بنام یزدان پاک

۲۴۵۵۶

دانشگاه شهید بهشتی

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

بررسی منظم آرنز بودن جبر $A\hat{\otimes}B$

استاد راهنما

دکتر سید علیرضا حسینیون

استاد مشاور

دکتر محمد مهدی ابراهیمی

استاد مدعو

دکتر عبدالحمید ریاضی

نگارش

حسین دانشمند

بهمن ماه ۷۶

بسمه تعالی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..........................

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

::::::::::::::::::::::::::::::::::

جلسه هیئت داوران ارزیابی پایان نامه آقای حسین دانشمند

به شناسنامه شماره ۸ صادره از فردوس متولد ۱۳۴۹

دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته ریاضی

با عنوان آرنز منظم بودن جبرهای تانسوری $A\hat{\otimes}B$

به راهنمائی دکتر سیدعلیرضا حسینیون طبق دعوت قبلی در تاریخ ۷۶/۱۱/۱۳

تشکیل گردید و براساس رای هیات داوری و با عنایت به ماده ۴ آئین

نامه کارشناسی ارشد مورخ ۶۸/۸/۲۸ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸٫۵

و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

۱ـ آقای دکتر سید علیرضا حسینیون استاد راهنما

۲ـ " " محمد مهدی ابراهیمی استاد مشاور

۳ـ " " عبدالحمید ریاضی داور مدعو

۴ـ " " سید علیرضا حسینیون مدیر گروه

۵ـ

تشکّر و قدر دانی

یا ربّ خِردم در خور اسباب تو نیست

و اندیشه من بجز مناجات تو نیست

من ذات تو را به واجبی کی دانم

داننده ذات تو بجز ذات تو نیست

"خیام"

شایسته است پس از حمد و ثنای الهی که با الطاف بی کران خویش ما را مورد عنایت قرار داده تا رهرویی باشیم در راه بی انتهای علم و دانش و قطره‌ای در دریای معرفت ، از زحمات بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سید علیرضا حسینیون که در دوران تحصیل و پایان نامه بنده را صمیمانه یاری نموده‌اند تشکّر و قدردانی نمایم . همچنین از آقایان دکتر محمدمهدی ابراهیمی و دکتر عبدالحمید ریاضی که وقت گرانبهای خود را صرف مطالعه پایان نامه‌ام نموده‌اند خالصانه تشکّر مینمایم و توفیقات همهٔ ایشان را از درگاه باریتعالی خواستارم . از همهٔ مسؤولین و کارکنان دانشکده علوم دانشگاه شهید بهشتی و مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات که حسن همکاری را با تمام دانشجویان ریاضی دارند تشکر و قدردانی می نمایم . در پایان این پایان نامه را به تمام اساتید بزرگوارم و همهٔ رهپویان دانش تقدیم می‌کنم .

حسین دانشمند

بهمن ماه ۱۳۷۶

فهرست مطالب

عنوان .... صفحه

فصل ۵

چکیده

در سال ۱۹۵۱ آر. آرنز دو ضرب روی A'' تعریف نمود که به ضرب آرنز چپ و ضرب آرنز راست موسوم‌اند. تحت هر یک از این دو ضرب A'' تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود. اگر این دو ضرب روی A'' بر هم منطبق باشند جبر A را منظم آرنز می‌گوئیم. یک مسئله مهم و طبیعی بررسی ساختارهای جدیدی از جبرهای منظم آرنز است. بدیهی است که یک زیر جبر بسته از یک جبر منظم آرنز، منظم آرنز و جبرهای خارج قسمتی از یک جبر منظم آرنز نیز منظم آرنز است. آرنز در [۳] ثابت نمود که $(\underset{i\in I}{\oplus} A_i)_1$ منظم آرنز است اگر و فقط اگر هر یک از A_iها منظم آرنز باشند همچنین در [۲۲] ثابت شده است که $\underset{i\in I}{\Pi} A_i$ لزومی ندارد منظم آرنز باشد حتی اگر هر یک از A_iها با بعد متناهی باشند.

فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند روی فضای تانسوری تصویری $A\hat{\otimes} B$ از A و B یک ضرب وجود دارد که آنرا به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. در این رساله منظم آرنز بودن جبر $A\hat{\otimes} B$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در فصل (۱) تعاریف و مقدمات، ضربهای آرنز و نتایج اولیه و فضاهای ضرب تانسوری را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همانطوری که در این فصل خواهید دید معمولاً معیار $f \in A$ عمومی برای تصمیم‌گیری درباره منظم آرنزبودن جبر A حد دوگانه است. به عبارت دیگر منظم آرنز است اگر برای هر دو دنباله کراندار (x_n) و (y_m) در A و برای هر A'

$$\lim_n \lim_m f(x_n y_m) = \lim_m \lim_n f(x_n y_m)$$

اما در استفاده از این روش برای جبر $A\hat{\otimes} B$ با عبارتهای پیچیده‌ای مواجه می‌شویم لذا در

فصل (۲) روش دیگری برای این منظور موسوم به فرمهای دو خطی دو منظم بیان می‌کنیم.

در این فصل اولین قضیه اصلی این رساله بیان گردیده است (قضیه ۲-۴) این قضیه یک شرط لازم و کافی برای منظم آرنز بودن جبر $A \hat{\otimes} B$ را ارائه می‌کند. دراین فصل منظم آرنز بودن جبرهای $l^p \hat{\otimes} A$ ($1 \leq p < \infty$) و $L^p(G) \hat{\otimes} A$ ($1 < p \leq \infty$) و $C(G) \hat{\otimes} A$ (G گروه توپولوژیکی فشرده) برای هر جبر منظم آرنز A ثابت می‌شود. عامل اصلی اثبات در اینجا فشرده بودن ضرب در جبرهای l^p و $L^p(G)$ است. از این قضیه همچنین منظم آرنز بودن جبر $C(K) \hat{\otimes} A$ وقتی K یک فضای فشرده پراکنده و A منظم آرنز که دوگان A شامل هیچ زیرفضای ایزومورف با $C_\circ$ نیست، را در فصل (۴) نتیجه می‌گیریم.

در فصل (۵) در ابتدا نامساوی گروتندیک (Gerothendick) را بیان و ثابت می‌کنیم سپس منظم آرنز بودن جبرهای $C(k) \hat{\otimes} C(k)$، $L^\infty(\mu) \hat{\otimes} L^\infty(\lambda)$، $l^\infty \hat{\otimes} l^\infty$، $A(D) \hat{\otimes} A(D)$، $H^\infty(D) \hat{\otimes} H^\infty(D)$، $A(D) \hat{\otimes} C(S)$ و $H^\infty(D) \hat{\otimes} C(S)$، $H^\infty(D) \hat{\otimes} A(D)$ که K و S دو مجموعه فشرده و $A(D)$ جبر دیسک و $H^\infty(D)$ کلاسهای هاردی روی گوی واحد D از اعداد مختلط می‌باشند، ثابت می‌شود.

اساس کار این رساله، مقاله [۲۶] است که توسط آقای Ali Ülger در سال ۱۹۸۸ ارائه و در مجله:

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

به چاپ رسیده است.

فصل اول

نمادها و مقدمات

۱-۱ تعریف: یک جبر روی میدان F ($\mathbb{C}$ یا R) عبارت است از یک فضای برداری روی F

با ضرب $A \times A \to A$ که در شرایط زیر صدق نماید.
$(x, y) \to xy$

۱) $x(yz) = (xy)z \qquad x,y,z \in A$

۲) $x(y+z) = xy + xz$

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y) \qquad \alpha \in F$

اگر $F = R$، A را جبر حقیقی و اگر $F = \mathbb{C}$، A را جبر مختلط می‌نامیم.

۲-۱ تعریف: نگاشت $\| \ \|: A \to R$ را یک نرم روی جبر A گوئیم اگر دارای خواص زیر باشد.

۱) $\|x\| \geq 0$

۲) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۴) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

۵) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$

جبر A با نرم $\|\cdot\|$ را با علامت $(A, \|\cdot\|)$ نمایش داده و آنرا یک جبر نرمدار گوئیم.

در جبر نرمدار A متریک d را با ضابطه $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می‌نمائیم.

اگر جبر A با توپولوژی حاصل از این متریک یک فضای توپولوژیک کامل باشد، A را یک جبر باناخ گوئیم.

اگر عضو $e \in A$ موجود باشد که برای هر a از A، $ea = ae = a$ آنگاه جبر A را یکدار نامیم.

اگر جبر $(A, \|\ \|)$ یکدار بوده و در شرط $\|e\| = ۱$ صدق کند آنرا جبر نرمدار یکه می‌نامیم.

۱ - ۳ تبصره: جبر نرمداری راکه یکدار نباشد می‌توان در یک جبر یکدار جانشانی کرد این عمل را یکدار سازی می‌نامیم. فرض کنیم A جبر نرمداری روی F باشد که فاقد یک است برای هر $a,b \in A$ و $\alpha, \beta \in F$ جمع و ضرب اسکالر و ضرب را روی مجموعه $A \times F$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$$

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$$

همراه با نرم $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$

جبر نرمدار یکداری خواهیم داشت که آنرا با $A \oplus F$ نمایش می‌دهیم عضو (۱ و ۰) با نرم

یک عضو واحد این جبر است.

نگاشت $A \to A \oplus F$ با $a \to (a , 0)$ یک یک‌ریختی ایزومتری از A بروی زیر جبری از $A \oplus F$ است.

۱-۴ تبصره: هر جبر نرمدار روی R را می‌توان در یک جبر نرمدار روی $\mathbb{C}$ جانشانی کرد این عمل را مختلط‌سازی می‌نامیم به این طریق که اگر $a, b, c, d \in A$ و $\alpha, \beta \in R$ جمع دو ضرب اسکالر و ضرب روی مجموعه $A \times A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a,b) + (c,d) = (a + c , b + d)$$

$$(\alpha + i\beta) (a , b) = (\alpha a - \beta b , \alpha b + \beta a)$$

$$(a , b) (c , d) = (ac - bd , ad + bc)$$

این جبر را به A_c نمایش می‌دهیم نگاشت $A \to A_c$ با ضابطه $a \to (a , 0)$ یک یکریختی از A به زیر جبری از A_c است.

بنابراین بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توان بحث روی جبرهای باناخ را روی جبرهای باناخ مختلط و یکدار متمرکز نمود.

اکنون جبرهای باناخی را که در این رساله مورد بررسی قرار می‌گیرند، معرفی می‌نمائیم.

مثال **۱ -** فرض کنید K یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. $C(K)$ فضای همه توابع پیوسته حقیقی یا مختلط روی K است. نرم روی $C(K)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر $f \in C(K)$

$$\| f \| = \sup \{ \mid f(x) \mid ; \ x \in K \}$$

$C(K)$ با نرم فوق و جمع و ضرب اسکالر یک فضای باناخ و با ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ است.

مثال ۲-

اگر $D=\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$، $A(D)= \{f \in C(D); f|_{D^\circ} \in H(D^\circ)\}$

$A(D)$ نیز با نرم سوپریموم و اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ است که در آن $H(D^\circ)$ مجموعه تمام نگاشتهائی از D° به $\mathbb{C}$ است که روی D موضعاً هولومورفیک‌اند (یعنی روی هر زیرمجموعه همبند و باز از D تحلیلی‌اند).

مثال ۳- برای ($1 \leq p < \infty$) فضای همهٔ دنباله‌های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط را که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ به l^p نمایش می‌دهیم. نرم در l^p با ضابطه $(\|(x_n)\|_p)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ تعریف می‌شود. l^p با نرم فوق و اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ است.

l^∞ فضای همه دنباله‌های کراندار از اعداد مختلط است که در آن نرم با ضابطه $\|(x_n)\| = \sup\{|x_n|; n \in N\}$ تعریف می‌شود.

C را فضای همهٔ دنباله‌های همگرا و $C_\circ$ را فضای هم‌دنباله‌هائی که حد آنها صفر است درنظر می‌گیریم. C و $C_\circ$ و l^∞ (با نرم l^∞) و اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب نقطه به نقطه جبرهای باناخ‌اند.

مثال ۴- فرض کنید E یک مجموعه غیرتهی و X یک فضای برداری نرمدار باشد،

$l^{\infty}(E, X)$ فضای برداری نرمدار تمام توابع کراندار از E به X با جمع و ضرب اسکالر و نرم یکنواخت $\| f \|_{\infty} = \sup \{ | f(s) | ; s \in E\}$ است.

وقتی که X یک جبر نرمدار باشد $l^{\infty}(E, X)$ نیز یک جبر نرمدار با ضرب نقطه به نقطه است.

فرض کنید D یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{C}$ باشد زیر جبر $H^{\infty}(D) = H(D) \cap l^{\infty}(D, \mathbb{C})$ یک جبر یکنواخت از توابع روی D است.

مثال ۵- فرض کنیم G گروه توپولوژیکی موضعاً فشرده باشد $L^{p}(G)$ را طی مراحل زیر تعریف می‌کنیم اندازه احتمال اندازه مثبتی است که روی هر گروه فشرده G برابر با یک است. ثابت می‌شود که روی هر گروه فشرده G اندازه بورل منحصر به فردی مانند m موجود است. به قسمی که m اندازه احتمال بوده و اگر $f \in C(G)$ و $s \in G$ آنگاه

$$\int_G f\,dm = \int_G (L_s f)\,dm = \int_G (R_s f)\,dm$$

که در آن $(L_s f)(x) = f(sx)$ و $(R_s f)(x) = f(xs)$

همچنین داریم $\int_G f(x)\,dm(x) = \int_G f(x^{-1})\,dm(x)$

این m را اندازه هار گویند.

اگر X یک فضای اندازه‌پذیر و Y فضای توپولوژیک باشد، تابع $f: X \to Y$ را تابع اندازه‌پذیر گویند اگر برای هر مجموعه باز $V \subset Y$، $f^{-1}(V)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

برای گروه موضعاً فشرده G اندازه هاری موجود است که آنرا μ در نظر گرفته قرار می‌دهیم.

$$L^{p}(G) = \{ f: G \to \mathbb{C} \mid f \text{ اندازه‌پذیر }, (\int_G | f |^{p})\,d\mu < \infty \}$$

$L^{p}(G)$ $(1 \le p < \infty)$ همراه با جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه و نرم

$$\| f \|_p = \left(\int_G |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

و ضرب

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})\, g(y)\, d\mu(y)$$

تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد.

$L^{\infty}(G)$ فضای هم توابع کراندار μ - اندازه‌پذیر روی G است که در آن نرم به صورت زیر

تعریف می‌شود.این فضا همراه با نرم $\| f \| = \mu - \underset{x \in G}{\operatorname{esssup}} |f(x)|$

و اعمال جمع و ضرب اسکالر و ضرب پیچشی یک جبر باناخ است.

برای بررسی بیشتر مطالب فوق می‌توانید به [۲۵] مراجعه نمائید.

ضربهای آرنز و نتایج اولیه

در این قسمت ابتدا ضربهای آرنز را تعریف می‌کنیم سپس نشان می‌دهیم که A'' با ضربهای آرنز تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود.

۱-۵ تعریف: جبر باناخ A و دوگان‌های اول و دوم آن را به ترتیب با علامتهای A' و A'' درنظر می‌گیریم.

اعضای A و A' و A'' را به ترتیب با a . b , ...، f , g , ...، F , G , ... نمایش می‌دهیم.

اولین ضرب آرنز به صورت زیر تعریف می‌شود.

به ازاء اعضاء دلخواه $a , b \in A$، $f \in A'$، $F, G \in A''$ اعضاء $fa , Ff \in A'$، $FG \in A''$ با ضوابط زیر را درنظر می‌گیریم.

۱) $fa\,(b) = f\,(ab)$

۲) $Ff\,(a) = F\,(fa)$

۳) $FG\,(f) = F\,(Gf)$

بدین طریق در A'' عملی تعریف شده که آنرا اولین ضرب آرنز (ضرب آرنز چپ) می‌نامند.

دومین ضرب آرنز (ضرب آرنز راست) به صورت زیر تعریف می‌شود.

به ازاء هر $a , b \in A$، $f \in A'$، $F , G \in A''$ اعضاء $fF, af \in A'$، $F.G \in A''$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

۱) $af\,(b) = f\,(ba)$

۲) $fF\,(a) = F\,(af)$

۳) $F.G\,(f) = G\,(fF)$