به نام خدا

دانشگاه‌بیرجند
دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

بررسی چرخه‌های حدی در معادلات دیفرانسیل لینارد

استاد راهنما :
جناب آقای دکترحاجی محمد محمدی نژاد

استاد مشاور :
جناب آقای دکترامید ربیعی مطلق

نگارنده :
سمانه محمدی

پاییز ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر

و

مادرم

و روح مطهر پدر بزرگ مهربانم

تقدیر و تشکر:

سپاس و امتنان بیکران او که مرا آفرید و مرا توان آن داد تا در ناگه زمان خویش را جستجو کنم و پس از او سپاس اولین آموزگارم که قلم در دستم نهاد و آنان که چرخش قلم را به من آموختند و استادانم که مرا امید آن دادند که از لرزش قلم نهراسم و بنگارم آن‌چه در توان من است.

مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد که با راهنمایی‌های ارزنده‌ی خویش مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند ابراز می‌دارم.

از استاد مشاور ارجمند جناب آقای دکتر امید ربیعی که از راهنمایی‌های روشنگرانه خویش بهره‌مندم ساختند کمال تشکر را دارم.

از اساتید داور جناب آقای دکتر جانفدا و جناب آقای دکتر نصر آبادی که در بازنگری و تصحیح این پایان نامه همراه بوده‌اند و همچنین از جناب آقای دکتر اقدامی نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی که به این جلسه رسمیت بخشیدند نهایت تشکر را دارم.

از دوستان خوبم سرکار خانم‌ها مرضیه نجفی و الهام حسین زاده همچنین خانم دکتر زبیده مومنی لاریمی و آقای دکتر مجید کریمی که در همه‌ی مراحل از هیچ کمکی دریغ نکردند ممنون و سپاسگزارم.

چکیده:

دراین تحقیق وجود و یکتایی چرخه‌های حدی را برای معادله دیفرانسیل لینارد به فرم

$$x'' - f(x)x' + g(x) = 0$$

بررسی می‌کنیم که درآن توابع f و g در شرایط $xf(x) > 0$ و $xg(x) > 0$ صدق می‌کنند. می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌توان انشعاب دورهای حدی راکنترل کرد؟ با در نظر گرفتن نقاط تکین و ماهیت آن‌ها نشان می‌دهیم که چرخه‌های حدی برای معادله‌ی دیفرانسیل لینارد تحت چه شرایطی وجود دارند؟ و در صورت وجود تحت چه شرایطی پایدار و یا ناپایدارند؟

کلمات کلیدی :

سیستم‌های دیفرانسیل لینارد، مدارهای متناوب، چرخه‌های حدی، پایداری چرخه‌های حدی .

فهرست مندرجات

فصل ۱

تاریخچه‌ای از مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت

۱—۱ مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت

در سال ۱۹۰۰ میلادی هیلبرت [۱] در دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات که در شهر پاریس برگزار شد، فهرستی از ۲۳ مسأله‌ی حل نشده از شاخه‌های مختلف ریاضی را مطرح نمود که قسمت دوم از مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت به صورت زیر است و هنوز به عنوان یک مسأله‌ی باز در دنیای ریاضیات باقی مانده است [۷].

مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت : تعداد ماکزیمم دورهای حدی سیستم چند جمله‌ای درجه n

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \end{cases}$$

چیست؟ به بیان دیگر مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت به تعیین تعداد ماکزیمم چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای درجه‌ی n و موقعیت نسبی آن‌ها در صفحه می‌پردازد. تعداد چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای از درجه n را با H_n نمایش داده و آن را عدد هیلبرت می‌نامند. البته این سوال را می توان به سه مسأله‌ی زیر تقسیم‌بندی نمود :

مسأله ۱ : آیا هرمیدان برداری چند جمله‌ای در صفحه تعداد متناهی چرخه‌ی حدی دارد؟

مسأله ۲ : آیا تعداد چرخه‌های حدی میدان‌های برداری چند جمله‌ای در صفحه کران داراست؟

مسأله ۳ : آیا کران بالایی برای H_n وجود دارد؟

چون میدان‌های برداری خطی چرخه‌ی حدی ندارند پس $H(1) = 0$، ولی برای $n > 1$ هنوز وجود عدد هیلبرت اثبات نشده است. در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک [۲] ادعاکرد که مسأله‌ی اول را حل کرده است. در سال ۱۹۷۵ پتروفسکی [۳] و لاندیس [۴] جوابی برای مسأله‌ی سوم یافتند و ادعا کردند که $H(2) = 2$ و $H(n) \leq P_3(n)$ که در آن $P_3(n)$ چند جمله‌ای زیر است :

---

[۱] Hilbert

[۲] Dulac

[۳] *Petrovskii*

[۴] *Landis*

$$P_{\text{۳}}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(6n^3 - 7n^2 - 11n + 16) \\ \frac{1}{2}(6n^3 - 7n^2 + n + 4) \end{cases}$$

که اولی برای n زوج و دومی برای n فرد تعریف شده است.

اما در سال ۱۹٦۰ ادعای آن‌ها به وسیله‌ی مثال نقضی توسط نویکف [5] رد شد. درسال ۱۹۷۹ ریاضی دانان چینی به نام های شی، چن و ونگ[6] مثال‌هایی از میدان های برداری درجه‌ی دوم با چهار دور حدی ارائه دادند بدین ترتیب آن‌ها نشان دادند که $H(2) \geq 4$. راجع به H_3 تا سال ۱۹۸۳ باور بر این بود که یک سیستم چندجمله‌ای از درجه سه حداکثر هشت دور حدی موضعی دارد تا این که لیتال [7] یک مثال از سیستم چند جمله‌ای از درجه سه با یازده دور حدی ارائه داد و بدین ترتیب نشان داد که $H_3 \geq 11$.

در سال ۱۹۸۴ ایلیاشنکو [8] ثابت کرد که میدان‌های برداری چند جمله‌ای با نقاط تکین غیراستثنایی در صفحه، تعداد متناهی چرخه‌ی حدی دارند. در سال ۱۹۹۱ ایلیاشنکو و در سال ۱۹۹۲ اکال [9] به طور جداگانه اثبات کردند که نه تنها میدان‌های برداری چندجمله‌ای بلکه میدان‌های برداری تحلیلی نیز در صفحه، تعداد متناهی دور حدی دارند. بدین ترتیب بعد از گذشت ۹۲ سال از تاریخ طرح مسأله‌ی هیلبرت، سوال اول جواب مثبت گرفت و حل شد. ولی تاکنون برای مسأله‌ی دوم راه حلی ارائه نشده و حتی این مسأله برای $n = 2$ باز باقی مانده است.

معمولاً برای بررسی دورهای حدی در یک سیستم چندجمله‌ای، سه تقسیم بندی به کار می‌برند. تقسیم بندی اول که فقط مربوط به سیستم‌های مرتبه‌ی دوم است و بوتین [10] ثابت کرد که در این سیستم‌ها تعداد چرخه‌های حدی که از یک نقطه منشعب می‌شوند برابر سه است و اخیراً زولادک [11] در مقاله‌ای ثابت

[5] $Novikov$

[6] $S.L.Shi,\ L.S.Chen\ and\ M.S.Wang$

[7] J.B.Lietal

[8] $Ilyashenko$

[9] $Ecalle$

[10] $N.N.Bautin$

[11] $H.Zoladek$

کرده که این تعداد برای یک سیستم چند جمله‌ای از درجه‌ی سه کمتراز یازده نیست. دومین تقسیم‌بندی در مورد دورهای حدی جداکننده است و سومین تقسیم‌بندی که کامل‌ترین نوع تقسیم بندی است مربوط به دورهای حدی چند گانه می‌باشد، یکی از ویژگی‌های تقسیم‌بندی نوع سوم این است که می‌توان تقسیم بندی مذکور را به سیستم‌های دینامیکی با ابعاد بالاتر تعمیم داد. با توجه به پیچیدگی مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت، یک راه حل ممکن برای مطالعه‌ی این مسأله در نظر گرفتن یک مسأله‌ی معلوم و بررسی وقوع انواع انشعابات ممکن روی این سیستم است. در طول دو دهه‌ی اخیر سیستم‌های خاص بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است که سیستم لینارد یکی از آن‌هاست[۱۳].

۱—۲ مقدمه

هدف اصلی ما در این پایان نامه بررسی وجود و یکتایی دورهای حدی برای سیستم دیفرانسیل لینارد

$$x'' - f(x)x' + g(x) = 0$$

است که در آن توابع f و g در شرایط $xf(x) > 0$ و $xg(x) > 0$ صدق می کنند. می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی می‌توان انشعاب دورهای حدی راکنترل کرد؟ برای این منظور معادله دیفرانسیل لینارد زیر را روی بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید.

$$x'' - f(x)x' + g(x) = 0 \qquad -\infty < a < 0 < b < \infty \tag{۱—۱}$$

که در آن f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < 0, \\ f_2(x) & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x < 0, \\ g_2(x) & x > 0, \end{cases} \tag{۲—۱}$$

که توابع f_1 و g_1 روی بازه‌ی $[a, 0]$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر و توابع f_2 و g_2 روی بازه‌ی $[0, b]$ به طورپیوسته دیفرانسیل پذیر هستند. با در نظر گرفتن فرم صفحه لینارد و اختیار $F'(x) = f(x)$ داریم،

$$\begin{cases} x' = F(x) - y, \\ y' = g(x), \end{cases} \tag{۱—۳}$$

میدان برداری وابسته به این سیستم را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x) & if x \leq 0, \\ X_2(x) & if x \geq 0, \end{cases} \tag{۱—۴}$$

که‌در آن $X_i(x)$ به صورت زیر است.

$$X_i(x) = \begin{pmatrix} F(x) - y \\ g_i(x) \end{pmatrix} \tag{۱—۵}$$

درسرتاسراین تحقیق مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم :

(H_1) تابع g برای هر $x \neq 0$ در شرط $xg(x) > 0$ صدق کند.

(H_2) تابع f برای هر $x \neq 0$ در شرط $xf(x) > 0$ صدق کند.

(H_3) همچنین فرض کنید که دو حد زیر موجود باشند.

$$lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = lim_{p \to 0^+} h_1(p) = l_1$$
$$lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = lim_{p \to 0^+} h_2(p) = l_2$$

و به علاوه این حدود در شرط زیر صدق کنند.

$$0 \leq l_2 \leq l_1 < \infty$$

با در نظر گرفتن نقاط تکین و ماهیت آن‌ها و به کار بردن مفروضات فوق نشان می‌دهیم که چرخه‌های حدی برای معادله دیفرانسیل لینارد(به ویژه معادلاتی که در $x = 0$ ناپیوستگی دارند[۱۲]) تحت چه شرایطی وجود دارند؟ در صورت وجود تحت چه شرایطی پایدار و یا ناپایدارند ؟

فصل ۲

تعاریف وقضایای موردنیاز

تعاریف وقضایای موردنیاز

توجیه ریاضی پدیده‌های فیزیکی اغلب به معادلات غیر خطی منحصر می‌شود. در اغلب حالات امکان جای‌گذاری معادلات خطی متناظر وجود دارد و معادله‌ی غیر خطی را به اندازه‌ی کافی تقریب می‌کند که نتایج مهمی از آن را می‌توان اخذ نمود. با این وجود، همیشه خطی کردن مفید نیست و لذا باید خود معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی را مطالعه نمود. در حالی که نظریه و روش معادلات خطی به طور وسیع توسعه داده شده اند ولی فقط خیلی کم از خواص عمومی معادلات غیر خطی شناخته شده اند. در حالت کلی مطالعه معادلات غیر خطی محدود به حالات خاص شده است و فرد بایستی به روش‌های مختلف تقریب متوسل شود. در این فصل به بیان مفاهیم وقضایای مورد نیاز همچون ضوابط بندیکسون، دولاک، مفهوم نگاشت پوانکاره، دورهای حدی و سیستم لینارد که در فصل‌های آینده به آن‌ها نیاز داریم خواهیم پرداخت.

۲—۱ تعاریف

معادلات دیفرانسیل از نظر وابستگی به زمان به دو نوع تقسیم می‌شوند: دسته‌ی اول معادلاتی هستند که به طور آشکار به t وابسته‌اند و به صورت

$$\dot{x} = f(x,t)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \qquad (۲—۱)$$

می باشند و آن‌ها را دستگاه غیر خودگردان[۱] می‌نامند، دسته‌ی دوم معادلاتی هستند که به طور آشکار به t وابسته نیستند و به صورت

$$\dot{x} = f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \qquad (۲—۲)$$

می باشند و آن‌ها را دستگاه خودگردان[۲] می‌نامند. که درآن $\dot{x}$ نشان دهنده‌ی مشتق x نسبت به متغیر حقیقی t است. منظور از یک جواب برای دستگاه $(۲-۱)$ بر بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ تابعی مثل $x(t) : I \longrightarrow U$ تعریف شده بر I است به طوری که برای هر $t \in I$، $\dot{x}(t) = f\left(x(t), t\right)$. جواب منحصربه فرد سیستم معادلات $(۲-۱)$ که در شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ صدق می‌کند را با $x(t, t_\circ, x_\circ)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $x(t, t_\circ, x_\circ)$ جوابی از سیستم معادلات $(۲-۱)$ است که در شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ صدق می کند اگر وتنها اگر $x(t)$ در معادله‌ی انتگرالی زیر صدق کند.

$$x(t, t_\circ, x_\circ) = x_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, x(s, t_\circ, x_\circ))ds,\ x(t_\circ, t_\circ, x_\circ) = x_\circ \qquad (۲—۳)$$

---

[۱] $Nonautonomous$

[۲] $Autonomous$

۱.۲ تعریف : فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد تابع $x : I \longrightarrow U$ را جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

می‌نامیم اگر x جواب $\dot{x} = f(x)$ بر I باشد و برای $t_\circ \in I$، $x(t_\circ) = x_\circ$.

اگردر دستگاه غیر خودگردان (۲ – ۱) تعریف کنیم $y = \binom{x}{t} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$ و $g(y) = (f(x,t), ۱) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$ در این‌صورت این دستگاه تبدیل به دستگاه خودگردان $\dot{y} = g(y)$ می‌شود که حالت برداری آن به صورت زیر است :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ \dot{t} = ۱ \end{cases}$$

۲.۲ تعریف : فرض کنیم $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع و $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases}$ یک مسأله‌ی مقدار اولیه باشد، همچنین فرض کنید $\mathcal{A} = \{x_\alpha : I_\alpha \longrightarrow U\}_\alpha$ خانواده‌ی همه‌ی جواب‌های این مسأله‌ی مقداراولیه باشد. در این‌صورت

$$\begin{cases} x : \bigcup_\alpha I_\alpha \longrightarrow U \\ t \longmapsto x_\alpha(t) \quad , \quad t \in I_\alpha \end{cases}$$

یک جواب این مسأله‌ی مقداراولیه است که آن را جواب ماکسیمال می‌نامیم و $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ را بازه‌ی ماکسیمال وجود جواب می‌گوییم. اکنون فرض می‌کنیم $x(t)$ یک جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

باشد. در این‌صورت اگر تعریف کنیم $y(t) = x(t + t_\circ)$ آن‌گاه

$$y'(t) = x'(t + t_\circ) = f\left(x(t + t_\circ)\right) = f\left(y(t)\right)$$

بعلاوه $y(\circ) = x(t_\circ) = x_\circ$. یعنی y یک جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

است. بدون این که به کلیت مسأله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $t_\circ = \circ$، زیرا در غیر این‌صورت با یک انتقال ساده می‌توان $t_\circ$ را برابر با صفر قرار داد.

۳.۲ **تعریف :** نقطه‌ی $x_\circ$ را یک نقطه‌ی ثابت[۳] (بحرانی یاتکین) سیستم (۲ − ۲) خوانیم هر گاه $f(x_\circ) = \circ$. بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود می‌توان نقطه‌ی بحرانی این سیستم را مبدأ مختصات فرض کرد زیرا در غیر این‌صورت، اگر قرار دهیم $y = x - x_\circ$ آن‌گاه بانوشتن بسط سری تیلور تابع f حول نقطه‌ی $x_\circ$ خواهیم داشت:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x_\circ + y) = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{۱!}(x_\circ + y - x_\circ) + ...$$

$$\dot{y} = f(x_\circ) + Df(x_\circ)y + O(| y |^۲)$$

چون $x_\circ$ نقطه‌ی بحرانی سیستم است بنابراین $f(x_\circ) = \circ$، لذا خواهیم داشت:

$$\dot{y} = Df(x_\circ)y + O(| y |^۲) = Ay + O(| y |^۲)$$

که در آن $A = Df(x_\circ)$ یک ماتریس $n \times n$ است. سیستم معادلات

$$\dot{y} = Ay \quad ; \quad A = Df(x_\circ) \qquad (۴-۲)$$

را سیستم خطی شده‌ی متناظر با سیستم (۲ − ۲) حول نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ نامیده می‌شود. نقطه‌ی تکین $x_\circ$ را یک نقطه‌ی تکین منزوی گوییم هرگاه همسایگی‌ای از $x_\circ$ وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه‌ی تکین دیگری از سیستم نباشد.

---

[۳] fixed point

فرض کنید $X = (x, y)^T$ و $f_1(x) = P(x, y)$ و $f_2(x) = Q(x, y)$ سیستم غیر خطی $(2-2)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y)$$

اگر فرض کنیم $r^2 = x^2 + y^2$ و $\theta = tan^{-1}(\frac{y}{x})$ در این‌صورت داریم:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \qquad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

برای $r > 0$ سیستم غیر خطی $(2-2)$ را می‌توان در مختصات قطبی به صورت

$$\dot{r} = P(rcos\theta, rsin\theta)cos\theta + Q(rcos\theta, rsin\theta)sin\theta$$

$$r\dot{\theta} = Q(rcos\theta, rsin\theta)cos\theta - P(rcos\theta, rsin\theta)sin\theta$$

یا به صورت

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta) = \frac{r[P(rcos\theta, rsin\theta)cos\theta + Q(rcos\theta, rsin\theta)sin\theta]}{Q(rcos\theta, rsin\theta)cos\theta - P(rcos\theta, rsin\theta)sin\theta}$$

فرض کنیم $x_0 \in R^2$ یک نقطه‌ی تکین منزوی سیستم غیر خطی $(2-2)$ باشد که آن را به مبدأ منتقل می‌کنیم و فرض کنیم $r(t, r_0, \theta_0)$ و $\theta(t, r_0, \theta_0)$ نمایش جواب سیستم غیرخطی $(2-2)$ با شرط اولیه $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$ باشد.

۴.۲ **تعریف :** مبدأ یک مرکز[4] برای سیستم $(2-2)$ نامیده می‌شود اگر $\delta > 0$ ی وجود داشته باشد به طوری که هر منحنی جواب سیستم غیر خطی $(2-2)$ در همسایگی محذوف مبدأ، $N_\delta(0) \sim \{0\}$، یک منحنی بسته با صفر به عنوان نقطه‌ی داخلی‌اش باشد.

---

[4] center

۵.۲ تعریف : مبدأ یک کانون پایدار[۵] برای سیستم (۲ − ۲) نامیده می‌شود اگر $\delta > 0$ ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $0 < r_\circ < \delta$ و $\theta_\circ \in R$ داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow 0$ و $\mid \theta(t, r_\circ, \theta_\circ) \mid \longrightarrow \infty$ وقتی $t \longrightarrow \infty$، و یک کانون ناپایدار [۶] نامیده می‌شود اگر پایدار نباشد. به بیان دیگر اگر داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow 0$ و $\mid \theta(t, r_\circ, \theta_\circ) \mid \longrightarrow \infty$ وقتی $t \longrightarrow -\infty$ ، در این حالت گوییم جواب‌ها به طور مارپیچی [۷] به مبدأ میل می‌کنند وقتی $t \longrightarrow \pm\infty$.

۶.۲ تعریف : مبدأ یک گره‌ی پایدار[۸] برای سیستم (۲ − ۲) نامیده می‌شود اگر $\delta > 0$ ی وجود داشته باشد طوری که برای هر $0 < r_\circ < \delta$ و $\theta_\circ \in R$ داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow 0$ و $lim_{t \longrightarrow \infty} \theta(t, r_\circ, \theta_\circ)$ موجود باشد وقتی $t \longrightarrow \infty$، یعنی هر مسیر در همسایگی محذوف مبدأ در راستای خط مماس کاملاً مشخصی به مبدأ نزدیک می‌شود. و مبدأ یک گره‌ی ناپایدار [۹] نامیده می‌شود اگر $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow 0$ و $lim_{t \longrightarrow -\infty} \theta(t, r_\circ, \theta_\circ)$ برای همه‌ی $r_\circ \in (0, \delta)$ و $\theta_\circ \in R$ موجود باشد وقتی $t \longrightarrow -\infty$. مبدأ یک گره‌ی کامل[۱۰](محض) نامیده می‌شود اگر یک گره باشد و هر شعاعی که از مبدأ می‌گذرد مماس بر مسیرهای سیستم (۲ − ۲) باشد.

۷.۲ تعریف : مبدأ یک نقطه‌ی توپولوژیک زینی[۱۱] برای سیستم (۲ − ۲) نامیده می‌شود اگر دو مسیر Γ_1 و Γ_2 موجود باشند که وقتی $t \longrightarrow \infty$، به مبدأ نزدیک شوند و همین طور دو مسیر Γ_3 و Γ_4 موجود باشند به طوری که وقتی $t \longrightarrow -\infty$، به مبدأ نزدیک شوند و یک $\delta > 0$ ی موجود باشد به طوری

[۵] stable focus
[۶] unstable focus
[۷] spiral
[۸] stable node
[۹] unstable node
[۱۰] proper node
[۱۱] topological saddle

که همه‌ی مسیرهایی که در همسایگی محذوف مبدأ یعنی $N_\delta(\circ) \sim \{\circ\}$ قرار می‌گیرند $N_\delta(\circ)$ را ترک کنند وقتی که $t \longrightarrow \pm\infty$. در این حالت به مسیرهای خاص $\Gamma_۱, ..., \Gamma_۴$ جدا کننده‌ها گفته می‌شود.
حال به بیان چند تعریف معادل با تعاریف بالا می‌پردازیم.

۸.۲ **تعریف** : نقطه‌ی تکین $x_\circ$ از سیستم $(۲-۲)$ یک نقطه تکین هذلولوی وار خوانیم اگر هیچ یک از مقادیر ویژه سیستم خطی شده$(۲-۴)$ حول نقطه بحرانی دارای قسمت حقیقی صفر نباشند در غیر این صورت آن را یک نقطه بحرانی ناهذلولوی وار گوییم.

۱.۲ **لم** : نقطه‌ی تکین هذلولوی وار $x_\circ$ از سیستم $(۲-۲)$ را یک گره پایدار(چاه[۱۲]) نامیده می شود هرگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$، دارای قسمت حقیقی منفی باشند و این نقطه‌ی تکین یک گره ناپایدار (چشمه [۱۳]) نامیده می شود هرگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$، دارای قسمت حقیقی مثبت باشند و سر انجام این نقطه‌ی تکین یک نقطه‌ی زینی نامیده می‌شود اگر بعضی از مقادیر ویژه $Df(x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی مثبت و مابقی مقادیر ویژه $Df(x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند. نقطه بحرانی ناهذلولوی وار $x_\circ$ از سیستم $(۲-۲)$ را یک مرکز گوییم اگر همه مقادیر ویژه$Df(x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی صفر باشند.
برهان : به [۱۳] رجوع شود.

۲.۲ **لم** : نقطه‌ی بحرانی هذلولوی وار $x_\circ$ از سیستم $(۲-۲)$ را یک کانون پایدار نامیم هرگاه مقادیر ویژه‌ی $Df(x_\circ)$ مزدوج مختلط بوده و دارای قسمت حقیقی منفی باشند و آن را کانون ناپایدار نامیم هرگاه مقادیر ویژه‌ی $Df(x_\circ)$ مزدوج مختلط بوده و دارای قسمت حقیقی مثبت باشند.
برهان : به [۱۳] رجوع شود.
درادامه با تعریف نقطه‌ی شبه تکین [۱۱]آشنا خواهیم شد.
سیستم خودگردان $(۲-۲)$ را درحالت خاص، سیستم مسطح در نظر بگیرید و فرض کنید H یک تابع

---
[۱۲] sink
[۱۳] source