بِسمِ اللّه الرّحمنِ الرّحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ جبر)

عنوان:

زیرگروههای دوری_گروههای متناهی

استاد راهنما:

آقای دکتر علیرضا جما لی

تدوین:

زهره سپهری زاده

۱۳۸۷

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه به مطالعهٔ زیرگروههای دوری خاصی از گروههای متناهی می پردازیم.

ابتدا p–گروههای متناهی غیر دوری مانند G را در نظر می گیریم که زیرگروههای دوریْ ماکسیمال آنها مانند X در یکی از دو شرط زیر صدق می کنند.

الف) هر زیرگروه G که به طور واقعی شامل یک زیرگروه دوریْ ماکسیمال X باشد، غیرآبلی است.

ب) هر زیرگروه دوری ماکسیمال X از G جزء یک زیرگروه ماکسیمال منحصربفرد G است.

در صورتی که شرط (الف) برقرار باشد، ثابت خواهد شد که $p = ۲$ و G گروه کواترنیون تعمیم یافته است؛ و در صورت برقراری شرط (ب)، ثابت می شود G فرادوری است.

سپس به مطالعهٔ گروههای متناهی مانند G می پردازیم که شامل زیرگروهی دوری مانند A با شرط $|G|^{۱/۲} \geq |A|$ می باشند. ثابت خواهیم کرد که A شامل یک زیرگروه مشخّص یا نرمال غیر بدیهی G است.

واژه های کلیدی : p–گروه، p–گروه قوی، گروه کواترنیون تعمیم یافته، p–گروه فرا دوری.

پیشگفتار

در این پایان نامه به مطالعهٔ زیرگروههای دوری خاصی از گروههای متناهی می پردازیم.

فصل اول به بیان پیشنیاز ها و قضیه های اولیه اختصاص دارد.

در فصل دوم p–گروههای متناهی غیردوری مانند G را در نظر می گیریم که زیرگروههای دوری ماکسیمال آنها در شرط معینی صدق می کنند. در این مورد دو قضیه زیر را ثابت می کنیم:

الف) اگر هر زیرگروه H از G که به طور واقعی شامل یک زیرگروه دوریْ ماکسیمال X است، غیرآبلی باشد آنگاه $p = ۲$ و G یک گروه کواترنیون تعمیم یافته است،

ب) اگر هر زیرگروه دوری ماکسیمال X جزء یک زیرگروه ماکسیمال منحصربفرد G باشد آنگاه G یک گروه فرادوری است.

در فصل سوم، گروههای متناهی مانند G را در نظر می گیریم که شامل زیرگروههای دوری بزرگ اند. به این معنی که دارای زیرگروههایی دوری مانند A هستند که $|A| \geq |G|^{۱/۲}$. در این فصل دو قضیه زیر را ثابت می شود.

الف) فرض کنیم گروه G شامل یک زیرگروه دوری مانند A باشد به طوری که $|A| > |G|^{۱/۲}$. در این صورت A شامل یک زیرگروه غیربدیهی می باشد که در G مشخّص است.

ب) فرض کنیم گروه غیربدیهی G دارای زیرگروه دوری A باشد به طوری که $|A| \geq |G|^{۱/۲}$. در این صورت A شامل یک زیرگروه غیربدیهی می باشد که در G نرمال است.

نتایج فصل دوم و سوم تفصیل دو مقالهٔ زیراند.

Z. Janko, On maximal cyclic subgroups in finite p-groups, *Math. Z.* (2006) 254: 29-31.

M. Herzog, G. Kaplan, Large cyclic subgroups contain non-trivial normal subgroups, *J. Group Theory*, 4 (2001), 247-253.

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ تعریف ها و قضیه های بنیادی

از تمامی قضیه ها و لم های بیان شده در این فصل در فصل های بعد استفاده خواهیم کرد. در این فصل و فصل های دیگر گروه دوری از مرتبه n را با C_n نمایش می دهیم. همچنین مرتبه هر عضو مانند g را با $o(g)$ نشان می دهیم و اثر خودریختی σ روی عضو g را به صورت g^σ نشان می دهیم و p همواره یک عدد اول می باشد.

قضیه ۱.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه دوری از مرتبه n باشد و d مقسوم علیه n باشد در این صورت G تنها یک زیرگروه از مرتبه d دارد.

اثبات . [۹] صفحه ۲۸.■

تعریف ۲.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H از G را زیرگروه مشخّص گویند در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند σ داشته باشیم $H\sigma \leq H$ و می نویسیم $H\ ch\ G$.

قضیه ۳.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$. در این صورت

(i) اگر $K\ ch\ H$ و $H\ ch\ G$ آنگاه $K\ ch\ G$؛

(ii) اگر $H \lhd G$ و $K\ ch\ H$ آنگاه $K \lhd G$؛

(iii) اگر $H\ ch\ G$ آنگاه $H \lhd G$.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۱۲. ■

تعریف ۴.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ را جابجاگر x و y می نامیم. زیرگروه تولید شده توسط جابجاگرها را زیرگروه جابجاگر یا زیرگروه مشتق گوییم وبا G' نشان می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه، و A، B زیرگروههایی از آن باشند. در این صورت جابجاگر A و B را با علامت $[A,B]$ نشان می دهیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[A,B] = \langle\ [a,b] | a \in A, b \in B\ \rangle.$$

قضیه ۶.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

(i) $G' \unlhd G$؛

(ii) اگر $N \unlhd G$ آنگاه $\frac{G}{N}$ آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

اثبات . [۸] صفحه ٦٦. ■

لم ۷.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد وa، b، و c اعضایی از G باشند. در این صورت

(i) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$؛

(ii) $[a,b]=[a,c][a,b]^c$.

اثبات . [۱] صفحه‌ی ۲۰. ■

لم ۸.۱.۱ . فرض کنیم H، K، و L زیرگروههای نرمال گروه G باشند. در این صورت $[HK,L]=[H,L][K,L]$ و $[H,KL]=[H,K][H,L]$.

اثبات .[۱] صفحه‌ی ۲۲۸ . ■

قضیه ۹.۱.۱ (کوشی). فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p||G|$ که در آن p یک عدد اول است. در این صورت G عضوی از مرتبه‌ی p دارد.

اثبات . [۱] صفحه‌ی ۶۹. ■

قضیه ۱۰.۱.۱ (سیلو). فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه ی n باشد که در آن $n=p^\alpha.n'$ که $\alpha\geq 0$ و p عددی اول است به طوری که $p\nmid n'$، در این صورت

(i) G حداقل یک $p-$زیرگروه سیلو دارد؛

(ii) هر $p-$زیرگروه جزء یک $p-$زیرگروه سیلوی G است؛

(iii) عدهٔ همهٔ $p-$زیرگروه های سیلوی G، همنهشت ۱ به پیمانه‌ی p است .

اثبات .[۱] صفحه‌ی ۷۱.■

قضیه ۱۱.۱.۱ . فرض کنیم G یک p–گروه متناهی غیربدیهی باشد و $N \lhd G$ در این صورت اگر $N \neq ۱$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq ۱$.

اثبات .[۱] صفحه‌ی ۷۰ . ■

نتیجه ۱۲.۱.۱ . هر p–گروه غیربدیهی دارای مرکز غیربدیهی است، و در نتیجه p–گروههای متناهی غیربدیهی که مرتبهٔ آنها p نیست ساده نمی توانند باشند.

قضیه ۱۳.۱.۱ . فرض کنیم G یک p–گروه متناهی باشد و $H < G$. در این صورت $H < \mathcal{N}_G(H)$.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۷۱.■

نتیجه ۱۴.۱.۱ . فرض کنیم G یک p–گروه متناهی غیربدیهی باشد و $H < G$. در این صورت H زیرگروه ماکسیمال G است اگروتنها اگر $H \lhd G$ و $|G/H| = p$.

تعریف ۱۵.۱.۱ . فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه، و $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد (به ازای هر h از H تصویر h تحت φ را با φ_h نشان می دهیم). در حاصلضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می کنیم :

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱ h_۲, (k_۱ \varphi_{h_۲}) k_۲)$$

مجموعه‌ی $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد. این گروه را حاصلضرب نیم مستقیم H و K با عمل φ گویند و آن را با علامت $H \times_{\varphi} K$ نشان می دهند.

قضیه ۱۶.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه و M، N زیرگروههایی از آن باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

(i) $N \trianglelefteq G$،

(ii) $M \cap N = 1$،

(iii) $G = MN$.

در این صورت G به صورت حاصلضرب نیم مستقیم N در M است.

اثبات . [۱] صفحه‌ی ۱۸۰. ■

تعریف ۱۷.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌ی اعضای G را نمای G گویند و آن را با علامت $exp(G)$ نمایش می دهند. بنابراین اگر $exp(G) = n$ آنگاه به ازای هرو g که $g \in G$ داریم $g^n = 1$.

تعریف ۱۸.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$. در این صورت

$$\mathcal{C}_G(H) = \{x \in G | xh = hx \ , \forall h \in H\}.$$

مرکزساز H در G نامیده می شود. همچنین اگر $x \in G$ آنگاه قرار می دهیم: $\mathcal{C}_G(x) = \mathcal{C}_G(\langle \ x \ \rangle)$.

لم ۱۹.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و اعضای x، y از آن چنان باشند که هر دو با $[x,y]$ تعویضپذیر باشند. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n،

(i) $[x^n,y]=[x,y]^n$،

(ii) $(xy)^n=x^ny^n[x,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

اثبات .[۱] صفحهٔ ۲۰.■

قضیه ۲۰.۱.۱ (قضیهٔ اساسی گروههای آبلی متناهی در مورد p−گروهها). فرض می کنیم G یک p−گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G را به یک وتنهایک صورت می توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروههای دوری غیربدیهی اش تجزیه کرد.

اثبات .[۱] صفحهی ۱۲۹.■

تعریف ۲۱.۱.۱ . گروه غیربدیهی G را مشخصاً ساده گوییم در صورتی که زیرگروههای مشخّصِ آن ۱ و G باشند.

قضیه ۲۲.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G مشخصاً ساده است اگروتنهااگر G به حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروههای ساده خود که دوبهدو یکریخت اند، تجزیه شود.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۱۰۷ . ■

تعریف ۲۳.۱.۱ . فرض کنیم X زیرمجموعهٔ غیرخالی از گروه G باشد. مقطع همهٔ زیرگروههای نرمال حاوی X را بستار نرمال X می گویند و آن را با X^G نشان می دهند. به وضوح X^G کوچکترین زیرگروه نرمال حاوی X است.

دوگان مفهوم بستار نرمال X، مغز X است. برطبق تعریف مغز X عبارت است زیرگروه نرمال تولید شده با همهٔ زیرگروههای نرمال G که جزءX اند. مغز X را با $Core_G(X)$ نشان می دهیم.

لم ۲۴.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $X \subseteq G$، $H \leq G$. دراین صورت

$$X^G = \langle\ g^{-1}Xg | g \in G\ \rangle \qquad Core_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g.$$

تعریف ۲۵.۱.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. تعریف می کنیم

$$O_p(G) = \langle\ N \mid N \lhd G, \text{یک } N \text{ یک } p\text{–گروه است}\ \rangle.$$

۲.۱ گروههای پوچتوان

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروههای نرمال G مانند $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$. سری نرمال $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

تعریف ۲.۲.۱ . گروه G را پوچتوان نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را ردهٔ پوچتوانی G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می دهند.

لم ۳.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد،

(i) اگر H یک زیرگروه نرمال غیربدیهی از G باشد، آنگاه $H \bigcap Z(G) \neq 1$،

(ii) اگر A زیرگروه نرمال آبلیِ ماکسیمال G باشد، آنگاه $A = C_G(A)$.

اثبات . [۹] صفحه‌ی ۱۱۷. ■

مثال ۴.۲.۱ .

الف) واضح است که هر گروه آبلی یک گروه پوچتوان از رده پوچتوانی ۱ است،

ب) اگر G یک گروه پوچتوان غیربدیهی باشد آنگاه $Z(G) \neq 1$،

پ) هر $p-$گروه متناهی پوچتوان است.

تعریف ۵.۲.۱ . اگر G یک گروه باشد که $|G| = p^n$ و p یک عدد اول و $n \geq 1$ و رده پوچتوانی G برابر $n-1$ باشد($c(G) = n-1$) آنگاه می گوییم G از ردهٔ ماکسیمال است.

لم ۶.۲.۱ .گروه G پوچ توان است اگرو تنها اگر سری نرمالی مانند $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$ داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ داشته باشیم $[G, G_i] \leq G_{i-1}$.

اثبات . [۱] صفحه‌ی ۲۲۰.■

قضیه ۷.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. دراین صورت گزاره های زیر دو به دو معادلند

(i) G پوچتوان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(iii) هر p–زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

(iv) هر دو عضو G که مرتبه آنها نسبت به هم اولند، تعویضپذیرند؛

(v) G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود است.

اثبات . [۱] صفحه‌ی ۲۲۳.■

لم ۸.۲.۱ . اگر G پوچتوان از رده دو باشد آنگاه به ازای هرx، y از G و هر عدد طبیعی n داریم $(xy)^n = x^n y^n [x,y]^{n(n-1)/2}$.

اثبات . چون G پوچتوان از رده حداکثر ۲ است، بنابراین $G' \leq Z(G)$ و لذا به ازای هرx، y از G، $[y,[x,y]] = [x,[x,y]] = 1$ و بنابر قسمت دوم لم ۱۹.۱.۱ بدست می آید $(xy)^n = x^n y^n [x,y]^{n(n-1)/2}$.■

تعریف ۹.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. مقطع همهٔ زیرگروههای ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گویند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می دهند. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، بر طبق قرارداد $\Phi(G) = G$. در برخی موارد برای راحتی $\Phi(G)$ را با علامت Φ نشان می دهیم.

لم ۱۰.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $D \subseteq \Phi(G), C \subseteq G$. در این صورت اگر $G = \langle\ C, D\rangle$ آنگاه $G = \langle C\rangle$.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۳۳. ■

قضیه ۱۱.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\Phi(G) \leq N \lhd G$. در این صورت، N پوچتوان است اگر و تنها اگر $\frac{N}{\Phi(G)}$ پوچتوان باشد.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۳۳. ■

نتیجه ۱۲.۲.۱ . اگر G یک گروه متناهی باشد آنگاه $\Phi(G)$ پوچتوان است.

تعریف ۱۳.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه دلخواه و n عددی طبیعی باشد. در این صورت زیرگروه G^n از G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G^n = \langle\ g^n | g \in G\ \rangle.$$

قضیه ۱۴.۲.۱ . فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی باشد. در این صورت $\Phi(G) = G'G^p$.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۳۴. ■

نتیجه ۱۵.۲.۱ . اگر G یک $p-$گروه متناهی باشد آنگاه $\frac{G}{\Phi}$ یک $p-$گروه آبلی مقدماتی است.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۳۵. ■

ذیلاً علامت $d(G)$ را برای نمایش کوچکترین عدد طبیعی d به کار می بریم که گروه G با d عضو تولید می شود.

قضیه ۱۶.۲.۱ (قضیهٔ پایهٔ برنساید). فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی باشد و $|\frac{G}{\Phi}| = p^r$. در این صورت تعداد مولد مینیمال G برابر با r است؛ یعنی $d(G) = r$.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۳۵.■

تعریف ۱۷.۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده با همهٔ زیرگروههای نرمال پوچ توان G را زیرگروه فیتینگ G می نامند و آن را با$Fit(G)$ نشان می دهند.

لم ۱۸.۲.۱ . اگر G متناهی باشد آنگاه $Fit(G)$ پوچتوان است.

اثبات . [۱] صفحهٔ ۲۲۸. ■

۳.۱ مطالبی در مورد $p-$ گروهها

تعریف ۱.۳.۱ . به گروه

$$Q_{۸} = \langle\ a, b|\ a^{۴} = ۱, b^{۲} = a^{۲},\ bab^{-۱} = a^{-۱}\ \rangle,$$

گروه کواترنیون می گویند که یک گروه غیر آبلی ازمرتبهٔ ۸ است.

قضیه ۲.۳.۱ . اگر G یک $p-$گروه باشد که تنها یک زیرگروه از مرتبه p و بیشتر از یک زیرگروه از اندیس p داشته باشد، آنگاه $p = ۲$ و G یکریخت با گروه کواترنیون است.

اثبات . [۹] صفحهٔ ۱۱۹. ■

قضیه ۳.۳.۱ . فرض کنیم G گروهی باشد شامل اعضای x، y به طوری که x دارای مرتبه ۲^m باشد که $m \geq ۳$، $y^۲ = x^{۲r}$ و $yxy^{-۱} = x^t$. در این صورت $t = \pm ۱$ یا $t = \pm ۱ + ۲^{m-۱}$ که در مورد آخر G حداقل شامل دو عضو از مرتبهٔ ۲ می باشد.

اثبات . [۹] صفحهٔ ۱۲۱. ■

۴.۱ گروههای جایگشتی و عمل گروه بر گروه

تعریف ۱.۴.۱ . فرض کنیم X مجموعهٔ غیرخالی باشد. نگاشت دوسویی $\pi : X \longrightarrow X$ یک جایگشت از X نامیده می شود و مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای X یک گروه نسبت به عمل ترکیب توابع است که S_X نامیده می شود، وقتی $X = \{۱, ۲, ..., n\}$ باشد آن را S_n می نویسیم.

تعریف ۲.۴.۱ . فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرخالی باشد. زیرگروه G از S_X گروه جایگشتی روی X نامیده می شود و درجهٔ گروه جایگشتی تعداد اعضای X می باشد.

تعریف ۳.۴.۱ . گروه جایگشتی G متعددی نامیده می شود اگر به ازای هرx، y از X جایگشت π در G موجود باشد که $x\pi = y$.

تعریف ۴.۴.۱ . فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ غیرخالی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعهٔ $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در G می نامیم و آن را با علامت $St_G(x)$ نشان می دهیم.

تعریف ۵.۴.۱ . فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ غیرخالی X عمل کند. رابطهٔ $\sim$ را در X چنین تعریف می کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی در X است. هر رده هم ارزی را یک مدارعمل، یا گاهی اوقات یک $G-$مدار می نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم ارزی شامل x را مدار x در G می نامیم و آن را با علامت $Orb_G(x)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۴.۱ . فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ غیرخالی X عمل کند و $g \in G$. مجموعهٔ

$$\{x \in X \mid xg = x\}$$

رامجموعهٔ نقاط ثابت g (در G) می گویند و آن را با علامت $Fix_G(g)$ نشان می دهند.

قضیه ۷.۴.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $H, K \leq G$. در این صورت