بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

موضوع:

مضروب‌ها و هنگ‌ها روی جبرهای باناخ گروه‌های موضعاً فشرده

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مدقالچی

تدوین:

قدیر مهاجری مینایی

شهریور ماه ۱۳۷۸

بسمه تعالی

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

مضروب‌ها و مدول‌ها روی جبرهای باناخ گروه‌های موضعاً فشرده

استاد راهنما : آقای دکتر علیرضا مدقالچی

داور خارجی : آقای دکتر عبدالحمید ریاضی

داور داخلی : آقای دکتر امیر خسروی

دانشجو : **آقای قدیر مهاجری مینایی**

زمان : ساعت ۴ بعدازظهر روز دوشنبه مورخ ۷۸/۶/۸

مکان : دانشگاه تربیت معلم، مؤسسه‌ی ریاضیات دکتر مصاحب.

خلاصه:

ابتدا هنگ (Modulus) حاصلضرب عناصر جبرهای باناخی که دارای ساختار مشبکه‌ای و به گروه‌های موضعاً فشرده مربوط می‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند و سپس برای گروه موضعاً فشرده G، هنگ مضروب‌های (Multiplier)، $L^1(G)$، $L^\infty(G)$ و $L^1(G)^{**}$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم در حقیقت نشان داده می‌شود که اگر $T : L^1(G) \mapsto L^1(G)$ یک مضروب باشد هنگ T که به $|T|$ نمایش می‌دهیم نیز یک مضروب است و به طور مشابه برای $L^\infty(G)$ نشان می‌دهیم که برای هر $\mu \in M(G)$، $\lambda^*_{|\mu|} = |\lambda^*_\mu|$ وقتی که $L^1(G) \longrightarrow L^1(G) : (f \longrightarrow \mu * f)\lambda_\mu$ و λ^*_μ الحاقی آن باشد و نشان می‌دهیم که مشابه حکم فوق برای $L^1(G)^{**}$ درست نیست. نتیجه اینکه وقتی G گروه موضعاً فشرده و به عنوان گروه گسسته میانگین‌پذیر باشد یک خاصیت مشخصه برای عملگرهای $L^\infty(G)$ که با پیچش‌ها جابجا می‌شوند به دست می‌آوریم که نشان می‌دهیم $\lambda^*_\mu \in (\mathrm{Hom}(L^\infty(G)))'$ فقط و فقط وقتی که $\mu \in M(G)$ اندازه‌ای گسسته باشد.

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تاریخ ____
شماره ____
پیوست ____
واحد ____

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم/آقای قدیرمیا جری‌مینا دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ محض در روز دوشنبه مورخه ۷۸/۶/۸ در مؤسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون نوزده و بیست و پنج صدم می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما
دکتر علیرضا مدقالچی

ممتحنین خارجی
۱- دکتر عبدالحمید ریاضی
۲-

ممتحنین داخلی
۱- دکتر امیرخسروی
۲-

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و
مهندسی کامپیوتر

تهران - خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی - پلاک ۵۹۹ - کد پستی ۱۵۶۱۴

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می‌دانم که از استاد گرامی جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی که در مقطع کارشناسی‌ارشد راهنما و مشوق اینجانب بوده‌اند تشکر نمایم.
همچنین از داوران محترم آقایان دکتر عبدالحمید ریاضی و دکتر امیر خسروی که قبول زحمت نمودند و پایان‌نامه را مطالعه نمودند قدردانی می‌نمایم. از آقای دکتر اسماعیل بابلیان ریاست محترم دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر به خاطر مساعدتهایشان در این مقطع تحصیلی سپاسگزارم.

قدیر مهاجری مینایی

شهریور ماه ۱۳۷۸

پیشگفتار

بسیاری از جبرهای با ناخ به‌گروه‌های موضعاً فشرده‌ای مربوط می‌شوند که ساختار مشبکه‌ای دارند بعنوان مثال $L^1(G)$ یک مشبکه کامل است که این ساختار مشبکه‌ای به‌فضای دوگان دوم $L^1(G)^{**}$ قابل توسیع است. یک دسته از جبرهای باناخ که دارای خاصیت جالبی هستند F- جبرها می‌باشند (جبر باناخ A را یک F- جبر می‌گوییم هرگاه A^* یک W^*- جبر و همانی A^* تابعک ضربی روی A باشد) روی این جبرها می‌توان رابطه ترتیبی جزیی تعریف کرد به‌این صورت که چون A^*، یک C^*- جبر است لذا رابطه ترتیبی روی A^* وجود دارد در نتیجه تابعک خطی مثبت روی A^* تعریف شده است و لذا روی A^{**} رابطه ترتیبی می‌توان تعریف کرد و اگر A را بعنوان زیرمجموعه‌ای از A^{**} در نظر بگیریم (با نگاشت گلفاند) در آن صورت رابطه ترتیبی روی A تعریف می‌شود. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک جبر باناخ باشد تابعک خطی $T:A\rightarrow A$ که برای هر $b\in A$ و a، $T(ab)=T(a)b$ ($T(ab)=aT(b)$) یک مضروب چپ (راست) نامیده می‌شود.

در این پایان‌نامه ابتدا برای هر عملگر کراندار T از مشبکه برداری باناخ کامل X به‌مشبکه برداری باناخ کامل Y عملگر مثبت $|T|$ که هنگ T می‌گوییم برای هر $x\in X^+$ به‌صورت

$|T|(x)=\sup\{|T(y)|:|y|\leq x\}$

تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر T یک مضروب چپ (راست) $L^1(G)$ باشد $|T|$ نیز چنین است و نشان می‌دهیم برای هر $\mu\in M(G)$، $|\lambda_\mu^*|=\lambda_{|\mu|}^*$ که λ_μ^* الحاقی

$$(f\rightarrow\mu*f)\ \lambda_\mu:L^1(G)\rightarrow L^1(G)$$

و نشان می‌دهیم که هنگ مضروب λ_n لزوماً روی $L^1(G)^{**}$ یک مضروب چپ نیست که

$$(m\rightarrow nm)\ \lambda_n:L^1(G)^{**}\rightarrow L^1(G)^{**}$$

و در پایان نشان می‌دهیم که $\lambda_\mu^*\in(\mathrm{Hom}(L^\infty(G))'$

فقط و فقط وقتی که μ اندازه‌ای گسسته باشد که در آن G گروه موضعاً فشرده ناگسسته و بعنوان گروه گسسته میانگین‌پذیر است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

پیشنیازها

بخش اول: ۱ـ۱ـ آنالیز تابعی

(۱ـ۱ـ۱) تعریف: فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و تابع $\|\ \|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ دارای خواص زیر باشد.

(۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

(۲) برای هر $x \in X$ و $y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(۳) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

در این صورت تابع $\|\ \|$ را یک نرم نامیده و به فضای برداری X، یک فضای نرمدار می‌گویند.

اگر فضای نرمدار X تحت متریک $(x, y \in X) \quad d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد یعنی هر دنباله‌کشی در آن همگرا باشد، X را **فضای باناخ** می‌گوییم.

(۱ـ۱ـ۲) تعریف: نگاشت T، از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی یا عملگر

خطی می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، $y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

هر تبدیل خطی از فضای برداری X به توی میدان اعداد مختلط یک **تابعک خطی** نامیده می‌شود.

(۱ـ۱ـ۳) تعریف: فرض کنید Y, X دوفضای نرمدار و $T.X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد گوییم T **کراندار** است هرگاه عدد ثابتی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم $||T(x)|| \leq M||x||$. همچنین نرم تابعک T را که به $||T||$ نمایش می‌دهیم به صورت

$$||T|| = \sup\{\frac{||T(x)||}{||x||}; ||x|| \neq ۰\} = \sup\{||Tx\ || : ||x|| \leq ۱\}$$

تعریف می‌کنیم.

(۱ـ۱ـ۴) قضیه: مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرمدار X به توی فضای باناخ Y با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای و نرم تعریف شده در (۱ـ۱ـ۳) یک فضای باناخ تشکیل می‌دهد و عموماً آن را به $B(X,Y)$ نمایش می‌دهند.

حالت خاص قضیه (۱ـ۱ـ۴) این است که $Y = \mathbb{C}$. در این حالت $B(X,Y)$ را به X^* نمایش می‌دهیم و X^* را دوگان اول X می‌نامند.

(۱ـ۱ـ۵) تعریف: فرض کنید Y, X دو مجموعه و $A = \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از توابع تعریف شده از X به توی Y باشد در این صورت گوییم A نقاط X **را جدا می‌کند** هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز y, x در X، عضوی مانند f_α در A موجود باشد به طوری که $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

(۱ـ۱ـ۶) مثال: فرض کنیم X فضای نرمدار X^* دوگان و X^{**} دوگان X^* باشد. تابع $\wedge : X \longrightarrow X^{**}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\wedge(x) = \hat{x}$$

که برای هر $f \in X^*$، $\hat{x}(f) = f(x)$

به راحتی ثابت می‌شودکه X^* نقاط X را جدا می‌کند و $\{\hat{x} : x \in X\}$ نقاط X^* را جدا می‌کند و تابع $\wedge : X \longrightarrow X^{**}$ یک تابعک خطی و برای هر $x \in X$، $||\wedge x|| = ||x||$ [۲۴_۳.۴]

(۱_۱_۷) توپولوژی ضعیف: فرض کنید X فضای نرمدار و X^* دوگان X باشد توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی ضعیفترین توپولوژی τ روی X که هر $\wedge \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد، **توپولوژی ضعیف** روی X می‌نامند در اینجا آن را به τ_w یا w نمایش می‌دهیم گاهی آن را به $\sigma(X, X^*)$ نیز نمایش می‌دهیم.

(۱_۱_۸) توپولوژی ضعیف ستاره: فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان X باشد و X^{**} دوگان X^* باشد. توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ $\{\hat{x} : x \in X\}$ روی X^* توپولوژی ضعیف روی X^* است. یعنی ضعیفترین توپولوژی روی X^* که هر $\hat{x}(x \in X)$ نسبت به آن پیوسته است، این توپولوژی را، **توپولوژی ضعیف ستاره** روی X^* می‌نامند. در اینجا آن را با τ_{w^*} یا w^* نمایش می‌دهیم.

(۱_۱_۹) قضیه (هان ـ باناخ): فرض می‌کنیم M زیرفضای، فضای برداری نرمدار X و f یک تابعک خطی کراندار روی M باشد در این صورت $F \in X^*$ موجود است به طوری که به ازای هر $x \in M$، $F(x) = f(x)$ و $||F|| = ||f||$ [۲۶_۵.۱۶]

(۱_۱_۱۰) عملگرهای فشرده: فرض می‌کنیم X و Y فضاهای باناخ و U گوی باز واحد در X باشد عملگر $T \in B(X, Y)$ را یک **عملگر فشرده** گوییم هرگاه $\overline{T(U)}$ در Y فشرده باشد

(۱_۱_۱۱) فضای برداری توپولوژیک: فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد که: F میدان اعداد مختلط یا میدان اعداد حقیقی است، τ یک توپولوژی روی X باشد به طوری که

(۱) به ازای هر $x \in X$، مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته است؛

(۲) نگاشتهای $+ : X \times X \longrightarrow X$ $((x,y) \longmapsto x+y)$ و $\circ : F \times X \longrightarrow X$ $((\alpha, x) \longmapsto \alpha x)$

پیوسته‌اند؛

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌گوییم.

(۱ـ۱ـ۱۲) تعریف: فرض‌کنیم X یک فضای نرمدار و X^{**} دوگان دوم X است نگاشت $\phi : X \longrightarrow X^{**}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(x)(\Lambda) = \Lambda(x) \quad (x \in X, \Lambda \in X^*)$$

نشانندهٔ طبیعی X در X^{**} می‌نامند.

(۱ـ۱ـ۱۳) قضیه: اگر X یک فضای نرمدار باشد آن گاه نشاننده طبیعی ϕ یک ایزومورفیسم ایزومتری از X به روی $\phi(X)$ است [۶ـII.۳.۱۹]

(۱ـ۱ـ۱۴) قضیه گلدشتاین: فرض کنید ϕ نشاننده طبیعی فضای باناخ X در X^{**} و S^{**}, S بترتیب گوی بسته واحد در X^{**}, X باشند در این صورت $\phi(S)$ با توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X^{**} در S^{**} چگال است و در نتیجه $\phi(X)$ با همان توپولوژی در X^{**} چگال است [۶ـV.۴.۵]

(۱ـ۱ـ۱۵) تعریف: فرض‌کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T \in B(X, Y)$ نگاشت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ که برای هر $x \in X$ و $\varphi \in Y^*$ به صورت $T^*\varphi(x) =< T^*\varphi, x >=< \varphi, Tx >$ تعریف می‌شود **عملگر الحاقی** T می‌نامیم.

(۱ـ۱ـ۱۶) قضیه: فرض‌کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X, Y)$ در این صورت T فشرده است اگر و فقط اگر T^* فشرده باشد [۲۴ـ۴.۱۹]

(۱ـ۱ـ۱۷) قضیه: فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T \in B(X,Y)$ در این صورت $T^* \in B(Y^*, X^*)$ و $||T|| = ||T^*||$ و T^* یکتاست [۲۴ـ۲.۳.۳۰]

بخش دوم: ۱ـ۲ـ آنالیز هارمونیک

(۱ـ۲ـ۱) تعریف: فرض کنید G یک گروه جبری و τ یک توپولوژی روی G باشد به طوری که نگاشتهای $G \times G \longrightarrow G$ $((x.y) \longrightarrow xy)$ و $G \longrightarrow G$ $(x \longrightarrow x^{-1})$ پیوسته باشند در این صورت G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم. یعنی برای هر $x, y \in G$

۱) برای هر همسایگی w از xy، همسایگی‌های U و V به ترتیب از x و y موجود باشند به طوری که $UV \subseteq w$

۲) برای هر همسایگی w از x^{-1} همسایگی V از x موجود باشد که $V^{-1} \subseteq w$

(۱ـ۲ـ۲) قضیه: اگر G یک گروه توپولوژیک باشد و $a \in G$، در این صورت نگاشتهای $x \longrightarrow xa$ و $x \longrightarrow ax$ از G به G هومیومورفیسم هستند.

(۱ـ۲ـ۳) قضیه: فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H زیرگروه G باشد در این صورت H با توپولوژی نسبی یک گروه توپولوژیک است.

(۱ـ۲ـ۴) قضیه: اگر U یک همسایگی باز و متقارن e (عضو خنثی G) باشد، آنگاه $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ یک زیرگروه باز و بستهٔ G است که U را متقارن گوییم هرگاه اگر $x \in U$ در آن صورت $x^{-1} \in U$.

(۱ـ۲ـ۵) تعریف: گوییم گروه توپولوژیک G به طور فشرده تولید می‌شود اگر مجموعهٔ فشرده‌ای مانند F باشد به طوری که $G = \{e\} U \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cup F^{-1})^n$ که در این صورت می‌گوییم گروه G به وسیلهٔ F تولید شده است و موضعاً فشرده گوییم هرگاه e دارای همسایگی با بستار فشرده باشد.

(۱ـ۲ـ۶) قضیه: فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

۱) G به طور فشرده تولید می‌شود.

۲) مجموعهٔ بازی مانند U وجود دارد که $\bar{U}$ فشرده و G را تولید می‌کند.

۳) یک همسایگی از e مانند U وجود دارد که $\bar{U}$ فشرده و G را تولید می‌کند.

(۱ـ۲ـ۷) تعریف: فرض کنید G گروه توپولوژیک و H زیر گروه G باشد و $\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ نگاشت طبیعی باشد توپولوژی $\theta(\frac{G}{H})$ را روی $\frac{G}{H}$ چنین تعریف می‌کنیم.
$A = \{xH : x \in X, x \subseteq G\}$ در $\frac{G}{H}$ باز است اگر و فقط اگر $XH = \{xH : x \in X\}\bigcup$ در G باز باشد. مجموعه‌های باز در $\frac{G}{H}$ به شکل $\{uH : u \in U\}$، که U در G باز است.

(۱ـ۲ـ۸) قضیه: خانواده $\theta(\frac{G}{H})$ یک توپولوژی روی $\frac{G}{H}$ می‌سازد که تحت این توپولوژی نگاشت $\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ پیوسته است و این توپولوژی قویترین توپولوژی است که φ پیوسته است.

(۱ـ۲ـ۹) قضیه: فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و σـفشرده باشد در این صورت به ازای هر خانواده شمارش پذیر $\{U_n\}$ از e یک زیرگروه نرمال و فشرده مانند N از G موجود است که $N \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ و $\frac{G}{N}$ متریک پذیر و پایهٔ شمارا دارد.

(۱ـ۲ـ۱۰) تعریف: متریک d را روی G پایای چپ گوییم در صورتی که برای هر $x, y, a \in G$، $d(ax, ay) = d(x, y)$ و پایای راست گوییم اگر $d(xa, ya) = d(x, y)$ و پایا گوییم هرگاه پایای چپ و پایای راست باشد.

(۱ـ۲ـ۱۱) تعریف: خانوادهٔ ناتهی φ از زیرمجموعه‌های X را یک حلقه می‌گوییم هرگاه برای هر $A. B \in \varphi$، $A \cup B \in \varphi$ و $A - B \in \varphi$ و حلقه φ را یک جبر می‌گوییم هرگاه $X \in \varphi$ و φ را یک σـحلقه می‌گوییم هرگاه اجتماع شمارش پذیر از اعضای φ به φ تعلق داشته باشد و σـحلقه φ را یک σـجبر می‌گوییم هرگاه $X \in \varphi$.

اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد، کوچکترین σـجبر شامل مجموعه‌های باز را فضای بورل می‌گوییم.

(۱ـ۲ـ۱۲) تعریف: نگاشت $\mu : \Omega \longmapsto [\circ, \infty]$ را که Ω حلقه است، یک اندازه بطور متناهی جمعی در صورتی که

۱) $\mu(\phi) = \circ$؛

۲) برای هر $A_1, A_2, ..., A_n$ که $(i \neq j A_i \cap A_j = \phi)$،

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

μ را بطور شمارا جمعی نامیم در صورتی که اگر $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$ و $(n \neq m, A_n \cap A_m = \phi)$ آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

μ را σـمتناهی نامیم در صورتی که برای هر A عضو Ω یک دنباله $\{A_n\}$ از عناصر Ω دریافت شود که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\mu(A_n) < \infty$

(۱ـ۲ـ۱۳) تعریف: تابع $f : Y \longrightarrow [-\infty, \infty]$، φـاندازه پذیر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر α، مجموعهٔ $\{x \in Y : f(x) > \alpha\}$ به φ تعلق داشته باشد.

اگر این مجموعه بورل باشد، f یک تابع بورل نامیده می‌شود.

فرض کنید $f : Y \longrightarrow [\circ, \infty]$ اندازه پذیر باشد. تعریف می‌کنیم

$$\int_{Y} f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^{n} inf\{f(x)|x \in A_k\}\mu(A_k), Y = \bigcup_{k=1}^{n} A_k. A_k \in \varphi, A_k \cap A_k = \phi \;\; k \neq k'\}$$

(۱ـ۲ـ۱۴) تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژی، $C_b(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته و کراندار روی X باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$C_\circ(X) = \{f \in C_b(X) | \text{در بینهایت صفر شود } f\}$$

و f در بینهایت صفر شود بدین معنی است که به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ز مجموعه‌ای فشرده مانند k باشد به طوری که به ازای هر x، اگر $x \notin K$ آنگاه $|f(x)| < \epsilon$ و

$$C_c(X) = C_{\circ\circ}(X) = \{f \in C_b(X) : \quad \text{محمل } f \text{ فشرده است}\}$$

که

$$(\text{محمل } f =) supp f = \{x : f(x) \neq \circ\}$$

به وضوح رابطه زیر را داریم

$$C_{\circ\circ}(X) \subseteq C_{\circ}(X) \subseteq C_b(X)$$

(۱ـ۲ـ۱۵) تعریف: تابعک خطی I بر $C_c(X)$ را مثبت گویم هرگاه به ازای هر $\circ \geq f$، $I(f) \geq \circ$.

(۱ـ۲ـ۱۶) تعریف: تابع $f : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ نیم پیوسته پایینی در $x_\circ$ نامیده می‌شود.

۱) اگر $f(x_\circ) < \infty$، آن گاه برای هر $\varepsilon > \circ$، همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in U$، $f(x) > f(x_\circ) - \varepsilon$

۲) اگر $f(x_\circ) = \infty$، آن گاه برای هر عدد حقیقی A، همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in U$، $f(x) > A$

و نیم پیوستهٔ بالایی گوییم.هرگاه در حالت $-\infty < f(x_\circ)$، برای هر $\epsilon > \circ$ همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد به طوری که برای همه $x \in U$، $f(x) < f(x_\circ) + \epsilon$ و در حالت $f(x_\circ) = -\infty$ برای هر عدد حقیقی A همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in U$، $f(x) < A$

مجموعهٔ توابع نیم‌پیوسته پایینی را به m^+ نمایش می‌دهیم و برای هر $f \in m^+$ تعریف می‌کنیم:

$$\bar{I}(f) = \sup\{I(g) | g \in C_c^+(X), g \leq f\}$$

فرض کنیم $h : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ تابعی اندازه‌پذیر باشد تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\bar{I}}(h) = inf\{\bar{I}(g) | g \in m^+, h \leq g\}$$