دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

عدد رنگی دینامیکی گراف‌ها

استاد راهنما

خانم دکتر نسرین سلطانخواه

دانشجو

ماریا رحمانی

اسفند ۱۳۸۹

قدردانی و تشکر

اکنون که به شکرانهٔ الهی و در سایهٔ ایزد منّان، این پروژه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند به ویژه، استاد محترم سرکار خانم دکتر سلطانخواه تشکر و قدردانی نمایم.
همچنین از جناب آقای دکتر حاج‌ابوالحسنی و سرکار خانم دکتر تجویدی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند نهایت تشکر را دارم.
همچنین از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و از خانوادهٔ عزیزم، به خصوص پدر و مادر گرامی و همسر عزیزم که یاور و مشوق من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلم بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه رنگ‌آمیزی دینامیکی یک گراف را بیان و مطالعه می‌کنیم. یک k–رنگ‌آمیزی سره‌ی راسی گراف G را رنگ‌آمیزی دینامیکی می‌نامند اگر در همسایه‌های هر راس $v \in V(G)$ با درجه‌ی حداقل ۲، حداقل ۲ رنگ متفاوت ظاهر شوند. کوچکترین عدد صحیح k، به طوری که G دارای k–رنگ‌آمیزی دینامیکی باشد را عدد رنگی دینامیکی G می‌نامند و آنرا با نماد $\chi_{۲}(G)$ نمایش می‌دهند. مونت‌گمری[1] حدس زده است که تمام گراف‌های منتظم در رابطه‌ی $\chi_{۲}(G) - \chi(G) \leq ۲$ صدق می‌کنند. اکبری[2] و بقیه ثابت کردند که تمام گراف‌های دوبخشی k–منتظم و گراف‌های قویاً منتظم در حدس مونت‌گمری صدق می‌کنند. همچنین مونت‌گمری ثابت کرد اگر G یک گراف باشد به طوری که $\Delta(G) \geq ۳$، آنگاه $\chi_{۲}(G) \leq \Delta(G) + ۱$. در فصل آخر تعمیمی از رنگ‌آمیزی دینامیکی بیان شده است.

کلمات کلیدی: نظریه‌ی گراف، رنگ آمیزی گراف، رنگ آمیزی سره، رنگ آمیزی دینامیکی، خاصیت دینامیکی، رنگ آمیزی لیستی دینامیکی، گراف‌های قویا منتظم

---
۱ Montgomery
۲ Akbari

فهرست مندرجات

قدردانی و تشکر i

چکیده‌ی فارسی ii

مقدمه iv

۱ تعاریف و خواص ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ رنگ‌آمیزی گراف‌ها ۲

۳.۱ رنگ‌آمیزی دینامیکی گراف‌ها ۴

۴.۱ گراف‌های رأس—بحرانی ۴

۵.۱ گراف‌های ثابت ۷

۶.۱ گراف‌های نرمال ۹

۷.۱ گراف‌های قویاً منتظم ۹

۲ کران‌هایی از عدد رنگی دینامیکی ۱۱

۱.۲ مقدمه ۱۱

۲.۲ کران‌های بالایی از عدد رنگی دینامیکی ۱۲

۳.۲ کرانهایی اساسی برای $\chi_2(G)$ ۲۴

۳ رنگ آمیزی دینامیکی گراف‌های منتظم و حاصلضرب دکارتی برخی از گراف‌ها ۲۷

۱.۳ مقدمه ۲۷

۲.۳ عدد رنگی دینامیکی گراف‌های منتظم ۲۸

۳.۳ رنگ‌آمیزی دینامیکی حاصلضرب دکارتی برخی گراف‌ها ۳۴

۴.۳ عدد رنگی دینامیکی حاصل‌ضرب دو مسیر P_n و P_m ۳۶

۵.۳ عدد رنگی دینامیکی حاصل‌ضرب دکارتی دور C_m با گراف‌هایی خاص . ۳۸

۴ رنگ آمیزی لیستی دینامیکی گراف‌ها ۵۱

۱.۴ مقدمه ۵۱

۲.۴ عدد رنگی لیستی دینامیکی برخی از گراف‌ها ۵۱

۳.۴ کران بالا برای عدد رنگی لیستی دینامیکی گراف‌ها ۵۵

۴.۴ رنگ آمیزی لیستی دینامیکی گراف‌های دوبخشی ۶۳

۵ تعمیمی از رنگ‌آمیزی دینامیکی ۶۹

۱.۵ مقدمه ۶۹

۲.۵ رنگ‌آمیزی r−دینامیکی گراف‌هایی خاص ۷۰

۳.۵ گراف r−نرمال ۷۱

کتاب‌نامه ۷۴

A واژه‌نامه ۷۶

چکیده‌ی انگلیسی ۷۸

مقدمه

یکی از مباحث مهم در نظریه گراف، مسأله رنگ‌آمیزی است. رنگ‌آمیزی مورد مطالعه در این پایان‌نامه، رنگ‌آمیزی دینامیکی گراف‌ها است. رنگ‌آمیزی دینامیکی نوع خاصی از رنگ‌آمیزی گراف‌ها می‌باشد که در سال ۲۰۰۱ به صورت زیر در [۱۰]،[۱۲] توسط مونت‌گمری و همکارانش تعریف شده است:

یک k-رنگ‌آمیزی سره‌ی رأسی گراف G را رنگ‌آمیزی دینامیکی می‌نامند، اگر در همسایه‌های هر رأس $v \in V(G)$ با درجه‌ی حداقل ۲، حداقل ۲ رنگ متفاوت ظاهر شوند. کوچکترین عدد صحیح k، به طوری که G دارای k-رنگ‌آمیزی دینامیکی باشد را عدد رنگی دینامیکی G می‌نامند و آن را با $\chi_2(G)$ نمایش می‌دهند. همچنین می‌گوییم برای رأس دلخواه $v \in V(G)$ خاصیت دینامیکی برقرار است اگر داشته باشیم $|c(N(v))| \geq min\{2, d(v)\}$.

یکی از مباحث مورد نظر، بررسی و تعیین عدد رنگی دینامیکی برای گراف‌های خاص بوده که در این پایان‌نامه ارائه شده است. سوالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا معادل هر یک از قضیه‌های مهم مربوط به عدد رنگی، قضیه‌های مشابهی در رابطه با عدد رنگی دینامیکی وجود دارد یا خیر. این سوال در مورد یک سری از قضیه‌ها بررسی شده است. همچنین کران‌های بالایی از عدد رنگی دینامیکی ارائه شده‌اند که هر یک مشابه کران بالای متناظر با عدد رنگی گراف‌ها است. تفاوت میان عدد رنگی و عدد رنگی دینامیکی گرافها و همچنین شناسایی دسته‌ای از گراف‌ها که برای آنها این تفاوت ناچیز است، ارائه شده است.

ایده‌ی رنگ‌آمیزی دینامیکی جنبه‌های متفاوتی دارد و در نتیجه موضوعات جدید و جالبی در رابطه با رنگ‌آمیزی گراف‌ها به دست می‌دهد، که به چند موضوع جدید از این دست پرداخته

شده است.

مطالبی که در این پایان‌نامه گردآوری شده، به این شرح است:

در فصل ۱ ابتدا به بررسی تعاریف اساسی می‌پردازیم. سپس عدد رنگی دینامیکی چند نمونه از گراف‌های خاص آورده شده است[۱]. در بخش بخش بعد گراف‌های خاصی از جمله گراف‌های رأس—بحرانی، گراف‌های ثابت و گراف‌های نرمال معرفی و قضیه‌هایی در مورد رنگ‌آمیزی سره و رنگ‌آمیزی دینامیکی مربوط به این گراف‌ها ارائه شده است [۱۲]. در فصل ۲ کران‌هایی از عدد رنگی دینامیکی بیان شده است [۱۱]. همچنین در بخش دوم این فصل بررسی شده است که آیا سه کران بالای اساسی بدست آمده برای عدد رنگی گراف‌ها، در مورد عدد رنگی دینامیکی نیز برقرار است یا خیر [۱۲]. در فصل ۳ ابتدا عدد رنگی دینامیکی گراف‌های منتظم مورد مطالعه قرار گرفته است[۳]. سپس در بخش‌های بعد عدد رنگی دینامیکی حاصل‌ضرب دکارتی برخی گراف‌ها ارائه شده است [۲]. در فصل ۴ عدد رنگی لیستی دینامیکی برخی گراف‌ها و همچنین کران بالایی برای عدد رنگی لیستی دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است [۴]. در فصل ۵ مفهوم رنگ‌آمیزی دینامیکی به رنگ‌آمیزی r—دینامیکی تعمیم داده شده است [۱۲].

فصل ۱

تعاریف و خواص

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مقدمه‌ای در مورد گراف و رنگ‌آمیزی سره و دینامیکی گراف‌ها مطرح شده و سپس تعریف و خاصیت‌هایی از برخی گراف‌ها بیان شده است. همه‌ی گراف‌ها متناهی و ساده در نظر گرفته شده‌اند. یک گراف شامل تنها یک رأس را گراف بدیهی می‌نامیم. گراف G را با مجموعه رأسی $V = V(G)$ و مجموعه یالی $E = E(G)$ در نظر می‌گیریم و داریم $n = |V(G)|$. مجموعه همسایه‌ی رأس v را با $N(v)$ نشان می‌دهیم که برابر با مجموعه رأس‌های مجاور با v است. درجه‌ی v با $d(v)$ و کمترین درجه‌ی رأسی با $\delta = \delta(G)$ و بیشترین درجه با $\Delta = \Delta(G)$ نمایش داده می‌شود. در گراف G، یک گشت دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G، مانند $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_k v_k$ است که برای هر i، e_i یالی است که رأس v_{i-1} را به رأس v_i وصل می‌کند (توجه کنید که e_iها و v_iها لزوماً متمایز نیستند).
یک گذر در G، گشتی است که یال تکراری ندارد. هر گذر بسته را یک مدار می‌نامند.

تعریف ۱.۱ گراف Q_k یک گراف مکعبی با مجموعه رأس‌های متشکل از تمام k تایی‌های مرتب با ارقام ۰ و ۱ است: $V(Q_k) = \{(x_1, x_2, ..., x_k) | x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq k\}$ به طوری که هر دو رأس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر فقط در یک مولفه تفاوت داشته باشند.

تعریف ۱.۲ ۱) یک تجزیه گوشی در گراف G افرازی از یال‌های G به مجموعه‌های $P_\circ, P_\text{۱}, ..., P_k$ است به طوری که $P_\circ$ یک دور و P_i، $i \geq \text{۱}$، یک مسیر اضافه شده به $P_\circ \cup P_\text{۱} \cup ... \cup P_{i-\text{۱}}$ است به طوری که، دو رأس انتهایی آن مسیر در $P_\circ \cup P_\text{۱} \cup ... \cup P_{i-\text{۱}}$ باشد.

۲) یک تجزیه گوشی بسته در گراف G افرازی از یال‌های G به مجموعه‌های $P_\circ, P_\text{۱}, ..., P_k$ است به طوری که $P_\circ$ یک دور و P_i، $i \geq \text{۱}$، یک دور اضافه شده به $P_\circ \cup P_\text{۱} \cup ... \cup P_{i-\text{۱}}$ است به طوری که دقیقاً یک رأس مشترک با $P_\circ \cup P_\text{۱} \cup ... \cup P_{i-\text{۱}}$ دارد.

تعریف ۱.۳ دو گراف G و H را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف G و H که با نماد $G\Box H$ نمایش داده می‌شود، یک گراف با مجموعه رأس‌های $V(G) \times V(H)$ است. همچنین دو رأس (u,v) و $(u\prime,v\prime)$ با یکدیگر مجاورند، اگر و تنها اگر داشته باشیم: $u = u\prime$ و $vv\prime \in E(G)$، یا $v = v\prime$ و $uu\prime \in E(G)$. پس به وضوح، با فرض اینکه $|V(G)| = n$ و $|V(H)| = m$، داریم $|E(G\Box H)| = m|E(G)| + n|E(H)|$.

تعریف ۱.۴ یک کمان در گراف G، برای $x,y \in V(G)$، یک $(x,y)-$مسیر P از رأس x به رأس y است (یا اینکه اگر داشته باشیم $x = y$، آنگاه یک دور است)، به طوری که همه‌ی رأس‌های داخلی P در G، دارای درجه‌ی ۲ باشند در حالی که، درجه‌ی x,y حداقل برابر ۳ باشد.

۱.۲ رنگ‌آمیزی گراف‌ها

تعریف ۱.۵ مجموعه‌ی $K = \{\text{۱},\text{۲},...,k\}$ و گراف G را در نظر بگیرید. اگر $c : V(G) \to K$ یک تابع باشد، آنگاه c یک $k-$رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف G است، اگر برای هر دو رأس مجاور u_i و u_j، $i \neq j$، داشته باشیم $c(u_i) \neq c(u_j)$. آنگاه c یک k رنگ‌آمیزی سره نامیده می‌شود و G را $k-$رنگ‌پذیر گوییم.

تعریف ۱.۶ عدد رنگی G، که با نماد $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچکترین عدد صحیح و مثبت k است به طوری که، به ازای آن یک $k-$رنگ‌آمیزی سره برای G موجود باشد. در این صورت، G را $k-$رنگی می‌نامیم.

قضیه ۷.۱ [۵] گراف همبند G مفروض است. اگر G گراف کامل و دور فرد نباشد، آنگاه داریم $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

تعریف ۸.۱ مجموعه‌ی $K = \{1, 2, ..., k\}$ و گراف G را در نظر بگیرید. اگر $c : E(G) \to K$ یک تابع باشد، آنگاه c یک $k-$رنگ آمیزی یال‌های گراف G می‌باشد، اگر برای هر دو یال مجاور e_i و e_j، $i \neq j$، داشته باشیم $c(e_i) \neq c(e_j)$، آنگاه c یک k رنگ آمیزی یالی سره نامیده می‌شود و G را $k-$رنگ‌پذیریالی گوییم.

تعریف ۹.۱ عدد رنگی یالی G، که با نماد $\chi'(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچکترین عدد صحیح و مثبت k است به طوری که، به ازای آن یک $k-$رنگ آمیزی یالی سره برای G موجود باشد. در این صورت، G را $k-$رنگی یالی می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱ برای هر رأس v در گراف G، $L(v)$ را لیست رنگ‌های موجود برای رأس v قرار می‌دهیم. یک رنگ آمیزی لیستی برای گراف G یک رنگ آمیزی سره‌ی c است با این شرط که برای هر رأس $v \in V(G)$، داشته باشیم $c(v) \in L(v)$. می‌گوییم گراف G، $k-$رنگ پذیر لیستی است، اگر برای هر لیست‌دهی k عنصری به رأس‌های G، انتخابی از هر لیست برای هر رأس وجود داشته باشد به طوری که، رنگ‌های انتخاب شده یک رنگ آمیزی سره‌ی رأسی برای G به وجود آورد. کوچکترین عدد صحیح k که G دارای $k-$رنگ آمیزی لیستی می‌باشد را عدد لیستی G گویند و آن را با نماد $\chi_l(G)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱۱.۱ [۱۴] اگر G یک گراف باشد، آنگاه داریم: $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$.

اگر چه برای هر گراف دوبخشی G با حداقل یک یال، $\chi(G) = 2$، قضیه‌ی بعدی نشان می‌دهد که عدد رنگی لیستی گراف‌های دوبخشی می‌تواند به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.

قضیه ۱۲.۱ [۱۴] برای هر عدد صحیح k، گراف دوبخشی کامل G موجود است به طوری که داریم: $\chi_l(G) > k$.

۳.۱ رنگ‌آمیزی دینامیکی گراف‌ها

تعریف ۱۳.۱ یک k–رنگ‌آمیزی سره‌ی رأسی گراف G را رنگ‌آمیزی دینامیکی می‌نامند، اگر در همسایه‌های هر رأس $v \in V(G)$ با درجه‌ی حداقل ۲، حداقل ۲ رنگ متفاوت ظاهر شوند. کوچکترین عدد صحیح k، به طوری که G دارای k–رنگ‌آمیزی دینامیکی باشد را عدد رنگی دینامیکی G می‌نامند و آن را با $\chi_۲(G)$ نمایش می‌دهند. همچنین می‌گوییم برای رأس دلخواه $v \in V(G)$ خاصیت دینامیکی برقرار است اگر داشته باشیم $|c(N(v))| \geq min\{۲, d(v)\}$.

به عبارت دیگر در گراف G یک رنگ آمیزی دینامیکی است اگر یک نگاشت c از مجموعه رأس‌های $V(G)$ به مجموعه‌ای از رنگ‌ها وجود داشته باشد به طوری که:

۱) اگر $uv \in E(G)$، آنگاه $c(u) \neq c(v)$ و

۲) برای هر رأس $v \in V(G)$، داشته باشیم $|c(N(v))| \geq min\{۲, d(v)\}$.

شرط اول را شرط مجاورت و شرط دوم را شرط مجاورت دوگانه می‌نامیم.

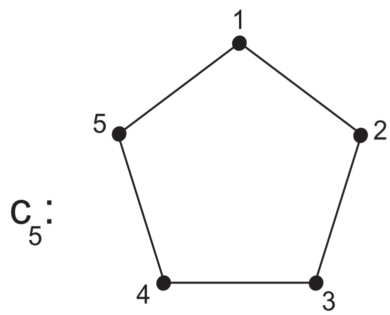
تعریف ۱۴.۱ یک گراف G، k–رنگ‌پذیر لیستی دینامیکی گفته می‌شود، اگر برای هر لیست k–تایی دلخواه برای هر رأس، یک رنگ آمیزی دینامیکی برای تمامی رأس‌ها برقرار باشد. عدد رنگی لیستی دینامیکی یک گراف را که با نماد $\chi_{۲l}(G)$نمایش می‌دهند، کوچکترین عدد صحیح k به طوری که G، k–رنگ‌پذیر لیستی دینامیکی باشد را عدد رنگی لیستی دینامیکی G می‌نامند.

نکته: برای هر گراف دلخواه G همواره داریم $\chi_۲(G) \geq \chi(G)$. همچنین $\chi_۲(K_۲) = ۲$ و به‌علاوه اگر $G \neq K_۲$ یک گراف همبند و غیربدیهی باشد، آنگاه $\chi_۲(G) \geq ۳$.

مثال ۱.۱ در این مثال عدد رنگی گراف‌هایی نشان داده شده است:

۴.۱ گراف‌های رأس–بحرانی

شکل ۱.۱: رنگ‌آمیزی دینامیکی مسیر P_n



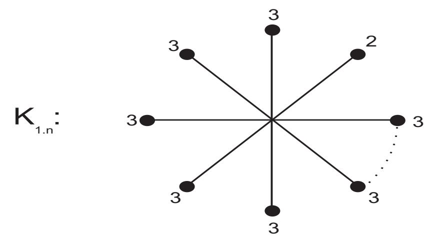
شکل ۲.۱: رنگ‌آمیزی دینامیکی دور C_5

تعریف ۱۵.۱ یک گراف G را یک گراف رأس—بحرانی می‌نامیم هر گاه برای هر رأس v از G داشته باشیم $\chi(G-v) < \chi(G)$.

مثال ۲.۱ تمام گراف‌های کامل و دورهای فرد گراف‌هایی رأس—بحرانی می‌باشند، زیرا برای هر رأس v از گراف K_n یا برای عدد فرد n در دور C_n داریم $\chi(K_n - v) = n - 1 = \chi(K_n) - 1$ و $\chi(C_n - v) = 2 = \chi(C_n) - 1$.
همچنین هر گراف $G = K_{2n-1} - E(C_{2n-1})$، برای $\chi(G) = n \geq 3$، رأس—بحرانی است. زیرا در یک رنگ‌آمیزی مطلوب از G، برای $n \geq 4$، رأس‌های C_{2n-1} را می‌توان به صورت $1, 1, 2, 2, ..., k-1, k-1, k$ رنگ‌آمیزی کرد و رأس‌های P_{2n-1} از گراف $G - v = K_{2n-2} - E(P_{2n-2})$ می‌توانند به صورت $1, 1, 2, 2, ..., k-1, k-1$ رنگ‌آمیزی شوند (برای $n = 3$، گراف $G = K_5 - E(C_5) = C_5$ دوری فرد است).

قضیه ۱۶.۱ [۱۲] گراف G را گرافی با n رأس در نظر بگیرید. در این صورت G یک گراف رأس—بحرانی با $\chi(G) = 2$ است اگر و تنها اگر $G = K_2$. G گرافی رأس—بحرانی با $\chi(G) = 3$ است اگر و تنها اگر G دوری فرد باشد.

تعریف ۱۷.۱ گراف G برای رنگ‌آمیزی دینامیکی یک گراف رأس—بحرانی می‌باشد، اگر برای هر رأس v از G داشته باشیم $\chi_2(G-v) < \chi_2(G)$.



شکل ۳.۱: رنگ‌آمیزی دینامیکی گراف $K_{۱,n}$

مثال ۳.۱ همه‌ی گراف‌های کامل در رنگ‌آمیزی دینامیکی نیز مانند رنگ‌آمیزی سره، رأس–بحرانی می‌باشند.

مثال ۴.۱ دور C_n رأس–بحرانی دینامیکی است اگر و تنها اگر n مضربی از ۳ نباشد.

مثال ۵.۱ گراف $G = K_{۲n-۱} - E(C_{۲n-۱})$، $n = \chi_۲(G) \geq ۴$، برای رنگ‌آمیزی دینامیکی گرافی رأس–بحرانی است. زیرا رنگ‌آمیزی سره برای G و $G - v$ همان رنگ‌آمیزی دینامیکی است.

مثال ٦.۱ گراف پترسن که در آن $\chi(G) = ۳$ و $\chi_۲(G) = ۴$، برای رنگ‌آمیزی دینامیکی رأس–بحرانی است ولی برای رنگ‌آمیزی سره رأس–بحرانی نیست.

مثال ۷.۱ یک مثال برای دسته‌ای از گراف‌ها که برای رنگ‌آمیزی دینامیکی رأس–بحرانی می‌باشد ولی رنگ‌آمیزی سره‌ی در آن رأس–بحرانی نیست، دسته‌ی گراف‌های $G = SK_n$، $n = \chi_۲(G) \geq ۴$، می‌باشند. G گرافی دوبخشی با افراز $V(G) = X \cup Y$ است. هر یک از $\binom{n}{۲}$ رأس در Y با یک جفت از n رأس در $X = \{x_۱, x_۲, ..., x_k\}$ مجاورند. فرض کنید $c(x_i) = i$ و اگر رأس $y \in Y$ با رأس‌های x_i و x_j در X، مجاور باشد. $c(y) = \{۱, ۲, ..., k\}$ را طوری در نظر بگیرید که داشته باشیم $c(y) \neq i, j$. از طرفی رأسی مانند x_i وجود ندارد

که فقط با رأس‌هایی با رنگ یکسان l مجاور باشد، زیرا رأسی مانند y در Y وجود دارد که با رأس‌های x_i و x_l مجاور است و لذا $c(y) \neq i, l$. در این صورت، c یک رنگ آمیزی دینامیکی برای G است و بنابراین $\chi_۲(SK_n) = n$. رأس $x_n \in X$ را در نظر بگیرید. فرض کنید c یک رنگ آمیزی باشد که بصورت نگاشتی یک به یک از $X - \{x_n\}$ به $\{۱, ۲, ..., k - ۱\}$ است. اگر $y \in Y$ با رأس‌های x_i و x_j مجاور باشد آنگاه $c(y) \neq \{۱, ۲, ..., k - ۱\}$ و $c(y) \neq \{c(x_i), c(x_j)\}$ و اگر y فقط با رأس x_i مجاور باشد آنگاه $c(y) \neq c(x_i)$. لذا c یک رنگ آمیزی دینامیکی برای گراف $G - x$ است. پس داریم $\chi_۲(G - x_m) = k - ۱$. زیرا از این که هر دو رأس در X با رأسی در Y مجاورند، پس هر دو رأس از $k - ۱$ رأس در $X - \{x_m\}$ باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند و همچنین برای $z \in Y$ که با رأس‌های x_i و x_j در X مجاور است. داریم $\chi_۲(G - z) = k - ۱$. اگر c یک نگاشت یک به یک از X به $\{۱, ۲, ..., k - ۱\}$ باشد و برای رأس $y \in Y - \{z\}$ که با رأس‌های x_l و x_m مجاور است، داشته باشیم $c(y) \neq c(x_l), c(x_m)$، آنگاه اولاً c یک رنگ آمیزی دینامیکی برای گراف $G - z$ است. ثانیاً حداقل $k - ۱$ رنگ لازم است، زیرا هر دو رأسی که با رأسی در $Y - z$ مجاورند، باید با رنگ‌های متفاوتی رنگ آمیزی شوند.

قضیه ۱.۱۸ [۱۲] فرض کنید G گرافی با n رأس باشد. در این صورت G یک گراف رأس–بحرانی با $\chi_۲(G) = ۲$ است اگر و تنها اگر $G = K_۲$. G گرافی رأس–بحرانی با $\chi_۲(G) = ۳$ است اگر و تنها اگر $G = K_۳$ یا $G = P_۳$.

۱.۵ گراف‌های ثابت

تعریف ۱.۱۹ یک گراف G برای رنگ آمیزی سره، ثابت نامیده می‌شود اگر برای هر رأس $v \in V(G)$ داشته باشیم $\chi(G - v) = \chi(G)$.

مثال ۱.۸ دور C_n، برای nهای زوج گرافی ثابت است که در آن داریم $\chi(C_n) = ۲$.

مثال ۱.۹ هر گراف $G = K_{۲n} - E(C_{۲n})$ یک گراف ثابت است. زیرا رأس‌های $C_{۲n}$ را با رنگ‌های $۱, ۱, ۲, ۲, ..., k, k$ رنگ در G، رنگ آمیزی می کنیم.

قضیه۱.۲۰ [۱۲] گراف G را در نظر بگیرید و فرض کنید $\chi(G)=۳$. در این صورت G ثابت است اگر و تنها اگر هیچ رأسی از G داخل دور نباشد.

لم ۱.۲۱ یک گراف G ثابت است اگر و تنها اگر برای هر $\chi(G)$–رنگ آمیزی از G، هر کلاس رنگی شامل حداقل دو رأس باشد.

اثبات: اگر c یک $\chi(G)$–رنگ آمیزی برای G باشد به طوری که، هر کلاس رنگی در آن فقط شامل یک رأس است، آنگاه داریم $\chi(G-v)=\chi(G)-۱$ و این یک $(\chi(G)-۱)$–رنگ آمیزی را برای گراف $G-v$ نشان می‌دهد. در نتیجه G ثابت نیست. به وضوح، اگر G ثابت نباشد، در این صورت برای رأس $v\in V(G)$ داریم $\chi(G-v)=\chi(G)-۱$. لذا هر $(\chi(G)-۱)$–رنگ آمیزی از گراف $G-v$ همراه با یک رنگ جدید برای v یک $\chi(G)$–رنگ آمیزی را برای G نتیجه می‌دهد به طوری که، این رنگ آمیزی دارای یک کلاس رنگی $\{v\}$ با تنها یک رأس است. □

قضیه۱.۲۲ فرض کنید G یک گراف ثابت با n رأس باشد. در این صورت داریم $\chi(G)\leq\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$.

اثبات: چون G گرافی ثابت است، پس بنا به لم ۱.۱۹ برای یک $\chi(G)$–رنگ آمیزی از G، هر کلاس رنگی حداقل شامل دو رأس است. بنابراین داریم $n\geq ۲(\chi(G))$. در نتیجه $\chi(G)\leq\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$. □

تعریف۱.۲۳ یک گراف G برای رنگ آمیزی دینامیکی، ثابت نامیده می‌شود اگر برای هر رأس $v\in V(G)$ داشته باشیم $\chi_۲(G-v)=\chi_۲(G)$.

مثال۱.۱۰ دور C_n برای رنگ آمیزی دینامیکی ثابت است اگر و تنها اگر برای $j\geq ۲$ داشته باشیم $n=۳j$.

مثال۱.۱۱ هر گراف $G=K_{۲n}-E(C_{۲n})$ برای $n=\chi_۲(G)\geq ۲$، برای رنگ آمیزی دینامیکی گرافی ثابت است.

۶.۱ گراف‌های نرمال

تعریف ۲۴.۱ یک گراف G نرمال است اگر داشته باشیم $\chi_{۲}(G) = \chi(G)$.

مثال ۱۲.۱ اگر n عددی فرد و مضرب ۳ باشد، آنگاه دور C_n نرمال است. دورهای دیگر نرمال نیستند. هر گراف کامل نرمال می‌باشد. از بین درخت‌ها فقط $K_۱$ و $K_۲$ نرمال هستند.

قضیه ۲۵.۱ گراف G را در نظر بگیرید. اگر هر رأس از درجه‌ی بزرگتر از یک در G در یک مثلث واقع باشد، آنگاه G نرمال است.

اثبات: اگر هر رأس مانند $v \in V(G)$ در G در مثلثی قرار داشته باشد، آنگاه دو همسایه از v در مثلث با هم مجاورند و بنا به شرط مجاورت در هر رنگ‌آمیزی سره از G، این دو رأس باید با رنگ‌های متمایزی رنگ شوند. لذا هر رنگ‌آمیزی سره از G، یک رنگ‌آمیزی دینامیکی نیز می‌باشد. لذا داریم $\chi_{۲}(G) = \chi(G)$ و در نتیجه G نرمال است. □

قضیه ۲۶.۱ [۱۲] برای هر عدد طبیعی $k \geq ۱$، یک گراف نرمال فاقد مثلث k–رنگی وجود دارد.

قضیه ۲۷.۱ [۱۲] گراف G و عدد طبیعی n را در نظر بگیرید. اگر $\delta(G) > [\frac{n}{۲}]$، آنگاه G نرمال است.

۷.۱ گراف‌های قویاً منتظم

تعریف ۲۸.۱ یک گراف G از مرتبه‌ی n، قویاً k–منتظم نامیده می‌شود اگر اعدادی مانند k و λ و μ موجود باشند به طوری که در گراف k–منتظم G، هر دو رأس مجاور دارای λ همسایه‌ی مشترک و هر دو رأس غیرمجاور دارای μ همسایه‌ی مشترک باشند.

قضیه ۲۹.۱ [۱۴] اگر G یک گراف قویاً منتظم از مرتبه‌ی n با پارامترهای k، λ و μ باشد، آنگاه $k(k - \lambda - ۱) = \mu(n - k - ۱)$.

قضیه ۱.۳۰ [۱۴] فرض کنید G یک گراف قویاً منتظم با پارامترهای k، λ و μ باشد. آنگاه مقادیر ویژه‌ی G عبارتند از k و $\frac{1}{2}(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)})$.

قضیه ۱.۳۱ [۱۴] فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی ناصفر گراف G با تکرر $m(\lambda)$ باشد. در آن صورت $-\lambda$ هم مقدار ویژه‌ای از G با تکرر $m(-\lambda) = m(\lambda)$ است اگر و تنها اگر G یک گراف دوبخشی باشد.

قضیه ۱.۳۲ [۸] گراف G دارای یک مقدار ویژه‌ی مثبت است اگر و تنها اگر رأس‌های با درجه‌ی حداقل ۱ در آن یک گراف چندبخشی کامل تشکیل دهند.

فصل ۲

کران‌هایی از عدد رنگی دینامیکی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا در بخش اول کران بالایی از عدد رنگی دینامیکی برای برخی گراف‌ها بررسی شده و سپس در بخش بعد کران‌هایی اساسی برای $\chi_{۲}(G)$ بر حسب $\alpha(G)$ و $l(G)$ مطرح شده است. مثلاً بخش اول، برای یک گراف G، موارد زیر ثابت می‌شود:

۱) اگر $\Delta(G) \leq ۳$، آنگاه $\chi_{۲}(G) \leq ۴$. بجز حالت $G = C_{۵}$، که در این مورد داریم: $\chi_{۲}(G) = ۵$.

۲) اگر $\Delta(G) \geq ۴$، آنگاه $\chi_{۲}(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

۳) $\chi_{۲}(K_{۱,۱}) = ۲$، برای $m, n \geq ۲$، $\chi_{۲}(K_{۱,m}) = ۳$ و $\chi_{۲}(K_{m,n}) = ۴$، و برای $k \geq ۳$ داریم: $\chi_{۲}(K_{n_{۱},n_{۲},\ldots,n_{k}}) = k$.

قبل از بیان و اثبات قضیه‌ی (۱)، لم زیر را می‌آوریم.

لم ۱.۲ [۱۱] فرض کنید G یک گراف همبند با $\delta(G) = ۲$ باشد. در این صورت، کمانی از طول بزرگتر یا مساوی ۲ در G موجود و یا G یک دور است.

اثبات: فرض کنید $v \in V(G)$ با شرط $d(v) = ۲$ باشد و $P = a\ldots v\ldots b$ را بزرگترین مسیر شامل v در نظر بگیرید، به طوری که، درجه‌ی هر رأس داخلی در آن برابر ۲ است. از اینکه

$\delta(G)=۲$، لذا $d(a), d(b) \geq ۲$. اما هر رأس داخلی در P از درجه‌ی ۲ می‌باشد و این مسیر بلندترین مسیر است. در این صورت، یا $ab \in E(G)$ و یا $d(a), d(b) \geq ۳$. زیرا اگر به برهان خلف، فرض کنیم که $ab \notin E(G)$ و $d(a), d(b) \leq ۳$. (مثلاً اگر برای رأس a چنین حالتی را در نظر بگیریم) یعنی داشته باشیم $d(a) < ۳$، آنگاه ۲ یا $d(a) = ۱$. اگر $d(a) = ۱$، آنگاه با فرض مسئله یعنی $\delta(G) = ۲$ در تناقض است. حال اگر $d(a) = ۲$ و از طرفی چون $ab \notin E(G)$، پس رأسی مانند $v\prime \in V(G)$ و مسیری مانند $P\prime = v\prime a ... v ... b$ در G وجود دارد که طول $P\prime$ از طول P بیشتر است و این تناقض با آن دارد که P بلندترین مسیر شامل a و b است، پس $d(a) \geq ۳$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $d(b) \geq ۳$.

در این صورت، یکی از حالت‌های زیر داریم:

۱) اگر $d(a) = d(b) = ۲$، آنگاه $ab \in E(G)$ و G یک دور است.

۲) اگر $d(a), d(b) \geq ۳$، آنگاه P یک کمان از طول ≥ ۲ می‌باشد.

۳) در غیر این صورت، می‌توانیم فرض کنیم که $d(a) = ۲$ و $d(b) \geq ۳$. لذا $ab \in E(G)$، زیرا اگر $ab \notin E(G)$ و از طرفی چون $d(a) = ۲$، آنگاه دوباره با بلندترین مسیر بودن P در G در تناقض است. در نتیجه، برهان کامل می‌شود. □

۲.۲ کران‌های بالایی از عدد رنگی دینامیکی

قضایای این بخش از [۱۱] استخراج شده است.

قضیه ۲.۲ در گراف همبند G، اگر $\Delta(G) \leq ۳$، آنگاه $\chi_۲(G) \leq ۴$. به جز حالت $G = C_۵$، که در این حالت داریم: $\chi_۲(C_۵) = ۵$.

در قضایای زیر این کران برای حالت‌های مختلفی که G می‌تواند داشته باشد، بررسی و اثبات می‌شود. روش اثبات در هر یک از این قضیه‌ها با استقرا روی $|V(G)|$ بیان شده است. به طوری که برای $|V(G)| \leq ۴$، حکم واضح است. پس فرض می‌کنیم $|V(G)| \geq ۵$ و حکم برای $|V(G)| < n$ برقرار است. لذا برای $|V(G)| = n$ قضایای مربوطه را ثابت می‌کنیم.