بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی‌ارشد در رشته‌ی ریاضی کاربردی،

(گرایش آنالیز عددی)

عنوان

یک درونیاب نیستروم برای برخی معادلات انتگرال ولترای خطی به طور ضعیف منفرد

استاد راهنما

دکتر سهراب بزم

استاد مشاور

دکتر سید حمیدرضا مراثی

پژوهشگر

آسیه ابوالفضلی خنبی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

لبخند زیبای خدا،

مادرم

و کوه صبر و استقامت،

پدرم

و

استاد بزرگوارم

چیدم گلی ز باغ ادب تا بروز عید
در بارگاه میر ادب‌پرور آورم

حیف است با خسان گل دانش کنی نثار
من گل نثار مردم دانشور آورم

شهریار

ستایش

حمد و سپاس خداوند علیم را،

که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش

گام بردارم.

سپاس

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

در آغاز کلام، تشکر ویژه‌ای از خانواده‌ی عزیزم مخصوصاً **مهربان پدرم** و **نازنین مادرم** دو بیکران، بی‌همتا دو زلال‌اندیش دو سرو قامتی که گوهر وجودشان و نسیم کلامشان را همواره بی هیچ منت و ادعا مرحمی نمودند بر خستگی‌هایم. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت و ققنوس جوانیشان به پای روشنی حیات من سوخت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم.

و به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر سهراب بزم

که در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بودم و بزرگترین افتخارم در طول تحصیل، شاگردی این استاد بی‌نظیر و بزرگوار است، قدردانی بنمایم و سلامتی و سربلندی ایشان را از خالق هستی خواهانم.

همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر سید حمیدرضا مراثی** عضو هیأت علمی دانشگاه بناب که استاد مشاور اینجانب بودند و از نظرات و راهنمایی‌های ایشان در طول دوره بهره‌مند گردیدم، تشکر و قدرانی می‌نمایم و سلامتی و پیروزی را برایشان آرزو دارم.

از استاد گرامی جناب آقای **دکتر حسن مجیدیان** عضو هیأت علمی بنیاد دانشنامه‌نگاری ایران، که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه‌ام را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم و از خداوند یکتا سلامتی و شادکامی ایشان را خواستارم.

تشکر صمیمانه‌ای از جناب آقای دکتر **محمد مهدی‌زاده خالسرایی**، دارم که در این دوره نقش ویژه‌ای در موفقیت تحصیلی‌ام داشتند. همچنین از اساتید دوره‌ی کارشناسی‌ام به ویژه، جناب آقای دکتر **مهدی زعفرانیه**، جناب آقای دکتر **امین رفیعی** و جناب آقای دکتر **محمود امین‌طوسی** اعضای هیأت علمی گروه ریاضی دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه حکیم سبزواری تشکر و قدردانی می‌نمایم و برای ایشان از درگاه خداوند سبحان آرزوی سلامتی و سربلندی می‌نمایم.

و در پایان از دوستان بسیار خوبم، خانم‌ها سمیه سجادی، فتانه دلزنده، معصومه رشیدی، الهه رحیمی، الهام خسروی، مریم مولایی، فاطمه نظافت، سارا جلالوند، شکوفه ناصری، طیبه دیندارلو و سمیه خداشناس و آقای بیات که هر کدام به نحوی در این دو سال مرا یاری کردند، کمال تشکر را دارم و از ایزد منان سلامتی و شادی را برایشان آرزومندم.

آسیه ابوالفضلی

شهریورماه ۹۲

نام خانوادگی: ابوالفضلی خنبی	نام: آسیه

عنوان پایان‌نامه: **یک درونیاب نیستروم برای برخی معادلات انتگرال ولترای خطی به طور ضعیف منفرد**

استاد راهنما: دکتر سهراب بزم	استاد مشاور: دکتر سید حمیدرضا مراثی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی کاربردی
گرایش: آنالیز عددی	

دانشگاه: مراغه	دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲	تعداد صفحه: ۹۸

کلیدواژه‌ها: معادله انتگرال ولترا- هسته‌ی به طور ضعیف منفرد.

چکیده: یک معادله‌ی انتگرال ولترای خطی نوع دوم و به طور ضعیف منفرد که به وسیله‌ی یک عملگر غیرفشرده تعریف شده است را در نظر می‌گیریم و با استفاده از گره‌های انتگرال‌گیری گاوس-رادو یک درونیاب از نوع نیستروم برای جواب آن به دست می‌آوریم. با فرض پایداری درونیاب، که مثال‌های عددی هم آن را تأیید می‌کنند، تخمین‌هایی از همگرایی به دست می‌آوریم.

فهرست مطالب

لیست جداول

تاریخچه

معادلات انتگرال کاربردهای گوناگونی در بسیاری از حوزه‌ها مانند مکانیک محیط‌های پیوسته، نظریه‌ی پتانسیل، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه‌ی جنبشی گازها، پدیده‌ی وراثت در فیزیک و زیست شناسی، نظریه‌ی تجدید و علم پزشکی دارد (مراجع [۳۱] و [۳۴] را ملاحظه فرمایید).

در تحقیقات قرن اخیر در نظریه‌ی کشسانی، این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده‌اند، به خصوص آن دسته که به معادلات انتگرال منفرد شهرت دارند. معادلات انتگرال برای سال‌های زیادی است که در علوم ریاضی ظاهر شده‌اند و مبدأ آن به تئوری انتگرال فوریه برمی‌گردد.

لیکن توسعه نظریه‌ی معادلات انتگرال در اواخر قرن ۱۹ شروع شد و در محدوده‌ی سال‌های ۱۹۰۳ − ۱۹۰۰ بود که یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا [۱] روی این نوع معادلات کار کرد. همچنین یک ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم [۲] در همان سال‌ها روی یک روش جدید جهت حل مسأله دیریکله [۳] سعی بسیاری نمود. از آن زمان تا عصر حاضر معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است، زیرا آن‌ها به طور پیوسته با مسایل جدید و جالبی برخورد می‌کنند.

البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. به طوری که اگر معادله‌ی دیفرانسیل

[۱] Volterra

[۲] Fredholm

[۳] Dirichlet

مورد نظر به صورت یک مسأله‌ی مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله‌ی انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع معادلات انتگرال فردهلم خواهد بود و اگر معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله‌ی مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله‌ی حاصل یک معادله‌ی انتگرال ولترا خواهد بود. بنابراین یک رویکرد محاسباتی برای حل معادلات انتگرال، یک شاخه‌ی ضروری از تحقیقات علمی می‌باشد [۳۵].

معادلات انتگرال منفرد در اوایل دهه‌ی قرن جاری در ارتباط با دو مسأله‌ی کاملاً متفاوت توسط دو نفر معرفی شد. یکی از آنها هیلبرت [۱] بود که به بعضی مسایل مقدار مرزی در نظریه‌ی توابع تحلیلی برخورد کرد. دیگری پوانکاره [۲] بود که در تئوری عمومی جزر و مد با معادلات انتگرال مواجه شد. نظریه‌ی معادلات انتگرال منفرد در دهه‌ی سوم و چهارم توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیراد [۳] و دو ریاضیدان روسی به نام‌های وکوا [۴] و موسخلیش ویلی [۵] توسعه پیدا کرد.

قضایای فردهلم از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند. این قضایا از ابتدا توسط فردهلم فقط برای هسته‌های پیوسته ارایه شدند، ولی در ادامه افراد دیگری این قضایا را برای هسته‌های کلی‌تری تعمیم دادند. لذا لازم است از اشخاصی نظیر کارلمن [۶] هم که در این راه نقش عمده‌ای داشته‌اند یاد کنیم. البته ریس [۷] با اصلاحات وسیعی که از نظریه‌ی عملگرها داشت قضایای مذکور را به صورت وسیع‌تری تعمیم داد، زیرا او به یک معادله انتگرال به صورت یک عملگر نظر انداخته و قضایای فردهلم را برای یک عملگر فشرده تعمیم داد.

یکی از مسایل خوش‌وضع، معادلات انتگرال نوع دوم می‌باشد که به صورت تحلیلي توسط فردهلم حل شده است و از نظر عددی هم می‌توان با روش‌های نیستروم [۸]، ال جندی [۹]، مسأله کمترین مربعات [۱۰] و گلرکین [۱۱] این رده از مسایل را حل

[۱] D. Hilbert [۲] H. Poincare [۳] Zhirad [۴] Vocva [۵] Mosxlish Vili
[۶] F. Carleman [۷] F. Riesz [۸] Nyström [۹] El-gendi [۱۰] Least square problem
[۱۱] Galerkin

کرد. معادلات نوع اول از مسایل بدوضع هستند و چون ماهیت کامپیوترهای رقمی خطاپذیر است، به راحتی نمی‌توان این نوع معادلات را حل کرد. گاهی اوقات این نوع مسایل ممکن است جواب نداشته باشد و یا اینکه جواب یکتا نباشد. این رده از مسایل را می‌توان با استفاده از روش‌های بسط، هم‌محلی [۱]، تابع ویژه، منظم سازی [۲]، تکراری و گلرکین سریع [۳] حل نمود.

[۱] Collocation
[۲] Regularizei
[۳] Fast Galerkin

مقدمه

در آغاز کلام این نکته را متذکر می‌شویم که نظریه و کاربرد معادلات انتگرال یک موضوع مهم در ریاضیات کاربردی است. معادلات انتگرال به عنوان مدل‌های ریاضی برای حالت‌های فیزیکی متفاوت و زیادی به کار برده شده‌اند و همچنین معادلات انتگرال هنگام فرمول‌بندی مجدد و دوباره مسایل دیگر در ریاضیات مطرح می‌شوند. برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] مراجعه نمایید. بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسأله‌ای ظاهر می‌شود، تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار برده می‌شود که در فصل ۱ به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

در این پایان‌نامه معادله انتگرال

$$u(t)-\int_{0}^{t}k(t,s)\big(\frac{s}{t}\big)^{\mu}\frac{u(s)}{s}ds=f(t),\qquad t\in(0,T]\ ,\ \ T>0, \tag{1}$$

را نظر می‌گیریم و آن را در فضای توابع حقیقی مقدار

$$\mathbf{C}_{\varepsilon}[0,T]=\Big\{y(t)=t^{\varepsilon}h(t),h\in\mathbf{C}[0,T],0<\varepsilon<1,\|y\|=\|h\|_{\infty}\Big\}, \tag{2}$$

مطالعه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم اگر $1 < \mu$ و $|k(t,s)| \leq 1$، برای $0 \leq s \leq t \leq 1$، آنگاه معادله‌ی (۱) برای هر $f(t)\in\mathbf{C}_{\varepsilon}[0,T]$ یک جواب یکتا در $\mathbf{C}_{\varepsilon}[0,T]$ دارد.

تعدادی از نویسندگان مسأله وجود و یکتایی جواب معادله‌ی (۱) را بررسی کردند. در بخش ۲.۲ وجود و یکتایی جواب

این معادله را به ازای $k(t,s)\equiv 1$ بررسی می‌کنیم. در حالت کلی‌تر که $k(t,s)$ روی $0\leq s\leq t\leq T$ دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و $k(t,t)=h(t)$ که در آن h یک تابع هموار است در [۳۳] بررسی شده است. در [۳۸] رفتار مجانبی [1] جواب معادله‌ی (۱.۲) زمانی که $k(t,s)\equiv 1$ و با فرض $f\in \mathbf{C}^1[0,T]$ نتیجه شده است و در گام دوم به حالت $f=t^\alpha \bar{f}(t)$ به طوری که $f\in \mathbf{C}^1[0,T]$ تعمیم داده شده است.

روش‌های حل عددی معادله (۱) تنها برای حالت $k(t,s)\equiv 1$ (و معادله‌ی هم‌ارز آن یعنی (۶.۲)) بررسی شده‌اند. در [۴۹] تقریب‌های اسپلاین [2] چندجمله‌ای از درجه‌ی ۱ و ۲ برای جواب معادله‌ی (۶.۲) به وسیله‌ی روش‌های انتگرال ضربی اویلر و ذوزنقه‌ای به دست آمده است. در [۲۵] از قاعده‌ی سیمپسون [3] استفاده شده است.

در [۲۷] از چندجمله‌ای‌های هرمیت مکعبی قطعه‌ای [4] در تقریب جواب معادله‌ی (۱) برای حالت $\mu>1$ استفاده شده است. در [۳۷] از ترکیب روش‌های اویلر و برونیابی ریچاردسون [5] برای حل معادله‌ی (۶.۲) وقتی که $\mu>1$ باشد، استفاده شده است. سپس این ایده برای هر $\mu>0$ در [۳۸] تعمیم داده شده است و در آنجا یک تجزیه و تحلیل دقیق‌تر منجر به یک بسط خطای مجانبی جدید می‌شود و اجازه استفاده از E– الگوریتم را به عنوان یک روش برونیابی به ما می‌دهد. در همان [۳۸] نشان داده شده است که در حالت $0<\mu\leq 1$ روش اویلر به تنها جواب از خانواده‌ی $\mathbf{C}^1[0,T]$ همگراست.

در [۲۴] یک روش برای تقریب هر جواب در خانواده‌ی نامتناهی از جواب‌های ناهموار از معادله‌ی (۱) معرفی شده است. برای تقریب جواب معادله‌ی (۱) یک روش نیستروم به کار می‌بریم ([۱۱] را ببینید). بدین منظور ابتدا یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری عددی ضربی [6] بر اساس گره‌های گاوس-رادو ([۲۰] را ببینید) برای گسسته‌سازی انتگرال در معادله‌ی (۱) معرفی می‌کنیم و یک تخمین همگرایی برای آن پیدا می‌کنیم. سپس برای به دست آوردن یک درونیاب نیستروم از جواب از

---

[1] Asymptotic behaviour [2] Spline approximations [3] Simpson's rule [4] Piecewise cubic Hermite polynomials
[5] Richardson extrapolation [6] Product quadrature rule

این قاعده استفاده می‌کنیم. به دلیل غیرفشرده بودن [۱] عملگر K، بحث‌های استاندارد معمول در تحلیل پایداری [۲] درونیاب برای این حالت به کار نمی‌رود، اما شواهد عددی تأیید می‌کند که پایداری برقرار است. بنابراین با فرض پایداری ثابت می‌کنیم که درونیاب همگراست و تخمین‌هایی از همگرایی را به دست می‌آوریم.

پیاده کردن روش در کامپیوتر ساده است، اما تحلیل تقریب‌های به دست آمده به وسیله‌ی روش به کار رفته در اینجا و مقایسه‌ی آن با تقریب به دست آمده به وسیله‌ی سایر نویسندگان، که فقط در حالت $k(t,s) \equiv ۱$ امکان‌پذیر است، بسیار رضایت‌بخش هستند ([۲۷]، [۳۸]و [۴۹] را ملاحظه نمایید).

به عنوان آخرین نکته‌ی مقدماتی یادآور می‌شویم که وقتی یک نمایش از جواب معادله‌ی (۱) معلوم است ([۳۳] را ببینید)، طبیعی‌ترین راه برای تقریب یک جواب از معادله‌ی (۱) استفاده از انتگرال‌گیری گاوس در محاسبه‌ی آن به نظر می‌رسد و این حدس به وسیله‌ی چند آزمایش عددی ثابت شده است.

مرجع اصلی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته [۱۳] است. ترتیب ارایه مطالب در این پایان‌نامه بدین صورت است که ابتدا در فصل ۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی و برخی از روش‌های حل معادلات انتگرال را بیان می‌نماییم. در فصل ۲ به بررسی درونیاب نیستروم برای برخی معادلات انتگرال ولترای به طور ضعیف منفرد می‌پردازیم که همگرایی و تخمین خطای آن را نیز بیان می‌کنیم. در فصل آخر چند مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ماکزیمم قدرمطلق خطای آنها را در جدول گزارش داده‌ایم.

[۱] Non-compact

[۲] Stability analysis

فصل ۱

مقدمات و برخی روش‌های حل معادلات انتگرال

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را بدون اثبات و برخی از نمادهایی که در فصل‌های دیگر مورد نیاز است را بیان می‌کنیم و چند روش حل معادلات انتگرال ولترا را معرفی خواهیم کرد. همچنین روش اویلر و ذوزنقه‌ای را به طور مختصر بیان کرده و در آخر روش انتگرال‌گیری گاوس-رادو را توضیح خواهیم داد. برای جمع‌آوری مطالب این فصل از [۱]، [۲]، [۴]، [۱۱]، [۱۲] [۲۱]، [۲۴] و [۳۲] استفاده نموده‌ایم.

۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در بررسی پاره‌ای از معادلات دیفرانسیل به معادلاتی برخورد می‌کنیم که در آنها تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. مهمترین این نوع از معادلات، معادلات انتگرال فردهلم و ولترا می‌باشند که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. معادله انتگرال [۱]. یک معادله‌ی انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر

[۱] Integral equation

می‌شود.

یک نمونه از معادله‌ی انتگرال به صورت

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \quad (1.1)$$

است و در حالت کلی‌تر

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt,$$

که در آن $k(x,t), f(x)$ توابعی معلومند که به ترتیب تابع پیشرو و هسته‌ی معادله انتگرال نامیده می‌شوند و $u(x)$ تابع مجهول است که باید معلوم شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال و λ ضریبی معلوم است. اگر $\phi(x) \neq 0$ باشد با تقسیم طرفین معادله بر $\phi(x) \neq 0$ به معادله‌ی (۱.۱) می‌رسیم.

هدف، تعیین تابع مجهول $u(x)$ است به طوری که در رابطه (۱.۱) صدق کند.

تعریف ۲.۱.۱. خاصیّت خطی بودن [1]. یک معادله انتگرال را خطی گوییم در صورتی که بر حسب تابع مجهول $u(x)$ خطی باشد.

در غیر این صورت معادله انتگرال را غیرخطی می‌گوییم. معادلات انتگرال خطی را می‌توان به دو گروه متداول معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته‌بندی نمود.

مثال ۳.۱.۱. معادله انتگرال

$$u^3(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)u(s)ds,$$

[1] Linear property

غیر خطی است.

تعریف ۴.۱.۱. معادله انتگرال خطی فردهلم [۱]. شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم به صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \leq x, t \leq b, \tag{۲.۱}$$

است که در آن حد پایین و بالای انتگرال‌گیری اعداد ثابت a و b هستند. در معادله (۲.۱) $k(x,t)$، $f(x)$ و λ به صورت تعریف ۱.۱.۱ بیان می‌شوند. بر حسب اینکه $\phi(x)$ چه مقداری داشته باشد معادله انتگرال فردهلم خطی به دو دسته تقسیم می‌شود:

۱) اگر $\phi(x) = 0$، آنگاه معادله‌ی (۲.۱) به معادله‌ی

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0,$$

تبدیل می‌شود، این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌گوییم.

۲) اگر $\phi(x) = 1$، آنگاه معادله‌ی (۲.۱) به صورت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

خواهد شد که آن را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. معادله انتگرال خطی ولترا [۲]. شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا مانند معادلات فردهلم می‌باشد با این تفاوت که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری به جای عدد ثابت b به صورت یک متغیر مانند x به صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{۳.۱}$$

[۱] Fredholm linear integral equation

[۲] Volterra linear integral equation

ظاهر می‌شود.

باید توجه کرد که معادله‌ی (۳.۱) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوری که هسته‌ی $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی کرد:

۱) اگر $\phi(x) = ۰$، آنگاه معادله‌ی (۳.۱) به صورت

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = ۰,$$

خواهد شد. به این نوع معادله انتگرال، معادله انتگرال ولترای نوع اول می‌گوییم.

۲) اگر $\phi(x) = ۱$، آنگاه معادله‌ی (۳.۱) به صورت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{۴.۱}$$

خواهد شد که این نوع معادله انتگرال را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌گوییم.

نکته ۶.۱.۱. در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول $u(x)$ تنها به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

نکته ۷.۱.۱. در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک فاصله‌ی متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود، اما در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولاً همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه‌ی موضوع رشد جمعیت بودند که با معادلات انتگرال-دیفرانسیل مواجه شدند.

تعریف ۸.۱.۱. معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل [۱]. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود، بدین صورت که در یک طرف در زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب معادلات انتگرال-دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند.

مثال ۹.۱.۱. چند نمونه از معادلات انتگرال-دیفرانسیل

$$u''(x) = -x + \int_{0}^{x}(x-t)u(t)dt, \quad u(0)=0, \quad u'(0)=1, \tag{۵.۱}$$

$$u'(x) = -\sin x - 1 - \int_{0}^{x} u(t)dt, \quad u(0)=1, \tag{۶.۱}$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_{0}^{1} xtu(t)dt, \quad u(0)=1, \tag{۷.۱}$$

معادلات (۵.۱) و (۶.۱) را معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا و معادله‌ی (۷.۱) را معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم می‌نامند. این تقسیم‌بندی بر اساس حدود انتگرال‌گیری انجام شده است.

تعریف ۱۰.۱.۱. معادله‌ی همگن [۲]. اگر در معادلات انتگرال فردهلم و ولترای نوع دوم شرط $f(x)=0$ برقرار باشد آنگاه معادله‌ی حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامیم، در غیر این صورت معادله‌ی مورد نظر را یک معادله‌ی غیرهمگن می‌گوییم.

[۱] Integral-differential equation

[۲] Homogeneous equation