دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان:

حجم متناهی تعدیل یافته برای معادلات آب های کم عمق

استاد راهنما:

دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:

سعید حقیقی چنارفاریابی

این پایان‌نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره‌مند شده است

دی ۱۳۹۱

gggggggggggggg

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

که هر چه دارم از برکت وجود آن‌هاست

و تقدیم به

خواهر فداکار و برادران عزیزم

و تقدیم به

روح برادر عزیزم وحید.

سپاس گزاری

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که منطق را فطرتاً در وجود آدمی نهاد. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات سرکار خانم دکتر عرب عامری در به ثمر رسیدن این پایان نامه قدردانی نمایم. از پدر و مادر و برادرانم، حمید، احمد و کریم و خواهر عزیزم که همیشه در پیشرفت های من سهیم بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین جا دارد که تشکری ویژه داشته باشم از دوست عزیزم مهرداد نوظهور، که با همراهی و مساعدت او به ترجمه و تحلیل مقالات مرتبط با پایان نامه پرداختیم و مسائل و مشکلات پیش آمده را با نویسندگان مقالات در میان گذاشتیم و همچنین مشکلات نرم افزاری در نوشتن پایان نامه را مرتفع کردیم.

و نیز از دکتر پیش مست به واسطه‌ی رفع مشکلات دسترسی به مراجع پایان نامه و تمامی اساتیدی که در پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند بالاخص استاد دکتر علیرضا سهیلی سپاسگزارم.

و بوسه می زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

سعید حقیقی چنارفاریابی

دی ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا روش های تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و حجم متناهی بیان می شود و سپس به حل معادلات آب های کم عمق به روش حجم متناهی روی شبکه یکنواخت پرداخته می شود. در ادامه به بحث تعدیل شبکه و توسعه الگوریتم های تعدیل شبکه قوانین بقای هذلولوی یک بعدی و دو بعدی پرداخته می شود. همچنین معادله آب های کم عمق که نمونه ای از معادلات قوانین بقا می باشد روی شبکه تعدیل یافته حل می شود. در این معادلات از شار عددی وی جی ساندارم استفاده شده است که برای معادلات اویلر به کار برده می شود.

در پایان نتایج عددی مربوط به حل معادله آب های کم عمق در شبکه یکنواخت و تعدیل یافته به طور مجزا با هم مقایسه می شود که برتری شبکه تعدیل یافته بر شبکه های ثابت از نظر زمانی و دقت جواب ها به وضوح دیده می شود.

واژگان کلیدی: تعدیل شبکه، حجم متناهی، معادلات اویلر، معادلات آب های کم عمق.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها ی

فهرست جدول‌ها ک

۱ روش های عددی برای گسسته سازی معادلات با مشتقات جزیی ۱

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۲

۱-۳ روش‌های تفاضل متناهی ۳

۱-۳-۱ تقریب‌های پایه ۳

۱-۳-۲ طرح‌های تفاضلی برای عملگر لاپلاس ۵

۱-۴ عناصر متناهی ۷

۱-۴-۱ روش وردشی ۸

۱-۴-۲ روش باقی مانده وزندار ۸

۱-۵ روش حجم متناهی ۱۱

۲ معادلات آب های کم عمق و روش حجم متناهی ۱۵

۲-۱ مقدمه ۱۶

۲-۲ معادلات آب‌های کم‌عمق ۱۶

۲-۳ خواص معادلات آب‌های کم عمق ۲۱

۲-۴ گسسته سازی معادلات آب های کم عمق به روش حجم متناهی ۲۴

۲-۵ روش حجم متناهی برای مورد همگن ۲۸

۲-۵-۱ شار عددی وی جی ساندارم ۲۹

۲-۶ روش حجم متناهی برای مورد ناهمگن ۳۱

۳ تعدیل شبکه ۳۴
۳-۱ مقدمه . . . ۳۵
۳-۲ توزیع مجدد شبکه و اصل هم توزیعی . . . ۳۵
۳-۳ توابع اخطار دهنده . . . ۳۵
۳-۳-۱ توابع اخطار دهنده در حالت یک بعدی . . . ۳۶
۳-۴ مختصات فیزیکی و محاسباتی . . . ۳۷
۳-۵ اصل هم توزیعی . . . ۳۸
۳-۶ تعدیل شبکه بر اساس تغییر وردشی . . . ۳۹
۳-۶-۱ مورد یک بعدی . . . ۴۰
۳-۶-۲ مورد دو بعدی . . . ۴۱
۳-۷ الگوریتم یک بعدی . . . ۴۳
۳-۷-۱ توزیع مجدد شبکه . . . ۴۳
۳-۷-۲ بروز رسانی جواب روی شبکه جدید . . . ۴۴
۳-۷-۳ روش حل . . . ۴۵
۳-۷-۴ نتایج نظری جواب های تعدیل شبکه . . . ۴۹
۳-۷-۵ حرکت شبکه با تکرار گاوس سایدل . . . ۵۱
۳-۸ الگوریتم دو بعدی . . . ۵۱
۳-۸-۱ بروز رسانی جواب . . . ۵۱
۳-۸-۲ روش حل . . . ۵۳

۴ روش حجم متناهی تعدیل یافته ۵۵
۴-۱ مقدمه . . . ۵۶
۴-۲ تعدیل شبکه . . . ۵۷
۴-۲-۱ تعدیل شبکه برای مورد یک بعدی . . . ۵۷
۴-۳ بهبود جواب . . . ۶۱
۴-۳-۱ روش آشفتگی . . . ۶۲
۴-۳-۲ مورد یک بعدی . . . ۶۴

۵ نتایج عددی ۶۶
۵-۱ مقدمه . . . ۶۷

۵-۲ شکست سد ۷۲
۵-۲-۱ شکست سد یک بعدی ۷۲
۵-۲-۲ شکست سد دو بعدی ۷۳
۵-۳ نتیجه گیری و پیشنهاد ۷۷

مراجع **۷۸**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۰**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۳**

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۱ مولکول سه- نقطه برای تقریب تفاضل مرکزی مشتق مرتبه دوم. ۴
شکل ۱-۲ مولکول پنج- نقطه‌ای برای تقریب تفاضل مرکزی عملگر لاپلاس: (الف) مولکول استاندارد، (ب) مولکول اریب. ۶
شکل ۱-۳ مولکول های تفاضل مرکزی نه- نقطه ای برای عملگر لاپلاس. ۶

شکل ۲-۱ شکل هندسی مساله فیزیکی. ۱۶

شکل ۳-۱ تابع طول کمان (بازه های $[x_i, x_j]$ با هم مساویند). ۳۶
شکل ۳-۲ تابع انحنا. ۳۷
شکل ۳-۳ یک حجم کنترل. ۵۲

شکل ۴-۱ تغییر مکان $P \longrightarrow \tilde{P}, \Gamma_{ij} \longrightarrow \tilde{\Gamma_{ij}}$. ۶۲

شکل ۵-۱ جواب H روی شبکه ثابت با $n = ۲۰۰۰$ نقطه. ۶۸
شکل ۵-۲ جواب H روی شبکه تعدیل یافته (خط ممتد) در مقابل شبکه ثابت (خط بریده) در ۱۵۰ نقطه در زمان $t = ۱/۶۷$. ۶۹
شکل ۵-۳ جواب H روی شبکه تعدیل یافته (خط ممتد) در ۱۵۰ نقطه در مقابل شبکه ثابت (خط بریده) در ۳۰۰ نقطه در زمان $t = ۱/۶۷$. ۷۰
شکل ۵-۴ جواب عددی تعدیل یافته(خط کامل) و ثابت (نقطه چین) در زمان $t = ۰/۱۵$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه. ۷۱
شکل ۵-۵ جواب عددی روی شبکه تعدیل یافته در ۱۰۱ نقطه و روی شبکه ثابت با ۲۰۰۱ نقطه. ۷۱
شکل ۵-۶ ارتفاع آب در زمان $t = ۳$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه. ۷۳
شکل ۵-۷ سرعت آب در زمان $t = ۳$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه ۷۳
شکل ۵-۸ ارتفاع آب در زمان $t = ۰/۰۷$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه ۷۴

شکل ۵-۹ ارتفاع آب در زمان $t = ۰/۵$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه ۷۵
شکل ۵-۱۰ ارتفاع آب در زمان $t = ۱$ روی شبکه با ۱۰۱ نقطه ۷۶

فهرست جدول‌ها

۵-۱ مقادیر δ. ۶۷

فصل ۱

روش های عددی برای گسسته سازی معادلات با مشتقات جزیی

۱-۱ مقدمه

از آنجا که معادلات حاکم بر حرکت سیال بصورت دستگاه معادلات غیرخطی می باشد، حل تحلیلی آنها جز در حالت های بسیار ساده، ممکن نیست، لذا باید این معادلات را به صورت عددی حل نمود. روش های متفاوتی برای حل عددی این معادلات وجود دارد که عبارتند از:روش تقریب‌های تفاضلی متناهی (FDM) [۱]، روش عنصر متناهی (FEM) [۲]، روش حجم متناهی (FVM) [۳]، روش اجزا مرزی (BVM) [۴] و روش طیفی (SM)[۵].

برای حل عددی معادلات لازم است میدان جریان به المان های کوچک تقسیم شده و معادلات دیفرانسیل حاکم بصورت معادلات جبری بین مقادیر متغیر های مورد نظر در المان های مختلف نوشته شده و سپس این معادلات جبری حل شوند. به عبارت دیگر باید یک شبکه محاسباتی در میدان جریان تولید گردد.

پس از تولید شبکه محاسباتی باید معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به مجموعه ای از معادلات جبری تبدیل شود. در این معادلات جبری مقادیر متغیر یا متغیر های مورد نظر در المان ها به عنوان مجهولات بوده و با حل این معادلات جبری مقادیر مجهول در میدان حل بدست می آیند. از دیرباز محققین روش های مختلفی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به روابط جبری ابداع نموده اند که به آن ها روش های گسسته سازی معادلات گفته می شود. از میان روش های مختلفی که برای گسسته سازی به کار می رود، روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و روش حجم متناهی، بیشتر از سایر روش ها در حل معادلات مربوط به حرکت سیالات مورد استفاده قرار گرفته است که در این فصل بطور خلاصه به مبانی این روش ها پرداخته می شود. لازم به ذکر است که روش حجم متناهی، روش مورد استفاده در این پایان نامه است.

۱-۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

پدیده‌های فیزیکی اغلب به وسیله‌ی معادلاتی که با چندین مشتق جزئی از کمیت‌های فیزیکی نظیر نیرو، شتاب، سرعت، انرژی، دما و غیره ارتباط دارند، مدل‌سازی می‌شوند. این معادلات بندرت یک حل (صریح) بسته دارند. در این فصل روش های عدی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی معرفی می‌شوند. تنها مسائل یک- بُعدی یا دو- بُعدی مطرح می‌شوند و متغیرهای مکان در مورد مسائل یک- بُعدی با x و با x_1 و x_2 در مورد مسائل دو- بُعدی نمادگذاری می‌شوند. در معادلات دو- بُعدی x، برداری از مولفه‌های (x_1, x_2) را مشخص می‌کند.

---

[۱] Finite Difference Method
[۲] Finite Element Method
[۳] Finite Volum Method
[۴] Boundary Element Method
[۵] Spectral Method

۱-۳ روش‌های تفاضل متناهی

روش تفاضل متناهی (FDM) بر اساس تقریب‌های محلی مشتقات جزئی در یک معادله دیفرانسیل جزئی است که این تقریب‌ها به وسیله‌ی سری‌های تیلور مرتبه پایین استنتاج می‌شوند. تعریف این روش کاملا ساده و برای اجرا نسبتا آسان است. همچنین برای نواحی ساده نظیر مستطیل و وقتی شبکه‌های یکنواخت استفاده می‌شوند، کارایی بهتری دارد. ماتریس‌هایی که از این گسسته‌سازی‌ها نتیجه می‌شوند غالبا خوش‌ساخت هستند به این معنی که معمولا متشکل از تعداد کمی قطرهای غیر صفر هستند. این بخش یک مرور کلی از تکنیک‌های گسسته‌سازی تفاضل متناهی ارائه می‌دهد.

۱-۳-۱ تقریب‌های پایه

ساده ترین راه برای تقریب اولین مشتق تابع u در نقطه x از طریق رابطه زیر است:

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \tag{۱-۱}$$

هرگاه u در x معلوم باشد آنگاه حد رابطه بالا وقتی h به صفر میل می‌کند، مشتق u در x است. برای تابعی که در همسایگی x دارای مشتق مرتبه چهار می باشد، بسط تیلور در بازه $(x, x+h)$ به فرم زیر نوشته می شود:

$$u(x+h) = u(x) + h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{(d^2u)}{(dx^2)} + \frac{h^3}{6}\frac{(d^3u)}{(dx^3)} + \frac{h^4}{24}(d^4\frac{u(\xi^{\pm})}{dx^4}). \tag{۱-۲}$$

بنابراین تقریب (۱-۱) در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{h}{2}\frac{(d^2u(x))}{(dx^2)} + O(h^2). \tag{۱-۳}$$

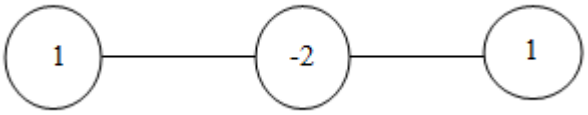
از فرمول (۱-۲) با جایگزین کردن $-h$ به جای h به رابطه (۱-۴) دست می یابیم

$$u(x-h) = u(x) - \frac{hdu}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{6}\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(u(\xi^{\pm})}{dx^4}, \tag{۱-۴}$$

که در آن ξ^+ و ξ^- به بازه $(x-h, x)$ تعلق دارد. با جمع دو رابطه (۱-۲) و (۱-۴) و تقسیم بر h^2 و استفاده از قضیه مقدار میانگین برای مشتقات مرتبه چهار، به رابطه زیر دست می یابیم.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{d^4u(\xi))}{dx^4}. \tag{۱-۵}$$

بطوریکه $\xi^- \leq \xi \leq \xi^+$. فرمول بالا تقریب تفاضل مرکزی مشتق مرتبه دوم نامیده می‌شود چون نقطه‌ای که در آن مشتق تقریب زده شده است، در مرکز نقاط قرار دارد. معمولا وابستگی این مشتق به مقادیر u در نقاط درگیر در تقریب توسط یک "استنسیل" یا "مولکول" نمایش داده می شود که در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱: مولکول سه- نقطه برای تقریب تفاضل مرکزی مشتق مرتبه دوم.

تقریب (۱-۱) برای مشتق مرتبه اول پیشرو است. همچنین فرمول پسرو از جایگزینی h با $-h$ در (۱-۱) بدست می آید. بعلاوه می‌توان از این دو فرمول برای بدست آوردن فرمول تفاضل مرکزی استفاده کرد که عبارت است از:

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{(u(x+h) - u(x-h))}{۲h}. \qquad (۶-۱)$$

اثبات اینکه فرمول تفاضل مرکزی (۱-۶) از مرتبه دو می‌باشد ساده است، در حالی که (۱-۱) تنها دارای دقت مرتبه یک است. عملگرهای تفاضلی پیشرو و پسرو با استفاده از δ^+ و δ^- مشخص می‌شوند که با رابطه های زیر تعریف می شوند:

$$\delta^+ = u(x+h) - u(x). \qquad (۷-۱)$$

$$\delta^- = u(x) - u(x-h).$$

همه‌ی تقریب‌های قبلی با استفاده از این عملگرها قابل بازنویسی هستند. بعلاوه برای استاندارد کردن مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم، تقریب عملگر مرتبه دوم زیر در برخی موارد ضروری می باشد.

$$\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d}{dx}\right].$$

به عنوان مثال فرمول تفاضل مرکزی برای این عملگر که دقت مرتبه دو دارد با رابطه‌ی زیر نشان داده می شود.

$$\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d}{dx}\right] = \frac{۱}{h^۲}\delta^+(a_-(\frac{i-۱}{۲})\delta^- u) + O(h^۲)$$
$$\approx \frac{(a_-(\frac{i+۱}{۲})(u_-(i+۱) - u_-(i)) - (a_-(\frac{i-۱}{۲}))(u_-(i) - u_-(i-۱))}{h^۲}.$$

۱-۳-۲ طرح‌های تفاضلی برای عملگر لاپلاس

همانطور که می دانید عملگر لاپلاس به صورت زیر است:

$$\triangle u = \frac{\partial^۲ u}{\partial^۲ x_۱^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial^۲ x_۲^۲}.$$

اگر تقریب (۱-۵) برای هر دو جمله $\frac{\partial^۲}{\partial x_۱^۲}$ و $\frac{\partial^۲}{\partial x_۲^۲}$ در عملگر لاپلاس با استفاده از طول گام $h_۱$ برای متغیر $x_۱$ و $h_۲$ برای متغیر $x_۲$، استفاده شود تقریب زیر نتیجه می‌شود که دارای دقت مرتبه دو است.

$$\triangle u(x) \approx \frac{u(x_۱ + h, x_۲) - ۲u(x_۱, x_۲) + u(x_۱ - h_۱, x_۲)}{h_۱^۲}$$
$$+\frac{u(x_۱, x_۲ + h_۲) - ۲u(x_۱, x_۲) + u(x_۱, x_۲ - h_۲)}{h_۲^۲}.$$

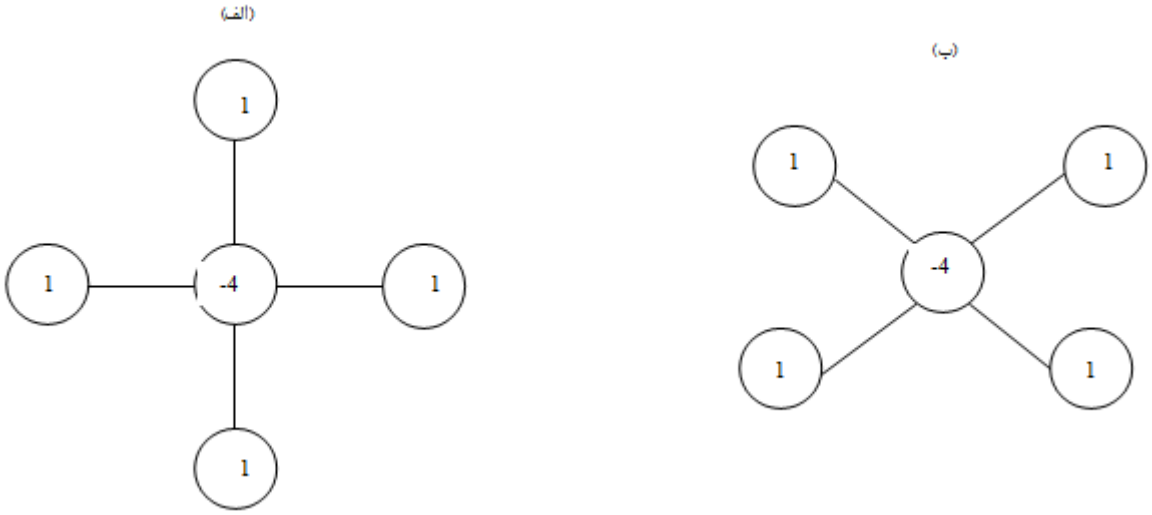
در حالت خاصی که طول گام $h_۱$ و $h_۲$ یکسان و مساوی با طول گام h هستند، تقریب عملگر لاپلاس به صورت زیر نتیجه می شود:

$$\triangle u(x) \approx \frac{۱}{h^۲}[u(x_۱ + h, x_۲) + u(x_۱ - h, x_۲) \\ +u(x_۱, x_۲ + h) + u(x_۱, x_۲ - h) - ۴u(x_۱, x_۲)], \quad (۱-۸)$$

که تقریب مرکزی پنج- نقطه‌ای لاپلاس نامیده می‌شود. مولکول این تقریب تفاضلی متناهی در شکل ۱-۲ قسمت (الف) نشان داده شده است.

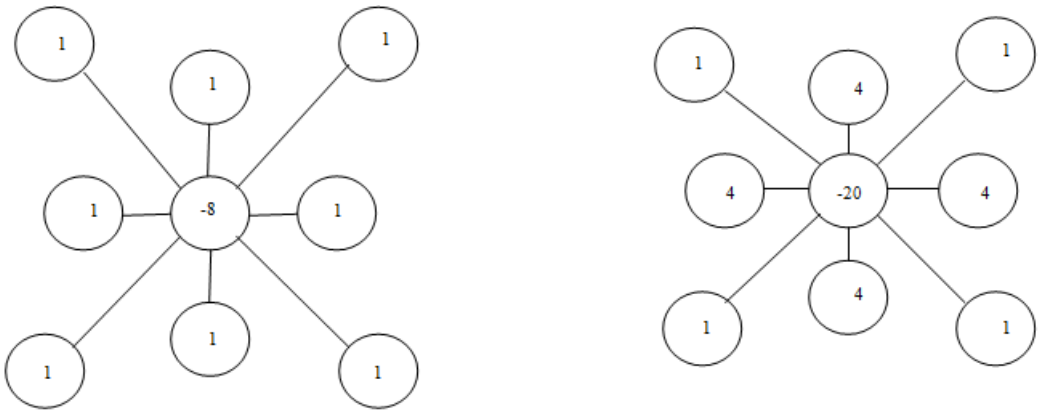
تقریب دیگر به وسیله‌ی بهره‌گیری از چهار نقطه $u(x_۱ \pm h, x_۲ \pm h)$ واقع در دو خط قطری از $u(x_۱, x_۲)$ به دست آورده می شود. این نقاط در روشی مشابه مانند تقریب قبلی می‌توانند استفاده شوند، با این تفاوت که اندازه سلول شبکه عوض می شود. مولکول متناظر، در شکل ۱-۲ قسمت (ب) نشان داده شده است. تقریب (۱-۸) از دقت مرتبه دو است و خطایی به فرم

$$\frac{h^۲}{۱۲}(\frac{\partial^۴ u}{\partial x_۱^۴} + \frac{\partial^۴ u}{\partial x_۲^۴}) + O(h^۳).$$



شکل ۱-۲: مولکول پنج- نقطه‌ای برای تقریب تفاضل مرکزی عملگر لاپلاس: (الف) مولکول استاندارد، (ب) مولکول اریب.

دارد. طرح‌های دیگری وجود دارند که فرمول‌های نُه- نقطه‌ای را در مقابل فرمول‌های پنج- نقطه‌ای بکار می‌گیرند. دو نمونه از چنین طرح‌هایی با ترکیب مولکول استاندارد و اریبی که در بالا توصیف شد بدست می آیند که در شکل ۱-۳ نشان داده شده‌اند.[۲۰]



شکل ۱-۳: مولکول های تفاضل مرکزی نه- نقطه ای برای عملگر لاپلاس.

۱-۴ عناصر متناهی

روش عناصر متناهی یکی از روش های کارامد در حل معادلات دیفرانسیل می باشد که خصوصا برای حل معادلات در نواحی هندسی پیچیده توانایی بسیار زیادی دارد. در این روش میدان حل به المان های کوچکی تقسیم می شود و سپس به کمک روش وردشی یا باقیمانده های وزن دار برای هر المان یک معادله نوشته می شود. بدین ترتیب برای مجموعه المان ها یک دستگاه معادلات جبری بوجود می آید که با حل آن متغیر های مورد نظر محاسبه می شوند. توسعه روش عناصر متناهی و تکنیک های عددی آن، نتیجه تحقیقات زیاد در زمینه استاتیک بوده که در حل سازه های پیچیده لازم بود استآن ها را به قطعات و المان های ساده تری تبدیل کنند. به تدریج و با ابداع روش باقیمانده های وزن دار و گالرکین [۶] ، روش عناصر متناهی در سایر رشته ها و برای حل انواع معادلات دیفرانسیل بکار گرفته شد و اکنون به عنوان یکی از روش های مهم در حل عددی معادلات دیفرانسیل شناخته می شود. مراحلی که باید برای استفاده از یک روش عناصر متناهی طی نمود به صورت زیر است:

۱– گسسته سازی ناحیه

۲–استفاده از توابع پایه‌ای

۳–بررسی پیوستگی اجزا

۴– جمع بندی اجزا

۵–جمع‌بندی ماتریس‌ها و ساخت معادلات سیستم

۶–بررسی و اعمال شرایط مرزی

برای تقریب تابع $u(x)$ در ناحیه Ω، ابتدا مجموعه ای از توابع پایه ای $\{\phi_i, i = ۱, ۲, ۳, ...\}$ را چنان تعریف می‌کنیم که به ازای تمامی مقادیر i روی مرز، $\phi_i = ۰$ و در این صورت می‌توان تابع $u(x)$ را در تمامی نقاط Ω با رابطه زیر تقریب زد.

$$u \cong \hat{u} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \phi_i, \qquad (۹-۱)$$

که در آن α_iها پارامترهایی هستند که برای بدست آوردن یک برازش مناسب، محاسبه می‌شوند. یک شرط بدیهی برای همگرایی تقریب آن است که مجموع توابع پایه به صورتی باشد که وقتی $n \longrightarrow \infty$ ترکیب $\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \phi_i$ بتواند به خوبی نمودار هر تابع چون $u(x)$ باشد.[۱۲]

حال برای تعیین پارامترهای ثابت تقریب‌هایی از نوع رابطه (۱-۹)، روش‌های متعددی استفاده می‌شود که

[۶] Galerkin

از جمله آن ها می توان به روش‌های وردشی و روش‌های باقیمانده وزنی اشاره نمود.

۱-۴-۱ روش وردشی

در این روش می‌خواهیم تابع $u(x)$ را به گونه‌ای بیابیم که انتگرال

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x,$$

کمینه شود. بنابراین چنانچه (۱-۹) جواب تقریبی باشد، پس از جایگذاری در تابعک بالا و مشتق‌گیری از توابع $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ نسبت به مجهولات α_i، کمینه‌سازی روی فضای N بعدی با حل سیستم زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} I(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N.$$

۱-۴-۲ روش باقی مانده وزندار

این روش‌ها به طور کلی به روش‌های زیر تقسیم می‌شوند.[۱۸]

۱–روش گالرکین

۲–روش پترو گالرکین [۷]

۳–روش هم محلی

۴–روش زیردامنه

۵–روش کمترین مربعات

روش گالرکین

در این روش فضای تابع تقریب و فضای تابع وزن یکی هستند. به عبارت دیگر هر بار یکی از توابع پایه‌ای بعنوان وزن در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین توابع پایه‌ای $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ که روی مرز $\partial\Omega$ صفر می‌باشند را انتخاب و با حل سیستم زیر پارامترهای مجهول $\alpha_i, i = 1, 2, ..., N$ بدست خواهند آمد.

$$\int_{\Omega} (A\tilde{u} - f)\phi_i(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

[۷] Petro Galerkin