسی پاره‌ای از خواص مدولهای ضربی است، خصوصاً زمانی که دوری یا با تولید متناهی می‌باشند. بعنوان مثال  $M$  بعنوان یک  $R$ -مدول آرئینی، ضربی است اگر و تنها اگر دوری باشد. بعلاوه اگر  $R$  حلقه‌ای باشد که در شرط زنجیر صعودی روی ایده‌آل‌های نیم اول صدق کند. آنگاه هر  $R$ -مدول، ضربی با تولید متناهی است.

## ۱.۱ مدولهای ضربی

### تعریف ۱.۱.۱

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یک‌دار و  $M$  یک  $R$ -مدول یکانی باشد. آنگاه  $M$  یک مدول ضربی است هرگاه برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد بطوریکه  $N = IM$ . توجه کنید که تعریف ما با تعریف در [۱] و [۱۶] مطابقت دارد اما در [۱۸] لفظ مدول ضربی به روش دیگری تعریف شده است. به این ترتیب که یک  $R$ -مدول، ضربی می‌باشد اگر و تنها اگر هر زیرمدول از آن به معنی فوق ضربی باشد. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل  $A$  از حلقه  $R$ ، ایده‌آل ضربی است اگر برای هر ایده‌آل  $B$  از  $R$  که  $B \subseteq A$ ، یک ایده‌آل  $C$  از حلقه  $R$  موجود باشد بطوریکه  $B = AC$ .

### لم ۲.۱.۱

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی و  $N$  زیرمدولی از  $M$  می‌باشد، آنگاه  $N = (N : M)M$ . که  $(N : M) = \text{ann}\left(\frac{M}{N}\right)$ ، بطوریکه  $\text{ann}(X)$  نمایش پوچساز  $R$ -مدول  $X$  در  $R$  است. اثبات:

فرض کنید  $A = \text{ann}\left(\frac{M}{N}\right)$ . چون  $M$  یک مدول ضربی است پس ایده‌آل  $I$  از  $R$  وجود دارد

بطوریکه  $N = IM$ . زیرا با توجه به نگاشت

$$R \times \frac{M}{N} \rightarrow \frac{M}{N}$$

$$(r, m + N) \rightarrow r(m + N) = rm + N \quad (1)$$

$\frac{M}{N}$  یک  $R$ -مدول است. حال اگر

$$x \in I, N = IM \implies xM \subseteq N \implies xm \in N, \forall m \in M$$

$$\implies xM + N = N \stackrel{(1)}{\implies} x(m + N) = N, \forall m \in M$$

$$\implies x \in \text{ann}\left(\frac{M}{N}\right) \implies x \in A$$

پس  $I \subseteq A$ . لذا

$$N = IM \subseteq AM \implies N \subseteq AM$$

از طرف دیگر:

$$\forall r \in A \implies r \in \text{ann}\left(\frac{M}{N}\right) \implies r\left(\frac{M}{N}\right) = N$$

$$\implies rM \subseteq N, \forall r \in A \implies AM \subseteq N$$

بنابراین  $AM = N$  و در نتیجه

$$N = \left(\text{ann}\left(\frac{M}{N}\right)\right)M \quad \blacksquare$$

### گزاره ۳.۱.۱

یک  $R$ -مدول  $M$  ضربی است اگر و تنها اگر برای هر  $m \in M$ ، ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد

بطوریکه  $Rm = IM$ .

اثبات:

ابتدا فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی باشد. می‌دانیم برای هر  $m \in M$  یک زیرمدول از  $M$  است. بنابراین یک ایده‌آل  $I$  از  $R$  وجود دارد بطوریکه  $Rm = IM$ ، بالعکس می‌پذیریم برای هر  $m \in M$ ، ایده‌آل  $I$  از  $R$  وجود داشته باشد بطوریکه  $Rm = IM$ . فرض کنید  $N$  زیرمدول  $M$  باشد. آنگاه برای هر  $x \in N$ ، ایده‌آل  $I_x$  از  $R$  وجود دارد بطوریکه  $Rx = I_x M$ . قرار می‌دهیم  $I = \sum_{x \in N} I_x$ . ادعا می‌کنیم  $N = IM$ .

$$IM = \left( \sum_{x \in N} I_x \right) M = \sum_{x \in N} (I_x M) = \sum_{x \in N} Rx = N$$

و این نشان می‌دهد که  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی است. ■

#### تعریف ۴.۱.۱

فرض کنید که  $M$  یک  $R$ -مدول است، اگر  $P$  یک ایده‌آل از  $R$  باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$T_p(M) = \{m \in M : (1 - p)m = 0, \quad p \in P \text{ بعضی}\}$$

$T_p(M)$  یک زیرمدول از  $M$  است زیرا فرض کنید  $r \in R$ ،  $m \in T_p(M)$  باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} m \in T_p(M) &\implies \exists p \in P, (1 - p)m = 0 \implies r(1 - p)m = 0 \\ &\implies (1 - p)rm = 0 \implies rm \in T_p(M) \end{aligned}$$

از طرفی اگر  $m, m' \in T_p(M)$  باشند، داریم:

$$\begin{aligned} \exists p_1, p_2 \in P, (1 - p_1)m = (1 - p_2)m' = 0 &\implies (1 + p_1 p_2 - p_1 - p_2)(m - m') = 0 \\ &\implies m - m' \in T_p(M) \end{aligned}$$

بنابراین  $T_p(M)$  یک زیرمدول از  $M$  می‌باشد. ◻

### تعریف ۵.۱.۱

$R$ -مدول  $M$ ،  $P$ -دوری است هرگاه عناصر  $m \in M$  و  $q \in P$  وجود داشته باشند بطوریکه

$$(1 - q)M \subseteq Rm$$

### مثال ۶.۱.۱

$Z$  به عنوان یک  $Z$ -مدول،  $p$ -دوری است هرگاه  $p = 2$  و  $q = 2$  و  $m = 1$  در نظر گرفته شود.

### قضیه ۷.۱.۱

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. آنگاه  $R$ -مدول  $M$  یک مدول ضربی است اگر و

تنها اگر برای هر ایده‌آل بیشین  $P$  از  $R$  داشته باشیم  $M = T_p(M)$  یا  $M = P$ ،  $P$ -دوری باشد.

اثبات:

ابتدا فرض کنید  $M$  یک مدول ضربی و  $P$  یک ایده‌آل بیشین از  $R$  باشد. فرض می‌کنیم  $M = PM$ .

$m \in M$  را در نظر می‌گیریم، آنگاه با توجه به تعریف مدول ضربی، ایده‌آل  $A$  از  $R$  وجود دارد بطوریکه

$$Rm = AM. \text{ بنابراین}$$

$$Rm = AM = APM = PAM = PRm = Pm$$

$$\Rightarrow Rm = Pm, \forall m \in M \Rightarrow m = pm, \quad p \in P \text{ برای بعضی}$$

$$\Rightarrow m(1 - p) = 0, p \in P \text{ برای بعضی}$$

$$\Rightarrow m \in T_p(M) \Rightarrow M \subseteq T_p(M)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که  $T_p(M) \subseteq M$ . بنابراین  $M = T_p(M)$ .

حال فرض می‌کنیم که  $PM \neq M$ . پس عضوی مانند  $x$  متعلق به  $M$  وجود دارد بطوریکه

$$x \notin PM. \text{ از طرف دیگر چون } x \in M \text{ پس ایده‌آل } B \text{ از } R \text{ وجود دارد بطوریکه } Rx = BM$$

بوضوح  $B \not\subseteq P$  زیرا اگر  $B \subseteq P$  آنگاه داریم:

$$BM \subseteq PM, \quad x \in BM \implies x \in PM$$

که تناقض است.

چون  $B \not\subseteq P$ ، لذا نتیجه می‌گیریم که عضوی مانند  $q \in P$  وجود دارد بطوریکه  $1 - q \in B$ . زیرا

$$P \subset P + B \subseteq R \implies P + B = R \implies 1 \in P + B$$

$$\implies \exists q \in P, b \in B : 1 = q + b \implies 1 - q = b \in B$$

لذا

$$(1 - q)M \subseteq BM = Rx$$

در نتیجه

$$(1 - q)M \subseteq Rx, \quad x \in M \text{ و } q \in P \text{ برای بعضی}$$

برعکس: فرض می‌کنیم که برای هر ایده‌آل بیشین  $P$  از  $R$ ،  $M = T_p(M)$  یا  $M$ ،  $P$ -دوری است.

فرض کنید  $N$  زیرمدولی از  $M$  بوده و  $I = \text{ann}(\frac{M}{N})$  چون  $I \subseteq \text{ann}(\frac{M}{N})$  پس  $I(\frac{M}{N}) = N$  و

$$\text{در نتیجه } IM \subseteq N$$

حال  $y \in N$  را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم  $K = \{r \in R \mid ry \in IM\}$  بوضوح  $K$  ایده‌آلی

از  $R$  است. فرض می‌کنیم که  $K \neq R$ . آنگاه ایده‌آل بیشین  $Q$  از  $R$  وجود دارد بطوریکه  $K \subseteq Q$ . اگر

$$M = T_Q(M) \text{ آنگاه داریم:}$$

$$y \in N \subseteq M \implies y \in T_Q(M) \implies \exists s \in Q, (1 - s)y = 0 \in IM$$

$$\implies 1 - s \in K \subseteq Q \implies 1 - s \in Q, s \in Q$$

$$\implies 1 \in Q \implies Q = R$$