بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی با استفاده از روش بسط $(\frac{G'}{G})$

از:

فروزان فرح‌روز

استاد راهنما:

دکتر نصیر تقی‌زاده

مرداد ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم که همواره مشوق من بوده اند، باشد که سپاس کوچکی در قبال همه همراهی هایشان باشد.

با سپاس فراوان از:

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده که با صبر و حوصله مرا یاری و راهنمایی فرمودند.

بسیار از ایشان آموختم، فراتر از ریاضیات .

داوران محترم پایان نامه جناب آقای دکتر بهروز فتحی وجناب آقای دکتر عباس سهله برای قبول زحمت داوری .

نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر اسماعیل عزیز پور برای حضور در جلسه دفاعیه

و همچنین جناب آقای محمد علی میرزازاده که تجربیات خود را صادقانه در اختیارم نهادند .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

چکیده

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی با استفاده از روش بسط $(\frac{G'}{G})$

فروزان فرح روز

روش بسط $(\frac{G'}{G})$ می‌تواند برای پیدا کردن جواب‌های تحقیقی موج سیار بعضی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی به کار رود. این جواب‌ها وابسته به توابع هذلولی گون، توابع مثلثاتی و توابع گویا هستند.

این روش معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند و این روش را می‌توان برای معادلات انتگرال‌پذیر و معادلات غیرانتگرال‌پذیر نیز به کار برد.

ما کاربرد جدید این روش را برای برخی معادلات غیرخطی مانند معادلات بوسینسک، معادلات هیروتا ـ ساتسوما، معادله ایکهاوس و... بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روش بسط $(\frac{G'}{G})$ ، تعادل همگن، جواب‌های موج سیار، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی، معادلات دیفرانسیل معمولی کمکی. معادله کا دی وی

Abstract

Solving nonlinear partial differential equations by the $(\frac{G'}{G})$-expansion method

Foroozan Farahrooz

The $(\frac{G'}{G})$-expansion method can be used to construct exact travelling wave solutions of some nonlinear partial differential equations. These solutions are expressed by the hyperbolic functions, the trigonometric functions and the rational functions.

This method transforms nonlinear partial differential equation to ordinary differential equation and the method can be applied to integrable equations as well as to non integrable ones.

We investigate new application of this method to some special nonlinear equations like the Boussinseq equations, the Hirota-satsuma equations, the Eckhaus equation and etc.

Key words: $(\frac{G'}{G})$-expansion method, Homogeneous balance, Travelling wave solutions, Nonlinear partial differential equations, Auxiliary ordinary differential equation, kdv equation

پیشگفتار

پدیده‌های موجود در فیزیک و زمینه های دیگر اغلب توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی شرح داده می شوند. وقتی بخواهیم مکانیسم فیزیکی پدیده‌ها را در طبیعت درک کنیم، به وسیله اینگونه معادلات توضیح می‌دهیم. برای مثال پدیده‌های موج مشاهده شده در دینامیک سیال ، پلاسما و محیط‌های الاستیک و فیبرهای اپتیکی و....

لذا در طول چهار دهه گذشته جستجوی راه حل‌های تحقیقی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی توسط کاربرد روش‌های مختلف هدف اصلی بسیاری از محققان بوده و روش‌های قدرتمندی ارائه شده‌اند، مانند تغییر انتشار معکوس ، تغییر بکلاند/داربوکس[۱]، روش تعادل همگن[۲] ، روش تابع tanh ، اپراتورهای دو خطی هیروتا[۳] ، بسط تابع elliptic جاکوبی[۴] ، روش سینوس ـ کسینوس و... اما روش واحدی وجود ندارد که بتواند در رابطه با همه نوع معادلات غیرخطی به کار رود.

اخیراً وانگ و همکارانش [۱] روش جدیدی به نام روش بسط $(\frac{G'}{G})$ برای بررسی جواب‌های موج سیار معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی ارائه کردند که منظور از امواج سیار امواجی هستند که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ بیان می شوند و جواب‌های این نوع امواج از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می کنند. روش بسط $(\frac{G'}{G})$ براساس فرضیاتی است که جواب‌های موج سیار معادلات دیفرانسیل می‌تواند توسط چند جمله‌ای در $(\frac{G'}{G})$ بیان شوند و $G = G(\xi)$ در معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم (LODE) [۵] صدق می‌کند.

درجه چندجمله‌ای می‌تواند توسط موازنه بین بالاترین مرتبه مشتق متغیر وابسته در قسمت خطی معادله دیفرانسیل با بالاترین توان متغیر وابسته در بخش غیرخطی ظاهر شده در معادله دیفرانسیل ODE به دست آید. ضرایب چندجمله‌ای می‌توانند توسط حل کردن یک گروه معادلات جبری حاصل از کاربرد این روش به دست آیند.

---

[1] The Backlund / Darboux transform
[2] The homogeneous balance method
[3] The Hirota’s bilinear operator
[4] The Jacobi elliptic function expansion
[5] Linear Ordinary Differential Equation

دیده خواهد شد که جواب‌های موج سیار بیشتر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی می‌توانند توسط کاربرد روش بسط $(\frac{G'}{G})$ ، [۲] به دست آیند.

در این پایان‌نامه مطالب زیر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل اول تعاریف و مقدمات اولیه بیان می‌شوند.

در فصل دوم روش بسط $(\frac{G'}{G})$ و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی توضیح داده می‌شود.

فصل سوم اختصاص به حل معادلات بیشتر با استفاده از این روش دارد.

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل به بیان تعاریفی که در پایان‌نامه عمدتاً از آنها استفاده شده پرداخته می‌شود.

۱-۱ تعریف: در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی یک معادله تابعی است و معادله تابعی حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی شود، معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

۱-۲ تعریف: اگر معادله دیفرانسیل فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد، معادله دیفرانسیل معمولی (O.D.E)[1] نام دارد.

۱-۳ تعریف: اگر در معادله دیفرانسیل تعداد متغیرهای مستقل بیش از یکی باشد، به آن یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی (P.D.E)[2] می‌گویند.

۱-۴ تعریف: اگر $u=u(x_1,...,x_n)$ به طوری‌که x_k ، $k=1,...,n$ ، $n-$ متغیر مستقل فرض شود. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی در حالت کلی به صورت زیر است

$$F(x_1,...,x_n,u,u_{x_1},...,u_{x_n},u_{x_1x_1},...,u_{x_nx_n},...)=0 .$$

۱-۵ تعریف: یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را خطی گوییم، اگر F برحسب u و مشتقات آن بصورت خطی تعریف شود در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی نام دارد.

۱-۶ مثال: معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خطی مرتبه اول $x^2u_x+(x+y)u_y=x^2+1$

-معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی مرتبه دوم $x\,u_{xx}+y\,u_{yy}+u_t^2=(t+1)^2$

۱-۷ روش لاگرانژ برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول

در حالت کلی اگر فرض کنیم $u=u(x_1,...,x_n)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+....+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=q(x_1,...,x_n,u) \quad (1\text{-}7\text{-}1)$$

[1] Ordinary Differential Equation
[2] Partial Differential Equation

اگر فرض کنیم $f(x_1,\dots,x_n,u)=0$ جواب عمومی معادله (۱-۷-۱) فرض شود، در این صورت با دیفرانسیل‌گیری از طرفین تساوی جواب فوق داریم

$$df(x_1,\dots,x_n,u)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial f}{\partial u}du=0 \\ du=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\dots+\dfrac{\partial u}{\partial x_n}dx_n \end{cases}$$

از طرفی

لذا

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_n=0$$

لذا

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_1}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_n}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \end{cases} \qquad (۱-۷-۲)$$

اگر در رابطه (۱-۷-۱) به جای $\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ مساویش را از رابطه (۱-۷-۲) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$P_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\dots+P_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+q\frac{\partial f}{\partial u}=0 \qquad (۱-۷-۳)$$

در فضای R^{n+1} اگر i_k که $k=1,2,\dots,n,n+1$ بردارهای همانی فرض شوند، در این صورت بردار v را انتخاب می‌کنیم

$$\begin{cases} v=P_1i_1+\dots+P_ni_n+qi_{n+1} \\ \nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}i_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}i_n+\dfrac{\partial f}{\partial u}i_{n+1} \end{cases}$$

آنگاه رابطه (۱-۷-۳) به صورت $V.\nabla f=0$ نوشته می‌شود، لذا $V\perp\nabla f$

بردار موضعی r را به صورت پارامتری بیان می‌کنیم

$$\overrightarrow{r(t)}=x_1(t)\,i_1+x_2(t)\,i_2+\dots+x_n(t)\,i_n+u(t)\,i_{n+1}$$

پس
$$\frac{dr(t)}{dt}=\frac{dx_1(t)}{dt}i_1+\frac{dx_2(t)}{dt}i_2+\ldots+\frac{dx_n(t)}{dt}i_n+\frac{du(t)}{dt}i_{n+1}$$

می‌توان با تغییر پارامتر t شرط هم‌جهت بودن دوبردار V و $\frac{dr(t)}{dt}$ را که مماس بر صفحه جواب هستند، در یک مسیر قرار داد به عبارت دیگر

$$\frac{dr(t)}{dt}=KV \qquad ;K\in R$$

لذا

$$\frac{dx_1(t)}{dt}i_1+\frac{dx_2(t)}{dt}i_2+\ldots+\frac{dx_n(t)}{dt}i_n+\frac{du(t)}{dt}i_{n+1}=$$

می‌توان نتیجه گرفت
$$K P_1 i_1+K P_2 i_2+\ldots+K P_n i_n+K q i_{n+1}$$

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=KP_1\\ \frac{dx_2}{dt}=KP_2\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}=KP_n\\ \frac{du}{dt}=Kq\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx_1}{P_1}=Kdt\\ \frac{dx_2}{P_2}=Kdt\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{P_n}=Kdt\\ \frac{du}{q}=Kdt\end{cases}$$

می‌توان نوشت

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{q}$$

اگر
$$\begin{cases}\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}\\ \frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_3}{P_3}\\ \vdots\\ \frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_n}{P_n}\\ \frac{dx_1}{P_1}=\frac{du}{q}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1(x_1,x_2)=c_1\\ f_2(x_1,x_3)=c_2\\ \vdots\\ f_{n-1}(x_1,x_n)=c_{n-1}\\ f_n(x_1,u)=c_n\end{cases}$$

در این صورت

$$f(f_1(x_1,x_2) \quad ,f_2(x_1,x_3) \quad ,..., f_{n-1}(x_1,x_n)\,, f_n(x_1,u))=0$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل اصلی است.

۱-۸ روش تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = 0 \tag{۱-۸-۱}$$

را اختیار می‌کنیم که در آن $a_k, b \in R$ $(k=1,2,...,n)$, $u=u(x_1,...,x_n)$ هستند

برای به دست آوردن جواب عمومی معادله (۱-۸-۱) وقتی $a_j \neq 0$ $(1 \le j \le n)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{cases} \xi_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ \xi_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \vdots \\ \xi_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n. \end{cases} \tag{۲-۸-۱}$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{cases} u_{x_1} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_1} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_1} + \ldots + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_1}, \\ u_{x_2} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_2} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_2} + \ldots + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_2}, \\ \vdots \\ u_{x_n} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_n} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_n} + \ldots + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_n}. \end{cases}$$

که با توجه به رابطه (۱-۸-۲) داریم

$$\begin{cases} u_{x_1} = c_{11}u_{\xi_1} + c_{21}u_{\xi_2} + \ldots + c_{n1}u_{\xi_n}, \\ u_{x_2} = c_{12}u_{\xi_1} + c_{22}u_{\xi_2} + \ldots + c_{n2}u_{\xi_n}, \\ \vdots \\ u_{x_n} = c_{1n}u_{\xi_1} + c_{2n}u_{\xi_2} + \ldots + c_{nn}u_{\xi_n}. \end{cases} \tag{۳-۸-۱}$$

بدین ترتیب با توجه به رابطه (۱-۸-۳) داریم

$$u_{x_k} = c_{1k}u_{\xi_1} + c_{2k}u_{\xi_2} + \ldots + c_{nk}u_{\xi_n} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}u_{\xi_i} \tag{۴-۸-۱}$$

حال رابطه (۱-۸-۴) را در معادله (۱-۸-۱) قرار می‌دهیم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (\sum_{i=1}^{n} c_{ik} u_{\xi_i}) + bu = 0 \qquad (۱-۸-۵)$$

اگر رابطه (۱-۸-۵) را باز کنیم، داریم

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k c_{1k}) u_{\xi_1} + (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{2k}) u_{\xi_2} + \dots$$

(۱-۸-۶)

$$+ (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{jk}) u_{\xi_j} + (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{nk}) u_{\xi_n} + bu = 0$$

وقتی $a_j \neq 0$ $(1 \leq j \leq n)$ باشد، اختیار می‌کنیم $c_{jj} = 1$ ، $\begin{cases} c_{jk} = 0 \\ j \neq k \end{cases}$ در این صورت c_{ij} ها را طوری انتخاب می‌کنیم که شرط $\sum_{k=1}^{n} a_k c_{ik} = 0$ $(i \neq j)$ برقرار شود

در نتیجه رابطه (۱-۸-۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$a_j u_{\xi_j} + bu = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\xi_j} + \frac{b}{a_j} u = 0 \qquad (۱-۸-۷)$$

که جواب این معادله به صورت زیر است

$$u = e^{\frac{-b}{a_j}\xi_j} f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \qquad (۱-۸-۸)$$

در رابطه (۱-۸-۸) $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ را با توجه به شرط $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k c_{ik} = 0 \\ i \neq j \end{cases}$ به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k c_{1k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \dots + a_{n-1} c_{1(n-1)} + a_n c_{1n} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} a_k c_{2k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + a_3 c_{23} + \dots + a_n c_{2n} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_k c_{(j-1)k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{(j-1)1} + \dots + a_{j-1} c_{(j-1)(j-1)} + \dots + a_n c_{(j-1)n} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} a_k c_{(j+1)k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{(j+1)1} + \dots + a_{j+1} c_{(j+1)(j+1)} + \dots + a_n c_{(j+1)n} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_k c_{(n-1)k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{(n-1)1} + \dots + a_{n-1} c_{(n-1)(n-1)} + a_n c_{(n-1)n} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} a_k c_{nk} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 c_{n1} + \dots + a_{n-1} c_{n(n-1)} + a_n c_{nn} = 0. \end{cases}$$

اختیار می‌کنیم

$$\begin{cases} c_{1j}=0 \\ j\neq 1,2 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1c_{11}+a_2c_{12}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{11}=-a_2, \\ c_{12}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{2j}=0 \\ j\neq 1,3 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1c_{21}+a_3c_{23}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{21}=-a_3, \\ c_{23}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(j-1)j}=0 \\ j\neq 1,j-1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1c_{(j-1)1}+a_{j-1}c_{(j-1)(j-1)}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{(j-1)1}=-a_{j-1}, \\ c_{(j-1)(j-1)}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(j+1)j}=0 \\ j\neq 1,j+1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1c_{(j+1)1}+a_{j+1}c_{(j+1)(j+1)}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{(j+1)1}=-a_{j+1}, \\ c_{(j+1)(j+1)}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(n-1)j}=0 \\ j\neq 1,n \end{cases} \Rightarrow \quad a_1c_{(n-1)1}+a_nc_{(n-1)n}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{(n-1)1}=-a_n, \\ c_{(n-1)n}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{nj}=0 \\ j\neq n-1,n \end{cases} \Rightarrow \quad a_{n-1}c_{n(n-1)}+a_nc_{nn}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{n(n-1)}=-a_n, \\ c_{nn}=a_{n-1}. \end{cases}$$

با توجه به روابط بالا و رابطه (۱–۸–۲) داریم

$$\begin{cases} \xi_1=-a_2x_1+a_1x_2, \\ \xi_2=-a_3x_1+a_1x_3, \\ \vdots \\ \xi_{j-1}=-a_{j-1}x_1+a_1x_{j-1}, \\ \xi_j=x_j, \\ \xi_{j+1}=-a_{j+1}x_1+a_1x_{j+1}, \\ \vdots \\ \xi_{n-1}=-a_nx_1+a_1x_n, \\ \xi_n=-a_nx_{n-1}+a_{n-1}x_n. \end{cases}$$

در این صورت با توجه به روابط بالا و رابطه (۱–۸–۸) جواب عمومی معادله (۱–۸–۱) وقتی که $a_j\neq 0$ به صورت زیر است

$$u=e^{-\frac{b}{a_j}x_j}f(-a_2x_1+a_1x_2,-a_3x_1+a_1x_3,\ldots,-a_{j-1}x_1+a_1x_{j-1},$$

$$-a_{j+1}x_1+a_1x_{j+1},\ldots,-a_nx_1+a_1x_n,-a_nx_{n-1}+a_{n-1}x_n).$$

روش‌هایی برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول در حالت‌های نمایی، چندجمله‌ای و مثلثاتی موجود می‌باشد. حال چون در بحث این پایان‌نامه نمی‌گنجد، به همان روش تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی اکتفا می‌کنیم.

۱-۹ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم

در حالت کلی شکل عمومی چنین معادلاتی به صورت زیر است

$$a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$$

که در آن F یک تابع خطی برحسب u_y,u_x,u است

$$a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}$$

را جزء اصلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق می‌نامیم که در آن $\Delta=b^{۲}(x,y)-۴a(x,y)c(x,y)$ را مبین جزء اصلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق می‌نامیم. در این صورت سه حالت رخ می‌دهد.

الف ـ اگر $\Delta>۰$ ، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را از نوع هذلولوی (Hyperbolic) می‌نامند.

ب ـ اگر $\Delta=۰$ ، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق را از نوع سهموی (Parabolic) می‌نامند.

ج ـ اگر $\Delta<۰$ ، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق را از نوع بیضوی (Elliptic) می‌نامند.

۱-۱۰ روش تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم با ضرایب ثابت به صورت

$$a\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+b\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$$

اگر $\Delta>۰$، آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $u(x,y)=F(m_{۱}x+y)+G(m_{۲}x+y)$ است که در آن $m_{۲},m_{۱}$ ریشه های Δ هستند.

اگر $\Delta=۰$، آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $u(x,y)=yF(x)+G(x)$ است.

اگر $\Delta<۰$ ، آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $u(x,y)=F(m_{۱}x+y)+G(m_{۲}x+y)$ است که در آن $m_{۲}$ مزدوج مختلط $m_{۱}$ می‌باشد.

۱-۱۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم خطی n متغیره با ضرایب ثابت

در حالت کلی چنین معادلاتی به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x_1,\dots,x_n). \qquad (۱-۱۱-۱)$$

اگر در معادله (۱-۱۱-۱)، $f(x_1,\dots,x_n)=0$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0. \qquad (۲-۱۱-۱)$$

را همگن معادله (۱-۱۱-۱) می‌نامند.

12-1 عملگرها در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم

با تعریف $D_{x_i}{}^n=\dfrac{\partial^n}{\partial {x_i}^n}$, $L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}D_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}+c$ معادله (۲-۱۱-۱) به صورت $Lu=0$ نوشته می‌شود. اگر L را بتوان به صورت $L=L_1L_2$ نوشت یعنی

$$L=L_1L_2=(a_1D_{x_1}+a_2D_{x_2}+\dots+a_nD_{x_n}+a_{n+1})\,(b_1D_{x_1}+b_2D_{x_2}+\dots+b_nD_{x_n}+b_{n+1})$$

در این صورت جواب عمومی معادله (۲-۱۱-۱) به صورت زیر است

$$u=e^{-\frac{a_{n+1}}{a_1}x_1}f(-a_3x_2+a_2x_3,\dots,-a_nx_2+a_2x_n,-a_nx_{n-1}+a_{n-1}x_n)$$
$$+e^{-\frac{b_{n+1}}{b_1}x_1}f(-b_3x_2+b_2x_3,\dots,-b_nx_2+b_2x_n,-b_nx_{n-1}+b_{n-1}x_n)$$

۱-۱۳ تعریف موج[3]: هر سیگنال قابل تشخیص که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند، موج نامیده می‌شود.

۱-۱۴ تعریف امواج سیار[4]: امواجی که به صورت $u(x,t)=f(x-vt)$ نمایش داده می‌شوند، امواج سیار نامیده می‌شوند. چنین تابعی آشفتگی‌ای را نشان می‌دهد که با سرعت v حرکت می‌کند.

۱-۱۵ تعریف جواب موج سیار[5]: جواب موج سیار یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی، جوابی است که به صورت $u(x,t)=f(x-vt)$ نوشته می‌شود.

---
[3] Wave
[4] Travelling waves
[5] Travelling wave solution

تئوری جواب‌های موج سیار[۶] یکی از زمینه‌های رو به گسترش در ریاضیات مدرن است که نوع خاصی از جواب‌ها هستند و از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می‌کنند.

۱–۱۶ تعریف عدد تعادل[۷]: عدد تعادل که آن را با m نشان می‌دهیم، توسط موازنه بین بالا ترین مرتبه مشتق متغیر وابسته در قسمت خطی معادله دیفرانسیل با بالاترین توان متغیر وابسته در بخش غیرخطی ظاهر شده در معادله دیفرانسیل ODE به دست می‌آید. طریقه به دست آوردن عدد تعادل را در فصل بعد به تفصیل توضیح خواهیم داد.

۱–۱۷ تعریف معادلات دیفرانسیل انتگرال‌پذیر و انتگرال‌ناپذیر: فرض کنیم معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزیی مفروض است، با استفاده از تغییر متغیر $\xi = x - vt \quad , \quad u = u(\xi)$ به یک معادله ODE تبدیل می‌شود، اگر از معادله ODE موردنظر بتوان انتگرال گرفت آن را معادله دیفرانسیل انتگرال‌پذیر می‌نامیم، در غیر این صورت معادله دیفرانسیل را انتگرال‌ناپذیر می‌نامیم.

۱–۱۸ مثال: معادله kdv را در نظر می‌گیریم

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \quad , \quad \delta > 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $\xi = x - vt \quad , \quad u(x,t) = u(\xi)$، معادله بالا به معادله ODE برای $u = u(\xi)$ تبدیل می شود

$$-vu' + uu' + \delta u''' = 0$$

طریقه به دست آوردن معادله ODE بالا را در فصل بعد توضیح می‌دهیم.

از معادله بالا می‌توان نسبت به ξ انتگرال گرفت

$$\int -vu'(\xi)\, d\xi + \int u(\xi) u'(\xi)\, d\xi + \int \delta u'''(\xi)\, d\xi = 0$$

در این صورت جواب انتگرال به صورت زیر است

$$c - vu + \frac{1}{2}u^2 + \delta u'' = 0$$

که c ثابت انتگرال است.

پس معادله موردنظر یک معادله دیفرانسیل انتگرال‌پذیر است.

۱–۱۹ مثال: معادله کلین ـ گوردن را در نظر می‌گیریم

$$u_{tt} - au_{xx} + bu - ku^3 = 0$$

---

[6] The theory of travelling wave solution

[7] Balance number