

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش ریاضی

توزیع بیرنجام-ساندرز و تعمیم های آن

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت ساز

پژوهشگر:

زینب آقابزاز

آذر ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.



دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

خانم زینب آقابزاز

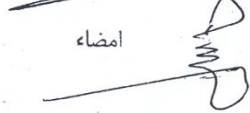
تحت عنوان

توزیع بیر نجام - ساندرز و تعمیم های آن

در تاریخ ۹۱/۹/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.


امضاء

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد **دکتر محمد حسین علامت ساز** امضاء


امضاء

۲- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر محمد بهرامی با مرتبه‌ی علمی استادیار


مدیر گروه

۳- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر حمید بیدرام با مرتبه‌ی علمی استادیار



تقدیم بہ

پدر و مادر مہربانم

تقدیر و شکر

حمد و سپاس مخصوص ذات حق تعالی است که هر چه هست از اوست.

خداوند را شاکرم که ببنده‌ی کمترین خود نعمت سلامتی و کسب علم را عطا فرمود و در مسیر بندگان خاصش که همان تعلیم و تعلم است

هدایت نمود. لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در رسیدن به این هدف عالی کمک ما و راهنمایی ما‌ی لازم را نموده‌اند و مهمل و همراه بودند،

شکر نمایم. خصوصاً از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمد حسین علامت‌ساز که در تدوین این پایان‌نامه راهنمایم بوده‌اند، به‌طور

ویژه تقدیر و شکر می‌نمایم. همچنین از خانواده عزیزم که همواره در تمامی مراحل پشتیبانم بوده‌اند و مراد رسیدن به این هدف یاری نموده‌اند

نهایت شکر و قدردانی را دارم.

زینب آقابزاز

پاییز ۹۰

چکیده

یکی از جنبه‌های بسیار مهم تحلیل‌های پارامتری طول عمر، تعیین توزیع طول عمر مناسب است. بیرن‌بام و ساندرز (1958) علاقه‌مند به یافتن مدلی برای توصیف زمان فرسودگی مواد بودند که ارتباط بین نمونه مواد و زمان فرسودگی آن را نشان دهد. آن‌ها مقاله‌ای تحت عنوان "خانواده جدیدی از توزیع‌های طول عمر" ارائه کردند و به همراهی گروهی از آماردانان مانند اساری و همکاران (1973) تحقیقات خود را در مورد این مدل ادامه دادند که منجر به معرفی و بررسی ویژگی‌های توزیع بیرن‌بام-ساندرز گردید. این توزیع طول عمر، توزیعی دو پارامتری بر اساس تحلیل‌های فیزیکی بود که از قضیه تجدید نشأت می‌گرفت. ایده این توزیع از تعداد سیکل‌های لازم برای فرسودگی ناشی از رشد ترک‌های مواد به وجود آمد و مبنای آن استدلال‌های فیزیکی برای خسارات تجمعی بود که باعث ایجاد فرسودگی مواد می‌شد. درحقیقت آن‌ها تعبیر احتمالی آن را به‌دست آوردند.

دزموند (1958) این توجه فیزیکی را با ساده‌تر کردن فوضه‌های اولیه که توسط بیرن‌بام و ساندرز مطرح شده بود، تحکیم بخشید و به دنبال آن تحقیقات توسط جانسون و همکاران (1995) و دیگر محققین ادامه یافت. توزیع فرسودگی عمری که توسط آن‌ها مطرح شد مبتنی بر کل زمان و خسارات تجمعی وارد شده بر سیستم بود. این خسارات باعث افزایش دامنه ترک‌ها و کاهش آستانه تحمل مواد و در نهایت تخریب و فروپاشی آن‌ها می‌شد. درحقیقت، عمر فرسودگی یکی از دلایل اصلی تخریب فلزات و بتن‌های ساختمانی و یا در مواد مدرن فیبرهای کربنی به حساب می‌آید. چندین توزیع آماری برای توصیف داده‌های طول عمر فرسودگی به‌کار می‌رود اگرچه توافق نظری در رابطه با تأثیرگذاری بیشتر آنها در تحلیل داده‌های فرسودگی وجود ندارد. از جمله آن‌ها توزیع‌های گاما، لگ نرمال، گوسین معکوس و توزیع بیرن‌بام-ساندرز است.

در این پایان‌نامه سعی داریم به نحوه پیدایش توزیع بیرن‌بام-ساندرز و معرفی این توزیع بپردازیم. برخی از خواص مهم توزیع مانند تحلیل‌های طول عمر و رفتار تابع نرخ خطر را بررسی می‌کنیم. گشتاورهای توزیع بیرن‌بام-ساندرز را مطالعه خواهیم کرد و برآورد پارامترهای آن را مطرح می‌کنیم. همچنین این توزیع را با دیگر توزیع‌هایی که برای توصیف خسارات تجمعی به‌کار می‌رود، مقایسه می‌کنیم. توزیع بیرن‌بام-ساندرز بریده شده را معرفی کرده و کاربردهای آن را در ریسک‌های مالی بیان می‌کنیم سپس با استفاده از توزیع‌های بیضوی تراز و چوله-بیضوی تراز به معرفی تعمیم‌های مختلف توزیع بیرن‌بام-ساندرز می‌پردازیم و رفتارهای توزیع را در حالات خاص بررسی می‌کنیم. همچنین حالت دو متغیره و چند متغیره این توزیع را معرفی کرده و به استنباط‌هایی در خصوص پارامترهای آن‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: تابع خطر، توزیع طول عمر، توزیع‌های بیضوی تراز، توزیع‌های چوله، عمر فرسودگی

فصل اول: مفاهیم و مقدمات اولیه

۱-۱	توزیع‌های طول عمر	۱
۲-۱	تحلیل‌های طول عمر	۲
۱-۲-۱	تابع چگالی احتمال	۲
۲-۲-۱	تابع قابلیت اعتماد	۳
۳-۲-۱	تابع نرخ خطر	۳
۴-۲-۱	تابع خطر	۴
۵-۲-۱	میانگین باقیمانده عمر	۴
۶-۲-۱	خانواده توزیع‌های طول عمر	۵
۷-۲-۱	سانسور	۷
۳-۱	انتخاب توزیع طول عمر	۸
۴-۱	مفاهیم فرسودگی	۱۰
۵-۱	توزیع‌های عمر فرسودگی	۱۱
۱-۵-۱	توزیع گاما	۱۱
۲-۵-۱	توزیع گوسین معکوس	۱۳
۳-۵-۱	توزیع لگ‌نرمال	۱۶
۶-۱	سیر تکاملی توزیع بیرنهام-ساندرز	۱۸
۷-۱	روند پایان‌نامه	۲۰

فصل دوم: توزیع بیرنهام-ساندرز و خواص آن

۱-۲	مقدمه	۲۱
۲-۲	استنتاج و پیدایش توزیع بیرنهام-ساندرز	۲۲
۱-۲-۲	چگالی توزیع بیرنهام-ساندرز	۲۶
۲-۲-۲	کاربردهای توزیع بیرنهام-ساندرز	۲۷

۳-۲	ارتباط میان دو توزیع عمر فرسودگی	۲۸
۱-۳-۲	رابطه بین توزیع BS و IG	۲۸
۲-۳-۲	مقایسه مدل عمر فرسودگی BS و IG	۲۹
۴-۲	مولد عدد تصادفی برای توزیع BS	۳۰
۱-۴-۲	استنتاج در مورد مولد عدد تصادفی	۳۱
۲-۴-۲	آزمون نیکویی برازش	۳۲
۵-۲	استنباط در مورد پارامترهای توزیع BS	۳۳
۱-۵-۲	استنباط پارامترها به روش گرافیکی	۳۴
۲-۵-۲	برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی	۳۶
۳-۵-۲	برآوردگرهای گشتاوری تعدیل یافته	۳۸
۴-۵-۲	برآوردگرهای جکنایف	۴۲
۵-۵-۲	نتایج شبیه‌سازی مونت-کارلو	۴۳
۶-۲	برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای برای پارامترهای توزیع BS براساس سانسور نوع II	۴۷
۱-۶-۲	برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی	۴۷
۲-۶-۲	الگوریتم MCEM	۵۱
۷-۲	نرخ خطر توزیع BS	۵۳
۱-۷-۲	شکل تابع نرخ خطر توزیع BS	۵۳

فصل سوم: توزیع BS بریده شده

۱-۳	مقدمه	۵۷
۲-۳	مدل جدید TBS	۶۰
۱-۲-۳	چگالی و خواص توزیع TBS	۶۰
۲-۲-۳	گشتاورهای توزیع TBS	۶۴
۳-۲-۳	نرخ خطر توزیع TBS	۶۷
۴-۲-۳	اندازه‌های ریسک توزیع TBS	۶۸

۷۱.....	۵-۲-۳ برآورد و استنباط در توزیع TBS
۷۳.....	۳-۳ کاربرد
۷۳.....	۱-۳-۳ مشکلات در تحلیل
۷۳.....	۲-۳-۳ تحلیل داده‌ها
۷۴.....	۳-۳-۳ بررسی مدل
۷۵.....	۴-۳-۳ تحلیل تأکیدی داده‌ها

فصل چهارم: تعمیم‌های توزیع بیرن‌بام-ساندرز

۷۶.....	۱-۴ مقدمه
۷۷.....	۱-۱-۴ توزیع‌های بیضوی تراز
۸۲.....	۲-۱-۴ توزیع‌های چوله-بیضوی
۸۳.....	۲-۴ توزیع بیرن‌بام-ساندرز تعمیم یافته
۸۵.....	۱-۲-۴ معرفی توزیع بیرن‌بام-ساندرز تعمیم یافته (GBS)
۸۷.....	۲-۲-۴ برخی از خواص توزیع GBS
۹۰.....	۳-۲-۴ گشتاورهای توزیع GBS
۹۲.....	۴-۲-۴ تولید اعداد تصادفی
۹۵.....	۵-۲-۴ تحلیل‌های طول عمر
۹۸.....	۶-۲-۴ قابلیت اعتماد سیستم: خاصیت جدیدی از توزیع BS
۹۹.....	۷-۲-۴ استنباط
۱۰۴.....	۸-۲-۴ نیکویی برازش در مدل GBS
۱۰۵.....	۹-۲-۴ کاربردها
۱۱۱.....	۴-۴ توزیع بیرن‌بام-ساندرز تعمیم یافته مضاعف
۱۱۳.....	۱-۴-۴ تابع چگالی
۱۱۳.....	۲-۴-۴ نمودارهای چگالی
۱۱۵.....	۳-۴-۴ خواص و مشخصه‌ها

۱۱۷.....	۴-۴-۴ گشتاورها
۱۱۹.....	۴-۴-۵ توزیع SN-BS

فصل پنجم: توزیع بیرنهام- ساندرز چند متغیره

۱۲۱.....	۱-۵ مقدمه
۱۲۲.....	۲-۵ توزیع بیرنهام- ساندرز دو متغیره
۱۲۲.....	۱-۲-۵ چگالی و خواص توزیع BVBS
۱۲۷.....	۲-۲-۵ استنباط
۱۲۹.....	۳-۲-۵ تحلیل داده‌ها
۱۳۱.....	۳-۵ توزیع بیرنهام- ساندرز تعمیم یافته چند متغیره
۱۳۹.....	۴-۵ توزیع بیرنهام- ساندرز دو متغیره چوله
۱۴۴.....	۵-۵ توزیع بیرنهام- ساندرز چند متغیره چوله
۱۴۵.....	۱-۵-۵ استنباط
۱۴۸.....	۶-۵ توزیع بیرنهام- ساندرز تعمیم یافته مضاعف دو متغیره
۱۵۰.....	پیوست
۱۵۳.....	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۵۸.....	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۶۳.....	منابع

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱: نمودارهای pdf، cdf، تابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع گاما برای مقادیر نشان داده شده ۱۳۰.	
شکل ۱-۲: نمودارهای pdf، cdf، تابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع گوسین معکوس برای مقادیر نشان داده شده ۱۶.	
شکل ۱-۳: نمودارهای pdf، cdf، تابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر توزیع لگ‌نرمال برای مقادیر نشان داده شده ۱۸.	
شکل ۲-۱: نمودار تابع چگالی توزیع BS برای مقادیر نشان داده شده پارامترها ۲۷.	
شکل ۲-۲: نمودار تابع توزیع BS برای مقادیر نشان داده شده پارامترها ۳۳.	
شکل ۲-۳: نمودار احتمال مشاهدات تصادفی از توزیع BS با پارامترهای $\alpha = 0.17$ ، $\beta = 131$ و $n = 101$ ۳۳.	
شکل ۲-۴: نمودار احتمال مشاهدات تصادفی از توزیع BS با پارامترهای $\alpha = 1$ ، $\beta = 1$ و $n = 30$ ۳۵.	
شکل ۲-۵: نمودار احتمال توزیع BS برای داده‌های psi31 ۳۵.	
شکل ۲-۶: نمودار تابع نرخ خطر توزیع BS برای مقادیر نشان داده شده پارامترها ۵۶.	
شکل ۳-۱: نمودار QQ با کران‌های اطمینان براساس مدل‌های BS و TBS برای داده‌های زیان ۷۵.	
شکل ۴-۱: نمودارهای pdf توزیع‌های KT و PVII برای مقادیر نشان داده شده ۸۰.	
شکل ۴-۲: نمودارهای pdf توزیع‌های تعیین شده و بزرگنمایی دم راست pdf آن‌ها ۸۱.	
شکل ۴-۳: نمودارهای چگالی توزیع GBS برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1$ و هسته‌های تعیین شده ۸۹.	
شکل ۴-۴: نمودارهای نرخ خطر BS-KT، BS، BS-t (راست) و BS-cau، BS-lap، BS و BS- ۹۷.	
شکل ۴-۵: هیستوگرام و نمودار جعبه‌ای psi31 ۱۰۶.	
شکل ۴-۶: تابع لگاریتم درست‌نمایی برای مدل BS-t در برابر v برای psi31 ۱۰۷.	
شکل ۴-۷: نواحی اطمینان تقریبی برای پارامترهای مدل‌های BS و BS-tg داده‌های psi31 ۱۰۸.	
شکل ۴-۸: نمودارهای QQ مدل‌های BS و BS-tg داده‌های psi31 ۱۰۹.	

- شکل ۴-۹: cdf تجربی و تئوری BS-t₈ و هیستوگرام به همراه pdf برآورد شده BS-t₈ برای psi31
 ۱۰۹.....
- شکل ۴-۱۰: تابع قابلیت اعتماد برآورد شده و نرخ خطر مدل BS-t₈ برای psi31
 ۱۱۰.....
- شکل ۴-۱۱: cdf تجربی در برابر cdf تئوری BS-t₄ برای psi31c20
 ۱۱۱.....
- شکل ۴-۱۲: نمودارهای چگالی توزیع "GBS" حاصل از توزیع پیرسون نوع VII برای $\alpha = 0.8$ و $\beta = 0.5$ و r و q تعیین شده (P VII(r,q))
 ۱۱۴.....
- شکل ۴-۱۳: نمودارهای چگالی توزیع "GBS" حاصل از توزیع نوع-کاتز برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$ و r, q و s تعیین شده (KT(q,r,s))
 ۱۱۴.....
- شکل ۴-۱۴: نمودارهای چگالی "GBS" به دست آمده از توزیع های تعیین شده به ازای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$
 ۱۱۵.....
- شکل ۴-۱۸: نمودار چگالی های توزیع BS و توزیع های T₍₁₎ و T₍₂₎
 ۱۲۰.....
- شکل ۵-۱: pdf های توأم به ازای $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$ و مقادیر مختلف ρ
 ۱۲۴.....
- شکل ۵-۲: تبدیل TTT مقیاس BMD های اندازه گیری شده قبل و بعد از آزمایش
 ۱۳۱.....
- شکل ۵-۳: نمودار چگالی توزیع نرمال دو متغیره و نمودار مقطع (تراز) آن
 ۱۳۴.....
- شکل ۵-۴: نمودار چگالی توزیع نرمال استاندارد دو متغیره و نمودار مقطع (تراز) آن
 ۱۳۵.....
- شکل ۵-۵: نمودارهای تراز تابع چگالی SBVBS به ازای مقادیر $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$
 ۱۴۳.....

فهرست جدول‌ها

عنوان	صفحه
جدول ۱-۲: برآورد α و β به روش گرافیکی	۳۵
جدول ۲-۲: برآوردهای حداقل مربعات و فواصل اطمینان ۹۰٪	۳۶
جدول ۳-۲: میانگین برآوردگرها براساس شبیه‌سازی مونت-کارلو ($\beta = 1.0$)	۴۴
جدول ۴-۲: انحراف استاندارد برآوردگرها براساس شبیه‌سازی مونت-کارلو ($\beta = 1.0$)	۴۵
جدول ۵-۲: برآوردهای نقطه‌ای α و β در مثال ۱-۲	۴۶
جدول ۶-۲: انحراف استاندارد برآوردها و فواصل اطمینان برای α و β در مثال ۱-۲	۴۶
جدول ۷-۲: برآوردهای نقطه‌ای α و β در مثال ۲-۲	۴۷
جدول ۸-۲: انحراف استاندارد برآوردها و فواصل اطمینان برای α و β در مثال ۲-۲	۴۷
جدول ۱-۳: آمار توصیفی برای داده‌های زیان بریده نشده (NT) و بریده شده (T) (in Mex \$ $\times 100$)	۷۴
جدول ۲-۳: مقادیر VaR و TVaR و نیاز سرمایه‌ای برای ضررها (in Mex \$ $\times 100$)	۷۵
جدول ۱-۴: هسته (g) و ثابت نرمال‌ساز (c) برای توزیع‌های نشان داده شده	۷۹
جدول ۲-۴: cdf توزیع‌های تعیین شده	۸۱
جدول ۳-۴: مقادیر $\omega_g(u)$ و مشتق آن برای هسته (g) توزیع‌های متقارن مشخص شده	۸۲
جدول ۴-۴: آمار توصیفی برای داده‌های psi31	۱۰۶
جدول ۵-۴: برآورد پارامترهای توزیع GBS-t	۱۰۷
جدول ۶-۴: برآوردهای $CI_{95\%}$ برای α و β تحت توزیع‌های مشخص شده برای psi31	۱۰۸
جدول ۷-۴: آزمون SIC و KS براساس مدل‌های BS و GBS-tg داده‌های psi31	۱۰۸
جدول ۸-۴: برآوردهای ML پارامترهای α و β و آزمون KS برای مدل‌های تعیین شده داده‌های psi31c20	۱۱۰
جدول پ-۱: طول عمر مواد آلومینیوم تحت 21,000 psi	۱۵۰
جدول پ-۲: طول عمر مواد آلومینیومی تحت 26000 psi	۱۵۱
جدول پ-۳: طول عمر مواد آلومینیومی تحت 31000 psi	۱۵۱
جدول پ-۴: عمر فرسودگی یاطاقان	۱۵۲
جدول پ-۵: زمان بقای خوکچه‌های هندی	۱۵۲

کوتاه نوشتها

ACI	Approximate confidence interval
AIC	Akaike information criterion
a.s	Almost surely
BS	Birnbaum-Saunders
BFR	Bathtub failure rate
BVBS	Bivariate Birnbaum-Saunders
Cdf	Cumulative distribution function
CI	Confidence interval
CK	Coefficient of kurtosis
CS	Coefficient of skewness
CV	Coefficient of variation
DF	Decreasing failure rate
DFRA	Decreasing failure rate average
DMRL	Decreasing mean residual life
DRL	Decreasing residual life
EC	Elliptical contoured
GBS	Generalized Birnbaum-Saunders
GBS''	Doubly generalized Birnbaum-Saunders
IBFR	Inverse bathtub failure rate
IFR	Increasing failure rate
IFRA	Increasing failure rate average
IG	Inverse Gaussian
iid	Independent and identically distribution
IMRL	Increasing mean residual life
IRL	Increasing residual life
JMLE	Jackknife maximum likelihood estimate
JMME	Jackknife modified moment estimate
KT	Kotz type
KS	Kolmogorov-Smirnov
LIII	Type-III generalized logistic
LN	Lognormal
ML	Maximum likelihood
MM	Modified moment
NBU	New better than used
NBUE	New better than used in expectation

NWU	New worse than used
NWUE	New worse than used in expectation
Pdf	Probability density function
PE	Power exponential
Psi	Pounds per square inch
PVII	Pearson type VII
r.v	Random variable
SBVBS	Skewed bivariate Birnbaum-Saunders
SD	Standard deviation
SEC	Skew-elliptical contoured
SHN	Sinh-Normal
SIC	Schwarz information criterion
SMVBS	Skewed multivariate Birnbaum-Saunders
SN	Skew-Normal
SN-BS	Skew-normal- Birnbaum-Saunders
TBS	Truncated Birnbaum-Saunders
TVaR	Tail value at risk
VaR	Value at risk

فصل اول

مفاهیم و مقدمات اولیه

برای درک بهتر مطالب عنوان شده در این پایان‌نامه، لازم است ابتدا مفاهیم اولیه ضروری را شرح دهیم. به این منظور مختصری در مورد توزیع‌های طول عمر، مفاهیم قابلیت اعتماد و نحوه انتخاب توزیع‌های طول عمر مطالبی را شرح می‌دهیم. از آنجایی که توزیع بیرنهام-ساندرز از جمله توزیع‌های عمر فرسودگی محسوب می‌شود، مفاهیم فرسودگی، توزیع‌های عمر فرسودگی و سیر تکاملی توزیع بیرنهام-ساندرز نیز در این فصل مطرح می‌شود.

1-1 توزیع‌های طول عمر

به‌طور کلی، تحقیقات مرتبط با روش‌های آماری و مدل‌سازی‌های داده‌های طول عمر این تصور را به‌وجود می‌آورد که متغیر طول عمر¹، متغیر تصادفی پیوسته و مثبتی است که زمان سپری شده تا وقوع پیشامد مورد نظر را نشان می‌دهد. از آنجایی که سالخوردگی اقلام² (به‌عنوان مثال، مؤلفه‌ها، سیستم‌ها مواد، ساختارها، ارگان‌ها، واحدها و...) همیشه در قالب زمان قابل اندازه‌گیری نیستند، در برخی موارد طول عمر با تعابیر دیگری از متغیرها اندازه‌گیری می‌شوند. برای مثال، تعداد کیلومترهای طی شده، دوام نمونه مواد تا فروپاشی آن، سطح فرسودگی، انعطاف‌پذیری مواد چسبنده و تعداد دوره‌هایی که مواد در طی آن فرسوده می‌شوند. به‌علاوه اصطلاح متغیر طول عمر به هر متغیر تصادفی مثبت نیز اطلاق می‌شود (مانند میزان بارش باران). مدل‌های آماری مرتبط با متغیرهای طول عمر، توزیع‌های طول عمر نامیده می‌شوند. برای جزئیات بیشتر در مورد توزیع‌های طول عمر به مارشال و الکین³ (2007) مراجعه کنید.

¹ -Lifetime

² - Aging of items

³ -Marshall and Olkin

نظریه قابلیت اعتماد مسائل آماری و احتمالی توزیع‌های طول عمر اقلام شکست¹ را مورد بحث قرار می‌دهد. روش‌های احتمالی این نظریه کارایی و از کارافتادگی مؤلفه‌ها را در قالب متغیرهای طول عمر مدل‌سازی شده توصیف می‌کند و به این ترتیب می‌توان تابع بقا، نرخ خطر و ... مؤلفه‌ها را تعیین کرد. جنبه آماری این نظریه در حل مسائل برآورد پارامترهای توزیع‌های طول عمر است. قابلیت اعتماد یا بقا احتمالی است که متغیر طول عمر $T > 0$ از زمان ثابت t بیشتر شود. به عبارتی قابلیت اعتماد مؤلفه‌ها برحسب زمان t به صورت $R_T(t) = \bar{F}_T(t) = P(T > t)$ به ازای $t \geq 0$ ، تعریف می‌شود.

2-1 تحلیل‌های طول عمر

در این بخش مفاهیم قابلیت اعتماد متغیرهای طول عمر بیان می‌شود.

1-2-1 تابع چگالی احتمال

فرض کنید $f_T(\cdot)$ و $F_T(\cdot)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال (pdf) و تابع توزیع تجمعی (cdf) متغیر تصادفی T باشند. در این صورت داریم

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f_T(x) dx \quad ; \quad t > 0,$$

که در آن $f_T(t)$ را می‌توان به عنوان تغییرات لحظه‌ای احتمال شکست در بازه $[t, t + \Delta t]$ تعبیر کرد. زیرا داریم

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t+\Delta t)}{\Delta t} \quad ; \quad t > 0.$$

موضوع بااهمیت دیگر مرتبط با تحلیل‌های طول عمر، چندک q -ام توزیع طول عمر است که با t_q ، به ازای $0 < q < 1$ ، نشان داده می‌شود. به عبارتی t_q وارون تابع توزیع تجمعی است و بیانگر زمانی است که $100\% \times q$ جامعه شکست خورده است. چندک q -ام $F_T(\cdot)$ کوچکترین طول عمری است که $P(T \leq t_q) \geq q$ باشد. $F_T(t)$ برحسب t غیرنزولی است در حالی که با افزایش t ، t_q تنها مقدار ثابت $F_T(t_q) = q$ را اختیار می‌کند. این مقدار به صورت $t_q = F_T^{-1}(q)$ به دست می‌آید. زمانی که تابع توزیع در برخی فواصل ثابت باشد ممکن است بیش از یک جواب برای $F_T(t) = q$ وجود داشته باشد. در این حالت، t_q کمترین مقدار t است که $F_T(t) = q$ باشد.

¹-Failure

2-2-1 تابع قابلیت اعتماد

قابلیت اعتماد¹ متغیر تصادفی T ، احتمالی است که T از مقدار t بیشتر باشد. در این صورت داریم

$$R_T(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) = \bar{F}_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(x) dx \quad ; \quad t > 0, \quad (4 \ 1)$$

به علاوه، $R_T(0) = 1$ و $R_T(t)$ تابعی پیوسته و غیر صعودی است.

تابع قابلیت اعتماد شرطی در زمان $(t + x)$ به شرطی که مؤلفه‌ها تا زمان x کار کنند به صورت

$$R_T(t | x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(x)} \quad ; \quad t > 0, x > 0, \quad (4 \ 1)$$

است، که در آن $0 < R_T(\cdot) < 1$.

3-2-1 تابع نرخ خطر

علاوه بر تابع بقا یا قابلیت اعتماد، شاخص‌های دیگری از جمله تابع نرخ خطر² در تحلیل‌های قابلیت اعتماد به کار می‌رود. این شاخص تابع شانس³، نرخ شکست⁴، شدت مرگ و میر⁵ یا نرخ ریسک نیز نامیده می‌شود. جزئیات بیشتر در این مورد در کتاب مارشال و الکین (2007) بیان شده است.

نرخ خطر اهمیت ویژه‌ای در قابلیت اعتماد دارد چرا که در مهندسی، اطلاعات زیادی در خصوص فرسودگی مؤلفه‌ها در اختیار ما قرار می‌دهد. از طرف دیگر، در علوم پزشکی نیز بسیاری از نتیجه‌گیری‌های بقا بر اساس نرخ خطر صورت می‌گیرد. نرخ خطر به عنوان نرخ خطر آنی یا تغییرات شکست در فاصله زمانی t تا $t + \Delta t$ ، زمانی که مؤلفه‌ها تا لحظه t کار می‌کنند، تعریف می‌شود یعنی

$$h_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \quad ; \quad t > 0, \quad (4 \ 1)$$

به این ترتیب $h_T(\cdot) \geq 0$ و $\int_0^{\infty} h_T(t) dt = \infty$.

اگر $\Delta t > 0$ ناچیز باشد، $h_T(t) \times \Delta t$ به طور تقریبی احتمال از کار افتادگی در بازه $[t, t + \Delta t]$ را با فرض اینکه مؤلفه‌ها تا زمان t در حال کار کردن باشد نشان می‌دهد. به عبارتی داریم

$$h_T(t) \times \Delta t \approx P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) \quad ; \quad t > 0.$$

¹-Reliability

²-Hazard rate function

³-Chance function

⁴-Failure rate

⁵-Force of mortality

اگر نرخ خطر معلوم باشد توابع چگالی، توزیع و قابلیت اعتماد با فرض داشتن یکی از آنها به دست می آید. اهمیت این موضوع به این خاطر است که رفتار نرخ خطر به طور تجربی در مطالعات معلوم است. به این ترتیب دیگر توابع ذکر شده از نرخ خطر به دست می آیند.

4-2-1 تابع خطر^۱

می دانیم با انتگرال گیری از تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی به دست می آید. به طور مشابه می توان با انتگرال گیری از نرخ خطر، نرخ خطر تجمعی یا تابع خطر را به دست آورد. نرخ خطر تجمعی متغیر تصادفی T به صورت زیر به دست می آید

$$H_T(t) = \int_0^t h_T(u) du = -\log(R_T(t)) ; \quad t > 0.$$

با استفاده از نرخ خطر تجمعی می توان رفتار نرخ خطر را در بازه زمانی ثابت $[0, t]$ نمایش داد. بنابراین میانگین نرخ خطر^۲ (FRA) متغیر تصادفی T به صورت زیر به دست می آید

$$FRA(t) = \frac{H_T(t)}{t} = \frac{-\log(R_T(t))}{t} ; \quad t > 0, \quad (۴)$$

به ازای $0 < R_T(\cdot) < 1$.

5-2-1 میانگین باقیمانده عمر

میانگین زمان تا وقوع شکست، میانگین طول عمر نامیده می شود و به صورت زیر به دست می آید

$$\mu = E(T) = \int_0^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} R_T(t) dt, \quad (۵)$$

میانگین باقیمانده عمر بر حسب تابع قابلیت اعتماد تعریف می شود. میانگین باقیمانده عمر، متوسط زمانی است که مؤلفه پس از زمان X فعال است مشروط بر آنکه تا زمان X سالم باشد. یعنی

$$\mu_x = E(T - x | T > x) = \int_0^{\infty} R_T(t | x) dt = \frac{\int_x^{\infty} R_T(u) du}{R_T(x)} ; \quad x > 0,$$

به ازای $0 < R_T(\cdot) < 1$.

¹ - Failure function

² - Failure rate average