بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

موضوع:

مدولهای ضربی و ددکیند

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

مولف :

محمدعلی احسنت

تیر ۱۳۷۸

موضوع:

مدولهای ضربی و ددکیند

توسط:

محمدعلی احسنت

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

از این پایان‌نامه در تاریخ ۷۸/۴/۲۶ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران:

استاد راهنما: دکتر رضا نکویی

داور: دکتر محمدمهدی زاهدی

استاد مشاور: دکتر اسفندیار اسلامی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی‌ارشد:
دکتر اسفندیار اسلامی

معاون آموزشی دانشگاه:
مجید غلامحسین‌پور

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:
دکتر محمدحسین متقی

رئیس دانشگاه:
دکتر محمدحسین متقی

سپاسگزاری

خداوند منان را سپاسگزارم که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود و به لطف و عنایت او توانستم قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و دانش را بچشم.

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بوده‌اند صمیمانه تشکر کنم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا نکویی که قبول زحمت نموده و راهنمایی این رساله را بعهده گرفته و با کمال صبر و متانت و گشاده‌رویی پاسخگوی مشکلات اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمدمهدی زاهدی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را بعهده داشته‌اند و از راهنمائیهایشان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری می‌کنم.

از خانم باقری نیز که زحمت تایپ این پایان‌نامه را به عهده گرفتند سپاسگزاری می‌کنم.

در خاتمه از همسر مهربانم که با صبر و شکیبایی مرا در مراحل مختلف تحصیل همراهی کرده است کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

محمدعلی احسنت

تیرماه ۱۳۷۸

تقدیم به:

همسر مهربان

و

پدر و مادر فداکارم

چکیده

در این رساله ابتدا مدولهای ضربی را روی حلقه جابجایی و یکدار R تعریف می‌کنیم و پس از شناخت مقدماتی مدولهای ضربی به بررسی آنها در حالت دوری یا با تولید متناهی می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم هر مدول ضربی آرتینی، یک مدول دوری است و نشان می‌دهیم اگر حلقه R در شرط زنجیر صعودی روی ایده‌آلهای نیم‌اول صدق کند آنگاه هر $R-$مدول ضربی، با تولید متناهی است.

در ادامه ایده‌آلها و زیرمدولهای وارونپذیر را تعریف می‌کنیم و بعضی از خواص ایده‌آلهای وارونپذیر یک حلقه را به زیرمدولهای وارونپذیر یک مدول تعمیم خواهیم داد. همچنین مدول ددکیند را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم یک R_مدول ضربی باوفا، ددکیند است اگر و تنها اگر R یک دامنه ددکیند باشد.

سپس ثابت می‌کنیم اگر R حلقه‌ای نیم‌اول باشد آنگاه حلقه R_درونریختی‌های یک D_1-مدول دوگانپذیر، یک دامنه صحیح جابجایی است.

در پایان با استفاده از مفهوم وارونپذیری در مدولها به شرایطی برای وجود یک تکریختی در $Hom(A,B)$ دست می‌یابیم که در آن A و B، R_مدول می‌باشند. همچنین با این فرض که A یک $R-$مدول ضربی باوفاست نشان می‌دهیم اگر A یک دامنه ددکیند باشد آنگاه A با یک ایده‌آل وارونپذیر در R یکریخت است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

این رساله برگرفته از مقالات، مدولهای ضربی [۲۱] و مدولهای ددکیند [۶] می‌باشد. لازم به ذکر است که در این نوشتار تمام حلقه‌ها جابجایی و یکدار (جز قسمتی از بخش ۳ فصل ۱) و تمام مدولها یکانی می‌باشند.

در فصل اول نشان می‌دهیم که اگر M یک $R-$مدول ضربی و N زیرمدولی از M باشد آنگاه $N = (N : M)M$. سپس ثابت می‌کنیم یک $R-$مدول M، ضربی است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل بیشین P از R، $M = T_p(M)$ یا M ،P_دوری باشد. از این قضیه نتایج بسیار مهمی در مدولهای ضربی حاصل می‌شود. بعنوان مثال اگر فرض کنیم $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک گردایه از $R-$مدولها باشد ثابت می‌کنیم $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر:

۱) برای هر $\lambda \in \Lambda$، M_λ یک مدول ضربی باشد.

۲) برای هر $\lambda \in \Lambda$، ایده‌ال A_λ از R موجود باشد بطوریکه $A_\lambda M_\lambda = M_\lambda$ و $A_\lambda \hat{M}_\lambda = \circ$ که

$$\hat{M}_\lambda = \bigoplus_{\mu\neq\lambda} M_\mu \cdot$$

همچنین ثابت می‌کنیم هرگاه M یک $R-$مدول ضربی غیرصفر باشد، آنگاه:

۱) هر زیرمدول سره از M در یک زیرمدول بیشین از M قرار دارد.

۲) K یک زیرمدول بیشین از M است اگر و تنها اگر یک ایده‌آل بیشین P از R موجود باشد بطوریکه $K = PM \neq M$. در ادامه ثابت می‌کنیم $R-$مدول ضربی M که تنها تعداد متناهی زیرمدول بیشین داشته باشد یک مدول دوری است.

در این فصل همچنین زیرمدول اول یک مدول غیرصفر را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم زیرمدول سرهٔ N از $R-$مدول ضربی M اول است اگر و تنها اگر $ann(\frac{M}{N})$ یک ایده‌آل اول از R بوده، اگر و تنها اگر برای بعضی ایده‌آل اول P از R، $N = PM$ که $ann(M) \subseteq P$. سپس ثابت می‌کنیم $R-$مدول ضربی باوفای M، با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $M \neq PM$، برای تمام ایده‌آلهای اول کمین P

از R. همچنین نشان می‌دهیم در حلقه R که در شرط ACC_{sp} صدق می‌کند هر $R-$مدول ضربی، با تولید متناهی است.

در فصل دوم مجموعهٔ S، شامل عضوهایی از حلقه R که مقسوم علیه صفر نیستند و حلقه کسرهای R_s از R را در نظر می‌گیریم. سپس ایده‌آل و مدول وارونپذیر را تعریف می‌کنیم. در صورتی که M یک $R-$مدول غیرصفر و N یک زیرمدول از M باشد، نشان می‌دهیم:

۱) اگر N وارونپذیر باشد آنگاه

$$\forall m \in M, \exists t \in T, n \in N : tm = n$$

۲) فرض کنید N یک زیرمدول دوری غیرصفر از M باشد، $N = Rn$. در این صورت N وارونپذیر است اگر و تنها اگر

$$\forall m \in M, \exists t \in T, r \in R : tm = rn$$

اس.اچ.کوکس ثابت کرد که حلقه $R-$درونریختی‌های یک مدول بدون تاب، یک دامنهٔ صحیح جابجایی است.

در این فصل عادل.جی.نعوم و فیراس اچ. الوان ثابت کرده‌اند که در حلقه نیم اول R، حلقه $R-$درونریختی‌های یک $D-$مدول دوگان‌پذیر، یک دامنهٔ صحیح جابجایی است. پس از تعریف دامنه و مدول ددکیند، ثابت می‌کنیم $R-$مدول ضربی باوفای M، یک مدول ددکیند است اگر و تنها اگر R یک دامنه ددکیند باشد. همچنین ثابت می‌کنیم $R-$مدول ضربی باوفای M، یک مدول پروفر است اگر و تنها اگر R یک دامنه پروفر باشد.

جی.ام.لو و پی.اف. اسمیت ثابت کردند، هر $R-$مدول ضربی بدون تاب M با یک ایده‌آل از R یکریخت است اگر و تنها اگر $\alpha \in M^*$ موجود باشد بطوریکه $ann(M) = ann(R\alpha)$.

در این فصل جی.نعوم و فیراس.اچ.الوان ثابت کرده‌اند، $R-$مدول ضربی با وفای M، اگر ددکیند باشد آنگاه با یک ایده‌آل وارونپذیر در R یکریخت است.

در پایان با استفاده از مفهوم وارونپذیری در مدولها به شرایطی برای وجود یک تکریختی در $H = Hom(A, B)$ دست می‌یابیم، که در آن A و B، $R-$مدول هستند.

فصل ۱

مدولهای ضربی

در این فصل تمام حلقه‌ها جابجایی یکدار (جز برای قسمت کوتاهی از بخش ۳) و تمام مدولها یکانی می‌باشند. هدف ما بررسی پاره‌ای از خواص مدولهای ضربی است، خصوصاً زمانی که دوری یا با تولید متناهی می‌باشند. بعنوان مثال M بعنوان یک R−مدول آرتینی، ضربی است اگر و تنها اگر دوری باشد. بعلاوه اگر R حلقه‌ای باشد که در شرط زنجیر صعودی روی ایده‌آلهای نیم اول صدق کند. آنگاه هر R−مدول، ضربی با تولید متناهی است.

۱.۱ مدولهای ضربی

تعریف ۱.۱.۱

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و M یک R−مدول یکانی باشد. آنگاه M یک مدول ضربی است هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R موجود باشد بطوریکه $N = IM$.

توجه کنید که تعریف ما با تعریف در [۱] و [۱۶] مطابقت دارد اما در [۱۸] لفظ مدول ضربی به روش دیگری تعریف شده است. به این ترتیب که یک R−مدول، ضربی می‌باشد اگر و تنها اگر هر زیرمدول از آن به معنی فوق ضربی باشد. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل A از حلقه R، ایده‌آل ضربی است اگر برای هر ایده‌آل B از R که $B \subseteq A$، یک ایده‌آل C از حلقه R موجود باشد بطوریکه $B = AC$.

لم ۲.۱.۱

فرض کنید M یک R−مدول ضربی و N زیرمدولی از M می‌باشد، آنگاه $N = (N : M)M$. که $(N : M) = ann(\frac{M}{N})$، بطوریکه $ann(X)$ نمایش پوچساز R−مدول X در R است.

اثبات:

فرض کنید $A = ann(\frac{M}{N})$. چون M یک مدول ضربی است پس ایده‌آل I از R وجود دارد

بطوریکه $N = IM$. زیرا با توجه به نگاشت

$$R \times \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N}$$

$$(r, m+N) \longrightarrow r(m+N) = rm + N \qquad (۱)$$

$\frac{M}{N}$ یک R–مدول است. حال اگر

$$\begin{aligned} x \in I, N = IM \quad &\Longrightarrow \quad xM \subseteq N \Longrightarrow xm \in N, \forall m \in M \\ &\Longrightarrow \quad xM + N = N \overset{(۱)}{\Longrightarrow} x(m+N) = N, \forall m \in M \\ &\Longrightarrow \quad x \in ann(\frac{M}{N}) \Longrightarrow x \in A \end{aligned}$$

پس $I \subset A$. لذا

$$N = IM \subseteq AM \Longrightarrow N \subseteq AM$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} \forall r \in A \quad &\Longrightarrow \quad r \in ann(\frac{M}{N}) \Longrightarrow r(\frac{M}{N}) = N \\ &\Longrightarrow \quad rM \subseteq N, \forall r \in A \Longrightarrow AM \subseteq N \end{aligned}$$

بنابراین $AM = N$ و در نتیجه

$$N = (ann(\frac{M}{N}))M \ . \ \blacksquare$$

گزاره ۳.۱.۱

یک R–مدول M ضربی است اگر و تنها اگر برای هر $m \in M$، ایده‌آل I از R موجود باشد بطوریکه $Rm = IM$.

اثبات:

ابتدا فرض کنید M یک R–مدول ضربی باشد. می‌دانیم برای هر $m \in M$، Rm یک زیرمدول از M است. بنابراین یک ایده‌آل I از R وجود دارد بطوریکه $Rm = IM$، بالعکس می‌پذیریم برای هر $m \in M$، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد بطوریکه $Rm = IM$. فرض کنید N زیرمدول M باشد. آنگاه برای هر $x \in N$، ایده‌آل I_x از R وجود دارد بطوریکه $Rx = I_xM$. قرار می‌دهیم $I = \sum_{x \in N} I_x$. ادعا می‌کنیم $N = IM$.

$$IM = (\sum_{x \in N} I_x)M = \sum_{x \in N}(I_xM) = \sum_{x \in N} Rx = N$$

و این نشان می دهد که M یک R–مدول ضربی است.■

تعریف ۴.۱.۱

فرض کنید که M یک R–مدول است، اگر P یک ایده‌آل از R باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$T_p(M) = \{m \in M : (۱ - p)m = ۰, \quad p \in P \text{ برای بعضی}\}$$

$T_p(M)$ یک زیرمدول از M است زیرا فرض کنید $r \in R$، $m \in T_p(M)$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} m \in T_p(M) &\implies \exists p \in P, (۱ - p)m = ۰ \implies r(۱ - p)m = ۰ \\ &\implies (۱ - p)rm = ۰ \implies rm \in T_p(M) \end{aligned}$$

از طرفی اگر $m, m' \in T_p(M)$ باشند، داریم:

$$\begin{aligned} \exists p_۱, p_۲ \in P, (۱ - p_۱)m = (۱ - p_۲)m' = ۰ &\implies (۱ + p_۱p_۲ - p_۱ - p_۲)(m - m') = ۰ \\ &\implies m - m' \in T_p(M) \end{aligned}$$

بنابراین $T_p(M)$ یک زیرمدول از M می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱

R–مدول M، P–دوری است هرگاه عناصر $q \in P$ و $m \in M$ وجود داشته باشند بطوریکه $(1-q)M \subseteq Rm$.

مثال ۶.۱.۱

$\mathcal{Z}$ به عنوان یک $\mathcal{Z}$_مدول، p_دوری است هرگاه $p = 2\mathcal{Z}$ و $q = 2$ و $m = 1$ در نظر گرفته شود.

قضیه ۷.۱.۱

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. آنگاه R–مدول M یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل بیشین P از R داشته باشیم $M = T_p(M)$ یا M، P–دوری باشد.

اثبات:

ابتدا فرض کنید M یک مدول ضربی و P یک ایده‌آل بیشین از R باشد. فرض می‌کنیم $M = PM$. $m \in M$ را در نظر می‌گیریم، آنگاه با توجه به تعریف مدول ضربی، ایده‌آل A از R وجود دارد بطوریکه $Rm = AM$. بنابراین

$$Rm = AM = APM = PAM = PRm = Pm$$

$$\Longrightarrow \quad Rm = Pm, 1 \in R \Longrightarrow m = pm, \qquad p \in P \quad \text{برای بعضی}$$

$$\Longrightarrow \quad m(1-p) = 0, p \in P \quad \text{برای بعضی}$$

$$\Longrightarrow \quad m \in T_p(M) \Longrightarrow M \subseteq T_p(M)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $T_p(M) \subseteq M$. بنابراین $M = T_p(M)$.

حال فرض می‌کنیم که $PM \neq M$. پس عضوی مانند x متعلق به M وجود دارد بطوریکه $x \notin PM$. از طرف دیگر چون $x \in M$ پس ایده‌آل B از R وجود دارد بطوریکه $Rx = BM$.

بوضوح $B \not\subseteq P$ زیرا اگر $B \subseteq P$ آنگاه داریم:

$$BM \subseteq PM, \quad x \in BM \Longrightarrow x \in PM$$

که تناقض است.

چون $B \not\subseteq P$، لذا نتیجه می‌گیریم که عضوی مانند $q \in P$ وجود دارد بطوریکه $۱ - q \in B$. زیرا

$$\begin{aligned} P \subset P + B \subseteq R &\Longrightarrow P + B = R \Longrightarrow ۱ \in P + B \\ &\Longrightarrow \exists q \in P, b \in B : ۱ = q + b \Longrightarrow ۱ - q = b \in B \end{aligned}$$

لذا

$$(۱ - q)M \subseteq BM = Rx$$

در نتیجه

برای بعضی $q \in P$ و $x \in M$، $\qquad (۱ - q)M \subseteq Rx$

برعکس: فرض می‌کنیم که برای هر ایده‌آل بیشین P از R، $M = T_p(M)$ یا M، P−دوری است. فرض کنید N زیرمدولی از M بوده و $I = ann(\frac{M}{N})$. چون $I \subseteq ann(\frac{M}{N})$ پس $I(\frac{M}{N}) = N$ و در نتیجه $IM \subseteq N$.

حال $y \in N$ را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $K = \{r \in R | ry \in IM\}$ بوضوح K ایده‌آلی از R است. فرض می‌کنیم که $K \neq R$. آنگا ایده‌آل بیشین Q از R وجود دارد بطوریکه $K \subseteq Q$. اگر $M = T_Q(M)$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} y \in N \subseteq M &\Longrightarrow y \in T_Q(M) \Longrightarrow \exists s \in Q, (۱ - s)y = ۰ \in IM \\ &\Longrightarrow ۱ - s \in K \subseteq Q \Longrightarrow ۱ - s \in Q, s \in Q \\ &\Longrightarrow ۱ \in Q \Longrightarrow Q = R \end{aligned}$$