دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

پایداری ساختاری میدان‌های برداری چندجمله‌ای شبه همگن

استاد راهنما

دکتر امید ربیعی مطلق

استاد مشاور

دکتر حاجی محمد محمدی نژاد

نگارنده

محبوبه سکندرپور

شهریور ۹۲

چکیده

در این پایان نامه، مجموعه میدان‌های برداری چندجمله‌ای (p, q)-شبه همگن از درجه‌ی m را با H_{pqm} و مجموعه میدان‌های برداری متعلق به H_{pqm} که نسبت به اختلال در مجموعه، پایدار هستند، با Ω_{pqm} نشان می‌دهیم و همچنین تعداد دقیق کلاس‌های هم ارزی در مجموعه Ω_{pqm} را مشخص می‌کنیم.

واژگان کلیدی: پایداری ساختاری، میدان برداری شبه همگن
تعداد صفحات پایان نامه: ۷۲

تقدیم به:

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه ی دلم،

پدرم، به او که نمی دانم از بزرگیش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و...

مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت او می دانم.

همسرم، استوارترین تکیه گاهم که بیش از عشق بر او عاشقم.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تقدیم سپاس گزاری...

خدای بزرگ را شاکرم که بدون هیچ چشمداشتی، یاریم بخشید تا یکی دیگر از مراحل زندگیم را با موفقیت به پایان برسانم. در این میان بر خود لازم می‌دانم که از همه کسانی که کمکم کردند، تشکر و قدردانی کنم. از استاد ارجمندم دکتر امید ربیعی مطلق خالصانه تشکر می‌کنم که اگر کمک‌های ارزشمند ایشان نبود، این پایان نامه به اتمام نمی‌رسید و برای ایشان موفقیت بیش از پیش آرزومندم. از زحمات آقای دکتر محمدی نژاد نیز بینهایت سپاسگزارم. همچنین از خانواده‌ی عزیزم که عاشقانه دوستشان دارم، بسیار سپاسگزارم.

محبوبه سکندرپور

شهریور ۹۲

فهرست مطالب

پیش گفتار

مسئله‌ی پایداری میدان‌های برداری مسطح، از دهه شصت میلادی، مورد توجه قرار گرفت و مقالات زیادی در این زمینه نوشته شد. آندرونوف[۲] و پونتریاگین[۳]، اولین تعریف پایداری میدان‌های برداری مسطح را ارائه دادند. پس از آن، مطالعه‌ی این موضوع، گسترش بیشتری پیدا کرد؛ از جمله جارک[۴]، لیبر[۵] وشافر[۶]، پایداری ساختاری میدان برداری را، تحت انواع مختلفی از اختلال، مورد بررسی قرار دادند. با این وجود، مشخصات دقیق میدان‌های برداری ساختارا پایدار، مسئله‌ای باز است. ما در فصل ۱، تعاریفی از میدان‌های برداری و پایداری آنها، ارائه می‌کنیم، سپس حالاتی که میدان برداری، پایداری خود را از دست می‌دهد و دچار اختلال می‌شود، بیان می‌کنیم و به بررسی انواع اختلال، می‌پردازیم. پس از آن، انواع انشعاب‌ها برای سیستم‌های دینامیکی پیوسته و گسسته، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل ۲، در بخش اول، با روشی که فشرده سازی پوانکاره لیاپانوف، نامیده می‌شود، نقاط تکین را در بی‌نهایت مطالعه می‌کنیم و فضای حالت میدان‌های برداری شبه همگن را مشخص می‌کنیم و ویژگی‌های مجموعهΩ_{pqm} را بیان می‌نماییم و سرانجام در بخش دو، تعداد دقیق کلاسهای هم ارزی Ω_{pqm} را با کمک قضایا به دست می‌آوریم.

---

[۲] Andronov
[۳] Pontrjagin
[۴] Jarque
[۵] Llibre
[۶] Shafer

فصل ۱
پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

.

۱.۱ مقدمه

در این فصل، مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی مورد نیاز را ارائه می‌کنیم که درک روشنی از مفهوم پایداری و انشعاب میدان‌های برداری و دیفئومورفیسم‌ها به دست آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع (معمولا پیوسته) باشد. اگر $X(t) = (x_۱(t), x_۲(t), ..., x_n(t))^T$ یک تابع برداری و $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ باشد، رابطه زیر را یک معادله دیفرانسیل معمولی ناخودگردان[۱] می‌نامند :

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۱}$$

که در آن تابع برداری و مشتق پذیر $x(t)$ مجهول این معادله است. منظور از یک جواب برای این معادله دیفرانسیل تابعی مثل $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ است، به طوری که

$$\{(t, x(t)) | t \in I\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

معادله دیفرانسیل را خودگردان[۲] می‌نامیم اگر تابع f مستقل از t باشد. در این حالت f را به صورت $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم و معادله دیفرانسیل را به صورت $\dot{x} = f(x)$ نشان می‌دهیم.

حال اگر فرض کنیم $x' = f(x, t)$ یک معادله دیفرانسیل ناخودگردان باشد و تعریف کنیم $G(y) = (f(x, t), ۱)$ و $y = (x, t)$ یعنی $G(y) = f(y, ۱)$ در این صورت داریم:

$$y' = (x', ۱) = (f(t, x), ۱) = G(y).$$

[۱] Nonautonomous
[۲] Autonomous

به طور واضح $x(t)$ یک جواب $X' = f(x,t)$ است اگروتنهااگر $y(t) = (x(t),t)$ جواب $y' = G(y)$ باشد. یعنی هر دستگاه ناخودگردان با یک تغییر متغیر مناسب، تبدیل به یک معادله خودگردان می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. منظور از یک مسئله مقدار اولیه خطی در $\mathbb{R}^n$ معادله‌ای به صورت

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_\circ) = x_\circ \tag{۲.۱}$$

است که در آن $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ و $t_\circ \in \mathbb{R}$. منظور از یک جواب برای(۲.۱)، منحنی مثل $x(t)$ است که $x(t_\circ) = x_\circ$ و x جوابی برای(۱.۱) باشد.

قضیه ۳.۱.۱. (یکتایی و وجود) *فرض کنید E یک زیرمجموعه باز از R^{n+m} باشد که شامل نقطه‌ی $(X_\circ, \mu_\circ)$ است و $f \in C^1(E)$. در این صورت یک $a > \circ$ و $\delta > \circ$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in N_\delta(X_\circ)$ و $\mu \in N_\delta(\mu_\circ)$، مسئله‌ی مقدار اولیه*

$$\dot{x} = f(x,\mu), \quad x(\circ) = y$$

یک جواب یکتا $u(t,y,\mu)$ دارد که $u \in C^1(G)$ و $G = [-a,a] \times N_\delta(x_\circ) \times N_\delta(\mu_\circ)$.

برهان. به [۱۸] مراجعه نمایید. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع C^r و $r \geq \circ$ باشد. برای هر $x_\circ \in E$ خانواده‌ی $\mathbb{A}_{x_\circ}$ را خانواده‌ی همه‌ی جواب‌های مسئله‌ی مقدار اولیه

$$x' = f(x) \quad x(\circ) = x_\circ$$

در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\mathbb{A}_{x_\circ} = \{\gamma : I_\gamma \to E | \gamma'(t) = f(\gamma(t)), \gamma(\circ) = x_\circ\}$. تعریف می‌کنیم $I_{x_\circ} = \cup_{\gamma \in \mathbb{A}_{x_\circ}} I_\gamma$. به طور واضح $I_{x_\circ}$ یک بازه شامل $\circ$ است. حال تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \gamma_{x_\circ} : & I_{x_\circ} \to E \\ & t \to \gamma(t) \end{cases}$$

به طور واضح $\gamma_{x_\circ}$ یک جواب مسئله‌ی مقدار اولیه است؛ یعنی $\gamma_{x_\circ} \in \mathbb{A}_{x_\circ}$. در این حالت $I_{x_\circ}$ را بازه ماکزیمال وجود جواب و $\gamma_{x_\circ}$ را جواب ماکزیمال می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی C^r و $r \geq \circ$ و $x_\circ \in E$ باشد. همچنین فرض کنید $\gamma_{x_\circ} : I_{x_\circ} \to E$ نشان دهنده‌ی جواب ماکزیمال مسئله‌ی مقدار اولیه $x' = f(x), \quad x(\circ) = x_\circ$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\Omega = \cup_{x_\circ \in E} I_{x_\circ} \times \{x_\circ\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

و قرار می‌دهیم:

$$\varphi : \Omega \to E$$
$$(t, x_\circ) \to \varphi_t(x_\circ).$$

برای هر $x_\circ \in E$ ثابت، $\varphi_t(x_\circ)$ جواب ماکزیمال است که در لحظه ۰ از $x_\circ$ عبور می‌کند. بنابراین

$$\varphi(\circ, x_\circ) = x_\circ, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_\circ) = \gamma'_{x_\circ}(t) = f(\gamma_{x_\circ}(t)) = f(\varphi(t, x_\circ))$$

φ را شار تولید شده توسط $x' = f(x)$ می‌گوییم و همچنین نگاشت $\varphi(\circ, x_\circ) : I(x_\circ) \to E$ منحنی جواب (یا مسیر یا مدار) معادله $x' = f(x)$ نامیده می‌شود و با $\Gamma(x_\circ)$ نشان داده می‌شود.

اکنون فرض کنیم $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ تابعی C^1 باشد، در این صورت برای هر $\mu = \mu_\circ \in \mathbb{R}^k$ ثابت، معادله $x' = f(x, \mu_\circ)$ شاری مثل $\varphi(t, x)$ دارد که به طور طبیعی با تغییر $\mu_\circ$، شار نیز تغییر می‌کند. یعنی شار معادله دیفرانسیل $x' = f(x, \mu)$، وابسته به پارامتر μ است. بنابراین شار را به صورت $\varphi(t, x_\circ, \mu)$ نشان می‌دهیم. $\varphi(t, x_\circ, \mu)$ نشان دهنده‌ی جواب ماکزیمال $X' = f(x, \mu)$ است که در لحظه $t = \circ$ از $x_\circ$ عبور می‌کند. بنابراین

$$\varphi(\circ, x_\circ, \mu) = x_\circ, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_\circ, \mu) = f(\varphi(t, x_\circ, \mu), \mu)$$

و سرانجام داریم:

$$\varphi(t, \varphi(s, x_\circ, \mu), \mu) = \varphi(t + s, x_\circ, \mu). \tag{۳.۱}$$

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که شار تولید شده توسط دستگاه $x' = f(x, \mu)$، هم به پارامتر و هم به شرایط اولیه بستگی دارد.

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^n$ نسبت به متغیر x از مرتبه $C^{k \geq 1}$ و نسبت به متغیر μ از مرتبه $C^{L \geq 1}$ باشد. در این صورت شار تولید شده توسط f یعنی $\varphi(t, x, \mu)$ نسبت به t از مرتبه C^{k+1} و نسبت به x از مرتبه C^k و نسبت به μ از مرتبه C^L است.*

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. □

ما علاقه مندیم، رفتار سیستم‌های دینامیکی را مطالعه و با هم مقایسه کنیم. مقایسه هر شی، بر اساس رابطه‌ی هم ارزی است. بدیهی است که سیستم‌های هم ارز رفتار مشابهی دارند.

تعریف ۷.۱.۱. از آنجایی که هر معادله‌ی دیفرانسیل خودگردان $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$، به طور منحصر بفرد، توسط تابع f، مشخص می‌شود، بنابراین می‌توانیم هر تابع $f \in C^r(E), E \subseteq R^n$ را نشان دهنده‌ی یک معادله دیفرانسیل و شار تولید شده توسط آن، در نظر بگیریم، در این حالت f را یک میدان برداری بر E می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی میدان‌های برداری بر E را با $\chi^r(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. دو میدان برداری f و g متعلق به $\chi^r(E)$ هم ارز توپولوژیک [۳]هستند، اگر یک هومومورفیسم $h : E \to E$ وجود داشته باشد که مدارهای f را با حفظ جهتشان به مدارهای g ببرد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $f, g \in \chi^r(E)$ و $p, q \in E$. می گوییم f, g به ترتیب در p, q هم ارز توپولوژیک هستند، اگر همسایگی v_p, w_q و یک هومورفیسم $h : v_p \to w_q$ که $h(p) = q$ وجود داشته باشد که مدارهای f را به مدارهای g با حفظ جهتشان ببرد.

حال با استفاده از تعاریف به بررسی پایداری ساختاری [۴]و پایداری ساختاری موضعی [۵]می‌پردازیم:

تعریف ۱۰.۱.۱. یک میدان برداری ساختارا پایدار است، اگر رفتار توپولوژیکی مدارهایش، تحت آشفتگی جزئی میدان برداری تغییری نکند. در واقع میدان برداری $f \in \chi^r(E)$ ساختارا پایدار است اگر برای هر $g \in \chi^r(E)$ و هر $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، f هم ارز توپولوژیک $f + \epsilon g$ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f \in \chi^r(E)$، می‌گوییم f پایدار ساختار موضعی در p است، اگر برای هر $g \in \chi^r(E)$ و $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، همسایگی U از p و نقطه‌ی $q \in E$ و همسایگی V از q در E و هومورفیسم $h : U(p) \to V$، وجود داشته باشد که $h(p) = q$ و مسیرهای f در U را با حفظ جهت، به مسیرهای $f + \epsilon g$ در V ببرد.

در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که هر میدان برداری f از کلاس C^1، تعریف شده روی R^n، یک سیستم دینامیکی روی R^n ارائه می‌دهد، به طوری که ممکن است شار سیستم $\dot{x} = f(x)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف نشود، ولی شار تولیدشده توسط سیستم ارائه شده، روی همه‌R قابل تعریف باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. *مساله‌ی مقدار اولیه*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}, \quad x(0) = x_0 \tag{۴.۱}$$

[۳] Topologically equivalent
[۴] structural stability
[۵] local stability

برای هر $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ و برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$، یک جواب یکتا $x(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ دارد؛ علاوه بر این سیستم(۴.۱) یک سیستم دینامیکی روی $\mathbb{R}^n$ معرفی می‌کند که با سیستم $\dot{x} = f(x)$ روی $\mathbb{R}^n$ هم ارز توپولوژیک است.

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. $\square$

مثال ۱۳.۱.۱. مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

این مساله‌ی مقدار اولیه، دارای جواب $x(t) = x_0/1 - x_0 t$ می‌باشد که بازه‌ی ماکزیمال آن برای $x_0 > 0$، $(-\infty, 1/x_0)$ است و برای $x_0 < 0$، $(1/x_0, +\infty)$ و برای $x_0 = 0$، $(-\infty, +\infty)$ است. طبق قضیه‌ی قبل، مساله مقدار اولیه‌ی مربوط به صورت زیر است:

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad x(0) = x_0$$

که یک جواب یکتا $x(t)$ در بازه ی $(-\infty, +\infty)$ تعریف می‌کند.

قابل به ذکر است که قضیه (۱۲.۱.۱)، با فرض $f \in C^1(E)$، که E زیرمجموعه سره از $\mathbb{R}^n$ باشد، درست نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۴.۱.۱. برای $x_0 > 0$ مساله مقدار اولیه

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}, \quad x(0) = x_0$$

یک جواب یکتا $x(t) = \sqrt{t + x_0^2}$ دارد که بازه‌ی ماکزیمالش $(-x_0^2, \infty)$ است که با توجه به قضیه(۱۲.۱.۱)، مساله‌ی مقدار اولیه‌ی هم ارز با آن، به صورت زیر است:

$$\dot{x} = \frac{\frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{2x}} = \frac{1}{2x + 1}, \quad x(0) = x_0$$

که جواب یکتای آن $x(t) = -1/2 + \sqrt{t + (x_0 + 1/2)^2}$ است که بازه ماکزیمالش $(-(x_0 + 1/2)^2, \infty)$ می‌باشد. بدیهی است که $I(x_0) \neq R$.

تعریف ۱۵.۱.۱. میدان برداری خودگردان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{۵.۱}$$

نقطه $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه‌ی تکین [۶] است، هرگاه $f(\overline{x}) = \circ$ که اغلب به آن نقطه‌ی بحرانی یا نقطه‌ی ایستا می‌گویند.

بعد از این، در این پایان نامه، نقطه‌ی بحرانی را با $\overline{x}$ نشان می‌دهیم. برای مشخص کردن رفتار میدان برداری $\dot{x} = f(x)$ در یک همسایگی از $\overline{x}$، فرض کنید $x = \overline{x} + y$. با جایگزینی در $\dot{x} = f(x)$ و بسط تابع تیلور $f(x)$، حول $\overline{x}$ داریم:

$$\dot{x} = \dot{\overline{x}} + \dot{y} = f(\overline{x}) + Df(\overline{x})y + o(|y|^{۲})$$

که چون $\dot{\overline{x}} = f(\overline{x})$، بنابراین $\dot{y} = Df(\overline{x})y + o(|y|^{۲})$؛ این معادله، رفتار مسیرهای نزدیک $\overline{x}$، در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. با بررسی رفتار $y(t)$، می‌توانیم رفتار جواب‌های دلخواه نزدیک $\overline{x}$ را مشخص کنیم. دستگاه $y' = Df(\overline{x})y$ را دستگاه خطی شده‌ی دستگاه(۵.۱)در $\overline{x}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. نقطه تکین $x_\circ$ از سیستم $\dot{x} = f(x)$ را یک نقطه تکین هذلولوی [۷] می‌نامیم، اگر هیچ یک از مقادیرویژه‌ی سیستم خطی شده، حول نقطه‌ی ثابت، دارای قسمت حقیقی صفر نباشند. در غیر این صورت آن را یک نقطه‌ی ثابت ناهذلولوی گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید φ_t شار معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ باشد، نقطه تکین $x_\circ$ را پایدار می‌نامیم، اگر برای هر $\epsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in N_\delta(x_\circ)$، $\{\phi(t,x) | t > \circ\} \subset N_\epsilon(x_\circ)$ ؛ یعنی اگر جوابی از نقطه‌ای به اندازه کافی نزدیک به $x_\circ$ شروع شود، در نزدیکی آن نقطه باقی بماند. می‌گوییم نقطه تکین $x_\circ$ مجانبا پایدار است اگر پایدار باشد و $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in N_\delta(x_\circ)$، $\lim_{t\to+\infty} \phi(t,x) = x_\circ$، یعنی هر جوابی که به اندازه کافی به $x_\circ$ نزدیک شود به آن جذب می‌شود.

قضیه ۱۸.۱.۱. *فرض کنید همه مقادیر ویژه $Df(\overline{x})$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آنگاه $x = \overline{x}$ از میدان برداری غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ مجانبا پایدار است.*

برهان. به اثبات [۱۹] مراجعه شود. □

توجه کنید اگر مقادیر ویژه مربوط به میدان برداری خطی هذلولی وار باشند، (یعنی مقادیر ویژه ی سیستم خطی شده، روی محور موهومی قرار نگیرد)، ماهیت نقطه‌ی بحرانی از سیستم غیرخطی را می‌توان توسط ماهیت نقطه‌ی بحرانی سیستم خطی شده تعیین کنیم. یعنی اگر نقطه‌ی بحرانی از سیستم خطی شده پایدار، ناپایدار یا مجانبا پایدار باشد، آنگاه نقطه‌ی بحرانی از میدان برداری به ترتیب، پایدار، ناپایدار یا مجانبا پایدار خواهد بود. حال چند تعریف را بیان می‌کنیم:

[۶] Singular point
[۷] hyperbolic singular

تعریف ۱.۱.۱۹. مبدا، یک مرکز برای سیستم $\dot{x} = f(x)$، نامیده می‌شود، اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که، هر منحنی جواب سیستم غیر خطی $\dot{x} = f(x)$، در همسایگی محذوف مبدا یعنی، $N_\delta(0) - \{0\}$، یک منحنی بسته است که صفر را، به عنوان نقطه‌ی داخلی اش، دارد.

تعریف ۱.۱.۲۰. مبدا یک کانون پایدار برای سیستم $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$، نامیده می‌شود، اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که، برای هر $0 < r_0 < \delta$ و $\theta_0 \in \mathbb{R}$، وقتی $t \to \infty$، داشته باشیم:

$$r(t, r_0, \theta_0) \to 0, \quad |\theta(t, r_0, \theta_0)| \to \infty.$$

مبدا یک کانون ناپایدار، نامیده می‌شود، اگر کانون باشد ولی پایدار نباشد. به بیان دیگر اگر $t \to -\infty$، داشته باشیم:

$$r(t, r_0, \theta_0) \to 0, \quad |\theta(t, r_0, \theta_0)| \to \infty.$$

در این حالت گوییم جواب‌ها، به طور مارپیچی به مبدا میل می‌کنند وقتی $t \to \pm\infty$.

تعریف ۱.۱.۲۱. یک جواب $\dot{x} = f(x)$ که از نقطه‌ی x_0 می‌گذرد، یک جواب تناوبی از تناوب T است، اگر $T > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$x(t) = x(t + T)$$

و برای نگاشت، مدار $x_0 \in \mathbb{R}^n$ متناوب از تناوب k است، اگر $g^k(x_0) = x_0$. همچنین قابل به ذکر است که چرخه‌ی حدی، تمام مسیرهایی که در همسایگیش قرار می‌گیرند، در زمان مثبت یا منفی به خود جذب می‌کند.

تعریف ۱.۱.۲۲. یک نقطه‌ی ثابت هذلولوی از یک میدان برداری (نگاشت) یک نقطه‌ی زینی نامیده می‌شود، هرگاه تعدادی از مقادیر ویژه ی میدان برداری خطی شده دارای قسمت حقیقی بزرگ تر از صفر(قدرمطلق بزرگ تر از یک) وتعدادی دارای قسمت حقیقی کوچک تر از صفر(قدرمطلق کمتر از یک) باشند. اگر همه‌ی مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی(قدرمطلق کمتر از یک) باشد، آنگاه نقطه‌ی ثابت هذلولوي، یک گره پایدار یا چاه[8] نامیده می‌شود و اگر همه‌ی مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشد(قدرمطلق بزرگ تر از یک) آنگاه نقطه‌ی ثابت هذلولوی، یک گره ناپایدار یا چشمه[9] نامیده می‌شود. اگر مقادیر ویژه، موهومی محض (دارای قدرمطلق یک) و ناصفر(حقیقی نباشند) باشند، نقطه‌ی ثابت ناهذلولوی می گویند.

[8] sink
[9] source

تعریف ۲۳.۱.۱. تابع $g(x)$ را یک دیفئومورفیسم از کلاس C^r می‌نامیم هرگاه معکوس پذیر بوده و $g(x)$ و $g^{-1}(x)$ از کلاس C^r باشند.

تعریف ۲۴.۱.۱. $p \in E$ یک نقطه‌ی تکین ساده از یک میدان برداری $f \in \chi^r(E)$ است، اگردستگاه خطی شده‌ی آن، مقدار ویژه صفر نداشته باشد؛ واگر $p \in E$ یک نقطه‌ی ثابت از دیفئومورفیسم f باشد ، ما می گوییم که p یک نقطه‌ی ثابت ابتدایی است اگردستگاه خطی شده‌ی آن، مقدار ویژه یک نداشته باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه $S \subset X$ پایا است، اگر $x_0 \in S$ و برای هر $t \in T$ داشته باشیم، $\varphi^t x_0 \in S$.

برای تعریف پایداری نقاط ثابت یک نگاشت، نگاشت $C^r(r \geq 1)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$x \to g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

و فرض کنید که نگاشت یک نقطه تکین در $x = \overline{x}$ دارد یعنی $\overline{x} = g(\overline{x})$
نگاشت خطی مربوط به آن، به صورت زیر است:

$$y \to Ay, \qquad y \in \mathbb{R}^n$$

که $A \equiv Dg(\overline{x})$. نقاط ثابت از نگاشت خطی $y \to Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n$ مجانبا پایدار است، اگر همه‌ی مقادیر ویژه A، قدرمطلق کمتر از یک داشته باشند.

۲.۱ اختلال

در این بخش با بیان یک مثال، پایداری سیستم را نسبت به اختلال به وجود آمده در آن، مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر تحت اختلال جزئی، نقاط ثابت از بین بروند یا نقاط ثابت جدید بوجود آیند و به طور کلی ساختار مداری سیستم، دچار تغییر شود، سیستم، دچار اختلال شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع دیفرانسیل پذیر و $I(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع برداری باشد، به طوری که $< \nabla I, f(x) > \equiv 0$. در اینصورت تابع I را یک انتگرال اول برای سیستم معادلات خودگردان $\dot{x} = f(x)$ خوانیم.

مثال ۲.۲.۱. سیستم نوسانگر هارمونیک ساده زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{۷.۱}$$

واضح است که سیستم یک نقطه تکین ناهذلولوی در $(x,y)=(0,0)$ دارد که توسط خانواده یک پارامتری مدارهای تناوبی با فرکانس ω_0، محاط شده است. فضای حالت آن برای $\omega_0 = 1$ دایره و در بقیه موارد به صورت بیضی می‌باشد. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا سیستم(۷.۱) نسبت به اختلال پایدار است؟ برای پاسخ به این سوال، به بررسی انواع اختلال‌های سیستم می‌پردازیم:

۱.۲.۱ اختلال خطی

سیستم دارای اختلال زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \epsilon y.$$

واضح است که مبدا یک نقطه تکین ناهذلولوی و برای $\epsilon > 0$ یک چاه و برای $\epsilon < 0$ یک چشمه است. سیستم تحت این اختلال پایدار نمی‌ماند و مدارهای تناوبی آن از بین می‌روند وفضای حالت آن تغییر می‌کند.

۲.۲.۱ اختلال غیرخطی

سیستم دارای اختلال زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x + \epsilon x^2.$$

این سیستم دارای دو نقطه تکین $(x,y)=(0,0)$ و $(x,y)=(\omega_0^2/\epsilon, 0)$ است؛ واضح است که مبدا هنوز یک مرکز است (یعنی هنوز توسط اختلال تغییر نکرده است) و نقطه تکین جدید، یک نقطه زینی است. بنابراین، سیستم دچار اختلال شده است.

۳.۲.۱ اختلال وابسته به زمان

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x + \epsilon x \cos t. \tag{۸.۱}$$

این اختلال نسبت به دو مورد قبلی، خیلی متفاوت است؛ سیستم را می‌توان با افزایش یک بعد، به صورت یک سیستم خودگردان نوشت:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega_0^2 x + \epsilon x \cos\theta, \qquad \dot{\theta} = 1. \tag{۹.۱}$$

$(x, y) = (0, 0)$یک نقطه تکین(۸.۱)است؛ ولی برای سیستم(۹.۱)،نقطه‌ی ثابت، $(1, 0, 0)$ است که مدار آن، به صورت مدار تناوبی می‌باشد. معادله (۸.۱) به معادله متیو[۱۰] معروف است.

۳.۱ انشعاب میدان‌های برداری

اغلب دستگاه‌های دینامیکی که جنبه‌ی فیزیکی دارند، با پارامتر همراه هستند که با تغییر پارامترهای موجود در معادلات مربوط به آن‌ها، تغییراتی در ساختار کیفی جواب‌ها رخ می‌دهد. این تغییرات را انشعاب و مقدار پارامتر که در آن تغییرات به وجود می‌آید را، مقدار انشعاب می‌گویند. انشعاباتی که معمولا در مجاورت نقاط بحرانی (نقاط ثابت) رخ می‌دهد را، انشعابات موضعی می‌نامند. میدان برداری پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{y} = g(y, \lambda) \qquad , y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p \tag{۱۰.۱}$$

که در آن g بر مجموعه‌ی بازی چون $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$، یک تابع دیفرانسیل پذیر از کلاسC^k است و فرض کنید که میدان برداری (۱۰.۱)، دارای نقطه تکینی چون $(y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ باشد؛ یعنی $g(y_0, \lambda_0) = 0$.

حال دو سوال اساسی به ذهن می رسد:۱-آیا نقطه ثابت(y_0, λ_0) از میدان برداری (۱۰.۱) پایدار یا ناپایدار است؟ ۲-آیا تغییرات λ می‌تواند پایداری یا ناپایداری نقطه ثابت (y_0, λ_0)را تحت تاثیر قرار دهد؟

یک روش برای این که بتوانیم به سوال اول پاسخ دهیم، این است که، میدان برداری (۱۰.۱) را در مجاورت نقطه‌ی بحرانی (y_0, λ_0) خطی سازی کنیم. میدان برداری خطی شده متناظر با (۱۰.۱) در مجاورت نقطه بحرانی (y_0, λ_0) عبارتست از:

$$\dot{\xi} = D_y g(y_0, \lambda_0)\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{۱۱.۱}$$

باید توجه داشت که اگر$D_y g(y_0, \lambda_0)$ ، دارای برخی مقادیر ویژه روی محور موهومی باشد، یعنی(y_0, λ_0)، نقطه‌ی بحرانی ناهذلولی سیستم باشد، در این حالت می‌تواند رفتار دینامیکی جدیدی برای سیستم رخ دهد؛ یعنی نقاط ثابت جدیدی به وجود آیند یا نقاط ثابت از بین بروند.

حال اگر $D_y g(y_0, \lambda_0)$ دارای یک مقدار ویژه صفر و مابقی مقادیر ویژه آن دارای جزء حقیقی مخالف صفر باشند، آنگاه رفتار دینامیکی سیستم (۱۰.۱)، در مجاورت نقطه‌ی بحرانی (y_0, λ_0)، ممکن است، متحمل نوعی از انشعاب شود که ما آن را انشعاب از نوع زینی-گره[۱۱]، انشعاب چنگال

[۱۰] Mathieu
[۱۱] Saddle-node

[12]، انشعاب بحرانی تراگذر [13]و... می‌نامیم و در ادامه به معرفی و بررسی آنها خواهیم پرداخت. همچنین اگر $D_y g(y_0, \lambda_0)$ دارای یک جفت مقدار ویژه موهومی محض باشد و بقیه مقادیر ویژه آن دارای جزء حقیقی مخالف صفر باشند، آنگاه ممکن است سیستم متحمل نوعی از انشعاب گردد که ما آن را انشعاب هوف-پوانکاره [14]می‌نامیم و در ادامه به معرفی آن خواهیم پرداخت.

۱.۳.۱ انشعاب زینی گره

اگر قرار باشد یک خانواده‌ی کلی از میدان‌های برداری یک بعدی یک پارامتری چون

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

در نقطه $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ متحمل انشعاب از نوع انشعاب زینی-گره شود، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{array}{ll} (1).\ f(0,0) = 0, & (2).\ \partial f/\partial x(0,0) = 0, \\ (3).\ \partial f/\partial \mu(0,0) \neq 0, & (4).\ \partial^2 f/\partial \mu^2(0,0) \neq 0. \end{array}$$

این انشعاب درنقطه$(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ در شکل(۱.۱) نشان داده شده است.

۲.۳.۱ انشعاب بحرانی تراگذر

اگر سیستم(۱۲.۱)بخواهد متحمل انشعاب بحرانی تراگذر شود، شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{array}{ll} (1).\ f(0,0) = 0, & (2).\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \\ (3).\ \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, & (4).\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \\ (5).\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. & \end{array}$$

این انشعاب در نقطه $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ در شکل(۲.۱) نشان داده شده است.

۳.۳.۱ انشعاب چنگال

و روابطی که منجر می‌شود سیستم(۱۲.۱)دارای انشعاب چنگال باشد، به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ll} (1).\ f(0,0) = 0, & (2).\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \\ (3).\ \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, & (4).\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \\ (5).\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0. & \end{array}$$

[12] pitchfork
[13] Transcritical
[14] Poincare-Hopf